# Devoir en temps libre 6 : matrices et résolutions de systèmes linéaires

À rendre pour le 12 décembre 2022

*L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est proscrit lors des devoirs sur table, il est donc fortement recommandé de s'habituer dès maintenant à ces nouvelles exigences.*

*Pour les devoirs maison, il est possible de travailler à plusieurs pour réfléchir aux exercices, de se faire aider (après avoir essayé) ou de poser des questions au professeur. Par contre, il est indispensable que la rédaction des exercices soit personnelle.*

*La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.*

---

**Exercice 1.** On considère les matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calcul des puissances de $J$.
   a. Déterminer une matrice diagonale $D$ telle que $J = D + N$.
   b. Calculer $N^2$, $DN$ et $ND$.
   c. À l'aide du binôme de Newton, en déduire une expression simple de $J^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+3} = -v_{n+2} + 5v_{n+1} - 3v_n$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice colonne $V_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   a. Déterminer une matrice $A$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$.
   *Indication :* commencer par vérifier que l'égalité $V_{n+1} = AV_n$ n'est possible que si $A$ est de taille $3 \times 3$, puis déterminer les coefficients de $A$ à l'aide de la relation de récurrence définissant $(v_n)$.
   b. Montrer par récurrence que $V_n = A^n V_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On définit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.
   b. Vérifier que $A = PJP^{-1}$.
   c. En déduire une expression de $A^n$ en fonction de $P$, $P^{-1}$ et des puissances de $J$.
4. Exprimer explicitement le terme général de $(v_n)$ en fonction de $n$.

**Exercice 2** (Un problème de commutation)**.** On rappelle qu'on dit de deux matrices carrées $A$ et $B$ qu'elles commutent si $AB = BA$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels deux à deux distincts. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. (*Indication : fixer une matrice $A$, et comparer les coefficients de $AD$ et de $DA$.*)

**Exercice 3.** Résoudre le système suivant en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$(S_\lambda) : \begin{cases} x + y + \lambda z = 0, \\ x + \lambda y + z = 0, \\ \lambda x + y + z = 0. \end{cases}$$

**Exercice 4.** On dit qu'une matrice carrée $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* s'il existe un entier naturel $p$ tel que $N^p = \mathcal{O}_n$. Dans cet exercice, on va démontrer la propriété suivante : si $A, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices telles que $AN = NA$ et $N$ est nilpotente, alors

$$A \text{ est inversible} \iff A + N \text{ est inversible.}$$

1. On considère les matrices
$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Lesquelles sont nilpotentes ? Justifier.
2. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$.
   a. Calculer le produit
   $$(I_n - B)(I_n + B + \cdots + B^p).$$
   b. En déduire que si $B$ est nilpotente, alors $I_n - B$ est inversible, et donner son inverse en fonction de $B$.
3. On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on suppose que $A$ est inversible.
   a. Montrer que $A$ et $B$ commutent si, et seulement si, $A^{-1}$ et $B$ commutent.
   b. En déduire que si $B$ est nilpotente et commute avec $A$, alors $A^{-1}B$ est nilpotente.
4. On fixe maintenant $A$ et $N$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent, et on suppose que $N$ est nilpotente.
   a. Dans un premier temps, démontrons le sens direct du résultat. Montrer que si $A$ est inversible, alors $I_n + A^{-1}N$ est inversible, et en déduire que $A + N$ l'est.
   b. Réciproquement, montrer que si $A + N$ est inversible, alors $A$ l'est aussi. (*Indication : on pourra utiliser le résultat que l'on vient de montrer dans la question précédente*)