Corrigé du devoir en temps libre 5

Exercice 1. 1. On commence par résoudre l'équation homogène associée,

$$(H): \ \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + \omega^2 y(x) = 0.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 + \omega^2 = 0$, dont les racines sont $i\omega$ et $-i\omega$. Le théorème du cours s'applique, et les solutions (réelles) de H sont les éléments de l'ensemble

$$S(H) = \{x \mapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

2. On cherche une solution particulière de la forme $\phi_p : x \mapsto A\cos(\omega_0 x) + B\sin(\omega_0 x)$, où A et B sont des réels à déterminer. La fonction ϕ_p est solution de $(E) : \forall t \in \mathbb{R}, y''(x) + \omega^2 y(x) = \cos(\omega_0 x)$ si, et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 x) - B\omega_0^2 \sin(\omega_0 x) + \omega^2(A\cos(\omega_0 x) + B\sin(\omega_0 x)) = \cos(\omega_0 x)$$

ce qui est équivalent, en regroupant les termes, à

$$\begin{cases} (-\omega_0^2 + \omega^2)A = 1 \\ (-\omega_0^2 + \omega^2)B = 0. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\phi_p : x \mapsto \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 x)$$

est une solution particulière de (E).

3. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est

$$S(E) = S(H) + \phi_p = \left\{ x \mapsto \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 x) + \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La fonction

$$\phi : x \mapsto \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 x) + \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$$

est solution du problème de Cauchy si, et seulement si, $\phi(0) = 1$ et $\phi'(0) = 0$,

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} + \alpha & = 1 \\ \beta\omega = 0. \end{cases}$$

On en conclut que l'unique solution du problème de Cauchy est la fonction

$$\phi : x \mapsto \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 x) + \left(1 - \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) \cos(\omega x).$$

Exercice 2. 1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de (E) de la forme $\phi : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

$$\begin{aligned} \phi \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)(2ax+b) - (3x-1)(ax^2+bx+c) + x^2(x+1) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^3 + bx^2 - 2ax^2 - bx - 3ax^3 - 3bx^3 - 3cx + ax^2 + bx + c + x^3 + x^2 = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (2a - 3a + 1)x^3 + (b - 2a - 3b + a + 1)x^2 + (-b - 3c + b)x + c = 0, \end{aligned}$$

donc ϕ est solution de (E) si, et seulement si,

$$\begin{cases} -a + 1 = 0 \\ -2b - a + 1 = 0 \\ -3c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

La fonction $\phi : x \mapsto x^2$ est donc une solution particulière de (E).

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, et soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+bx}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)},$$

donc

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ si, et seulement si, $a+b=3$ et $-a=-1$, c'est-à-dire que $a=1$ et $b=2$. On a donc montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \quad \frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}.$$

3. Comme la fonction $x \mapsto x(x-1)$ s'annule en 0 et en 1, on ne peut pas écrire (E) sous forme normalisée sur $\mathbb{R}$ tout entier. Par contre, si on se restreint à des intervalles qui ne contiennent ni 0 ni 1, il n'y a pas de problème : on définit donc $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0,1[$, et $I_3 =]1,+\infty[$. Considérons l'un de ces intervalles, par exemple I_1. L'équation différentielle peut se réécrit :

$$(E_1) : \forall x \in I_1, \quad y'(x) - \frac{3x-1}{x(x-1)}y(x) = -\frac{x^2(x+1)}{x(x-1)}.$$

On commence par résoudre l'équation homogène associée. Il suffit donc de trouver une primitive de la fonction définie sur I_1, $a : x \mapsto -\frac{3x-1}{x(x-1)}$. Or, la question précédente permet d'affirmer que sur cet intervalle, la fonction $A : x \mapsto -\ln(|x|) - 2\ln(|x-1|) = -\ln(|x|(x-1)^2)$ est une primitive de a. Comme on connaît par ailleurs une solution particulière grâce à la question 1, on en déduit que les solutions de (E_1) sont les éléments de l'ensemble

$$S(E_1) = \left\{ \begin{array}{rcl} \psi_\lambda :]-\infty,0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + \lambda|x|(x-1)^2 \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le raisonnement est le même pour les deux autres intervalles. On définit alors, pour $i \in \{1,2,3\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \phi_{i,\lambda} : I_i & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + \lambda x(x-1)^2 \end{array},$$

et on peut remarquer que si $x < 0$, alors $\psi_\lambda(x) = x^2 - \lambda x(x-1)^2 = x^2 + (-\lambda)x(x-1)^2 = \phi_{1,-\lambda}(x)$, et donc pour tout $i \in \{1,2,3\}$,

$$S(E_i) = \{\phi_{i,\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

4. On suppose que f est une solution de (E). En particulier, la fonction f restreinte à I_1, notée $f|_{I_1}$, est solution de (E_1). Par conséquent, d'après le résultat de la question précédente, il existe une constante $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ telle que $f|_{I_1} = \phi_{1,\lambda_1}$. Il en va de même pour les restrictions de f à I_1 et à I_2 : on a donc montré l'existence de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \text{si } x < 0, & f(x) = x^2 + \lambda_1 x(x-1)^2, \\ \text{si } 0 < x < 1, & f(x) = x^2 + \lambda_2 x(x-1)^2, \\ \text{si } 1 < x, & f(x) = x^2 + \lambda_3 x(x-1)^2. \end{cases}$$

