Corrigé du devoir en temps libre 6

Exercice 1. 1. a. $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N.$

b. On a : $N^2 = 0$, et

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N,$$

et de la même manière, on trouve que $ND = N$.

c. On a montré que $ND = DN$, donc la formule du binôme de Newton donne, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} J^n = (D+N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= D^n + nND^{n-1}, \end{aligned}$$

car pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$. D'une part, les puissances de D sont faciles à calculer car D est diagonale. D'autre part, comme $ND = N$, on a que $ND^{n-1} = (ND)D^{n-2} = \cdots = N$, et donc finalement,

$$J^n = D^n + nN = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par définition,

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ v_{n+2} \\ v_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ v_{n+2} \\ -3v_n + 5v_{n+1} - v_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{pmatrix} = AV_n.$$

b. La récurrence est immédiate : clairement, $V_0 = A^0 V_0$, et si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$, alors $V_{n+1} = AV_n = AA^nV_0 = A^{n+1}V_0$, donc, par principe de récurrence,

$$V_n = A^n V_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. a. On cherche à inverser P avec l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -12 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\overset{L_2 \leftarrow -L_2}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \frac{1}{16} L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & -1/8 & 1/16 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 12L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 9L_3}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 7/16 & 9/8 & -9/16 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & -1/8 & 1/16 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/16 & -3/8 & 27/16 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & -1/8 & 1/16 \end{array}\right)$$

donc P est bien inversible, et

$$P^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b.