Devoir en temps libre 7 : suites et polynômes

À rendre pour le vendredi 13 janvier 2023

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est proscrit lors des devoirs sur table, il est donc fortement recommandé de s'habituer dès maintenant à ces nouvelles exigences.

Pour les devoirs maison, il est possible de travailler à plusieurs pour réfléchir aux exercices, de se faire aider (après avoir essayé) ou de poser des questions au professeur. Par contre, il est indispensable que la rédaction des exercices soit personnelle.

Exercice 1. Trouver le reste dans les divisions euclidiennes suivantes :
1. $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ par $X^2 + 2X + 1$
2. X^{50} par $X^2 - 3X + 2$
3. X^{50} par $(X-1)^2$.

Exercice 2. Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1 vérifiant $a + b + c = 1$.
1. Montrer que si $|z| = 1$, alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$. En déduire que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
2. En déduire que $ab + ac + bc = abc$.
3. Écrire, sous forme développée, le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont a, b et c.
4. Calculer la valeur de ce polynôme en 1, et en déduire que l'un des trois nombres a, b ou c est égal à 1.

Exercice 3 (Méthode de Héron)**.** Cette méthode permettant d'approximer la racine carrée de n'importe quel nombre est utilisée depuis des millénaires, puisqu'elle a été retrouvée dans un livre écrit par le mathématicien grec Héron. Elle porte son nom, bien qu'on sache que la méthode lui est antérieure.

On cherche donc à résoudre l'équation $x^2 = a$ pour un certain $a \in \mathbb{R}_+$, et l'idée est élégante :
- On commence par considérer un rectangle de côtés a et 1, dont l'aire est donc égale à a. On souhaite transformer ce rectangle afin qu'il ressemble un peu plus à un carré, tout en conservant son aire. En effet, si l'on obtient un carré de même aire, alors la longueur de ses côtés est égale à $\sqrt{a}$, et on a donc calculé la racine carrée.
- On considère donc un nouveau rectangle, dont l'un des côtés est $x_1 = \frac{1+a}{2}$, et l'autre est choisi de telle manière que l'aire du nouveau rectangle soit toujours égale à a, c'est à dire que son autre côté est $y_1 = a/x_1 = \frac{2a}{1+a}$.
- Il suffit de maintenant de répéter l'opération. On définit un nouveau rectangle dont les côtés sont (x_2, y_2), avec
$$x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2}, \quad y_2 = \frac{a}{x_2} = \frac{2a}{x_1 + y_1}.$$
On continue autant qu'on le souhaite. Le but de cet exercice est de montrer que cet algorithme est un bon algorithme, en ce sens qu'il converge vers la solution.

Soit $a > 1$. On s'intéresse à la suite (x_n) définie par cet algorithme :
$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (x_n) est bien définie.
2. On considère la fonction
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \frac{x^2 + a}{2x} \end{aligned}$$
Justifier que f est dérivable, puis dresser un tableau de variation de f, en précisant ses valeurs pertinentes.
3. Quelles sont les limites possibles de la suite (x_n) ?
4. Montrer que l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$ est stable par f.
5. En déduire que (x_n) est décroissante.
6. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$.

7. (Application). Dans cette question, on choisit $a = 2$. Calculer x_2, le troisième terme de la suite. Combien de décimales ce nombre rationnel partage-t-il avec $\sqrt{2}$? (*Rappel :* $\sqrt{2} = 1.41421...$)
À titre d'information, x_5 est une très bonne approximation de $\sqrt{2}$, car ces nombres ont 23 décimales en commun !