5. Par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, f et f' sont continues en 0 (respectivement, en 1), ce qui implique que la restriction de f à I_1 admet la même limite en 0 que la restriction de f à I_2 (respectivement, en sur I_2 et I_3, en 1). Calculons ces limites

$$\lim_{x\to 0, x\in I_1} x^2 + \lambda_1 x(x-1)^2 = 0 = \lim_{x\to 0, x\in I_2} x^2 + \lambda_2 x(x-1)^2,$$

et donc la fonction f est continue en 0 indépendamment des valeurs de λ_1 et λ_2. De la même manière,

$$\lim_{x\to 1, x\in I_2} x^2 + \lambda_2 x(x-1)^2 = 1 = \lim_{x\to 1, x\in I_3} x^2 + \lambda_3 x(x-1)^2.$$

Calculons maintenant la dérivée de f : pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et $x \in I_i$, $f'(x) = 2x + \lambda_i(x-1)(3x-1)$. L'argument de continuité en 0 et en 1 vaut pour f' comme pour f, calculons donc la limite de f en 0 en se restreignant à I_1 et I_2 :

$$\lim_{x\to 0, x\in I_1} f'(x) = \lambda_1, \quad \lim_{x\to 0, x\in I_2} f'(x) = \lambda_2.$$

Ainsi, f' étant continue, on a nécessairement l'égalité $\lambda_1 = \lambda_2$. Par contre,

$$\lim_{x\to 1, x\in I_2} f'(x) = 2 = \lim_{x\to 1, x\in I_3} f'(x),$$

donc on ne trouve pas de condition reliant λ_2 et λ_3.

6. On a montré que si f est solution de (E) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors il existe deux constantes réelles λ_1 et λ_3 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \text{si } x < 0, & f(x) = x^2 + \lambda_1 x(x-1)^2, \\ \text{si } 0 < x < 1, & f(x) = x^2 + \lambda_1 x(x-1)^2, \\ \text{si } 1 < x, & f(x) = x^2 + \lambda_3 x(x-1)^2. \end{cases}$$

On a déterminé f sur I_1, I_2 et I_3 : il suffit maintenant de "recoller" les morceaux par continuité. On peut affirmer que

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda_1 x(x-1)^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + \lambda_3 x(x-1)^2 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases} \tag{1}$$

La démonstration n'est pas terminée : on a montré que si f est solution, alors elle a la forme (1). Il faut s'assurer de la réciproque pour conclure : soient λ_1, λ_3 des constantes réelles. Alors, la fonction définie par la formule (1) est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (d'après les considérations de la question 5), et c'est une solution de l'équation différentielle (E) sur I_1, sur I_2, et sur I_3. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$,

$$x(x-1)f'(x) - (3x-1)f(x) + x^2(x+1) = 0.$$

Par continuité de f et f', cette relation est encore vérifiée pour $x = 0$ et $x = 1$, et donc f est bien une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

On peut conlure : les solutions de (E) de classe $\mathcal{C}^1$ sont les éléments de l'ensemble

$$\left\{ f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + \lambda_1 x(x-1)^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + \lambda_3 x(x-1)^2 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}, \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3. 1. La fonction constante égale à 0 est une solution du problème.

2. Soit f une fonction qui vérifie l'équation fonctionnelle. En particulier, en choisissant $x = 0$ et $y = 0$, on trouve que $f(0) = 2f(0)$, et donc $f(0) = 0$.
3. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $y \mapsto f(x+y)$ et $y \mapsto e^x f(y) + e^y f(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et on en déduit donc que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f'(x+y) = e^x f'(y) + e^y f(x).$$

En particulier, pour $y = 0$, on obtient que

$$f'(x) = e^x f'(0) + f(x).$$

Cette relation étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en conclut que f est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) + Ce^x,$$

où $C = f'(0)$.

4. On commence par résoudre l'équation homogène associée, $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = y(x)$. L'ensemble des solutions de cette équation est

$$S(H) = \{x \mapsto \alpha e^x, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Pour trouver une solution particulière, on procède par variation de la constante : on cherche une solution de la forme $\phi_p : x \mapsto \alpha(x)e^x$, où α est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors ϕ_p est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi_p'(x) = \phi_p(x) + Ce^x \iff \alpha'(x)e^x = Ce^x.$$

Ainsi, la fonction $\alpha : x \mapsto Cx$ convient. On en déduit que

$$S(E) = \{x \mapsto \alpha e^x + Cxe^x, \alpha \in \mathbb{R}\},$$

et la solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$ est nécessairement la fonction

$$\phi : x \mapsto Cxe^x.$$

5. On a montré que si f est dérivable et vérifie l'équation fonctionnelle, alors f est solution du problème de Cauchy de la question 4, et donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto Cxe^x$.
Réciproquement, soit $C \in \mathbb{R}$. On considère $f : x \mapsto Cxe^x$. Alors, si $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x+y) &= C(x+y)e^{x+y} \\ &= Cxe^{x+y} + Cye^{x+y} \\ &= e^y Cxe^x + e^x Cye^y \\ &= e^y f(x) + e^x f(y), \end{aligned}$$

et f est bien une solution de l'équation fonctionnelle.
Finalement, l'ensemble des solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y)$ est l'ensemble

$$\{x \mapsto Cxe^x, C \in \mathbb{R}\}.$$