Corrigé du devoir en temps libre 7

Exercice 1. 1. On pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +X^3 & +X^2 & +X & +1 & X^2+2X+1 \\ \cline{6-6}
-X^4 & -2X^3 & -X^2 & & & X^2-X+2 \\ \cline{1-3}
 & -X^3 & & +X & & \\
 & X^3 & +2X^2 & +X & & \\ \cline{2-4}
 & & 2X^2 & +2X & +1 & \\
 & & -2X^2 & -4X & -2 & \\ \cline{3-5}
 & & & -2X & -1 &
\end{array}$$

donc $\boxed{X^4+X^3+X^2+X+1=(X^2-X+2)(X^2+2X+1)-2X-1}$.

2. On cherche à faire la division euclidienne de X^{50} par un polynôme de degré 2, X^2-3X+2. L'algorithme d'Euclide permet de trouver le reste et le quotient, mais comme le diviseur est un polynôme de petit degré et qu'on ne cherche à connaître que le reste, il est plus facile d'utiliser les racines du diviseur : $X^2-3X+2=(X-2)(X-1)$. D'après le théorème du cours, il existe des polynômes $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $R\in\mathbb{R}_1[X]$ tels que
$$X^{50}=(X^2-3X+2)Q(X)+R(X).$$
R est de degré 1, donc il s'écrit $R=aX+b$, où $a,b\in\mathbb{R}$. Évaluons alors l'équation précédente en les racines de X^2-3X+2, 1 et 2 :
$$\begin{cases} 1^{50}=R(1)=a+b,\\ 2^{50}=R(2)=2a+b,\end{cases}$$
et donc finalement $a=2^{50}-1$ et $b=2-2^{50}$. On en conclut donc que le reste de la division euclidienne de X^{50} par X^2-3X+2 est $\boxed{R=(2^{50}-1)X+2-2^{50}}$.

3. On procède de la même manière pour la division de X^{50} par $(X-1)^2$: il existe $Q\in\mathbb{R}[X]$ est $R=aX+b\in\mathbb{R}_1[X]$ tels que
$$X^{50}=(X-1)^2Q(X)+aX+b.$$
En évaluant cette équation en 1, on obtient, à nouveau, $a+b=1$. Ici, 1 est une racine double du diviseur, et pour tirer profit de cette information, on peut dériver l'équation pour trouver
$$50X^{49}=2(X-1)Q(X)+(X-1)^2Q'(X)+a,$$
et donc, en évaluant en 1, on trouve $a=50$, d'où finalement $b=-49$, et donc $\boxed{R(X)=50X-49}$.

Exercice 2. 1. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|=1$. En particulier, $z\bar{z}=|z|^2=1$, et donc
$$\bar{z}=\frac{1}{z}.$$
Ainsi, si a,b,c sont de module égal à 1, et $a+b+c=1$, alors
$$1=\overline{a+b+c}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

2. En multipliant l'égalité précédente par abc, on obtient :
$$abc=abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=bc+ac+ab$$

3. Soit P le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont a,b et c :
$$\begin{aligned}P&=(X-a)(X-b)(X-c)\\&=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc\\&=X^3-X^2+abcX-abc\end{aligned}$$

4. $P(1) = 1 - 1 + abc - abc = 0$, donc 1 est une racine de P. Or, on connaît les racines de P, qui sont exactement a, b et c, par construction. Par conséquent, $1 \in \{a, b, c\}$, c'est-à-dire que l'un des trois nombres a, b ou c est égal à 1.

Exercice 3. 1. Le seul terme qui pourrait poser un problème de définition est le terme $1/x_n$. Pour montrer que la suite est bien définie, il suffit donc de montrer, par récurrence, que $x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $x_0 = a > 1$, la propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons que $x_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} > 0,$$

et donc, par principe de récurrence, $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la suite est bien définie.

2. La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+a}{2x}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est dérivable sur son ensemble de définition comme quotient de fonctions dérivables. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2(x^2 + a)}{4x^2} = \frac{x^2 - a}{2x^2},$$

et donc f' s'annule en $x = \sqrt{a}$. Par ailleurs, $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$, et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc on dresse le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$\sqrt{a}$	↗	$+\infty$

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc si la suite (x_n) converge vers une limite strictement positive l, alors $f(l) = l$, le réel l est un point fixe de f. Dans ce cas,

$$l = \frac{l^2 + a}{2l} \implies 2l^2 = l^2 + a \implies l^2 = a,$$

or, $l > 0$, et donc nécessairement, $l = \sqrt{a}$. On a donc montré que si (u_n) converge vers une limite strictement positive, cette limite est $\sqrt{a}$.

4. On a montré dans la question 2. que la fonction f est croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$, et que $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$. Par conséquent, si $x \geqslant \sqrt{a}$, alors $f(x) \geqslant f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$, et donc $[\sqrt{a}, +\infty[$ est bien stable par f.

5. Comme $a > 1$, en particulier, $a \geqslant \sqrt{a}$. Comme de plus l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$ est stable par f, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant \sqrt{a}$. On peut alors affirmer que (x_n) est monotone, car f est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$, mais on va démontrer d'un seul coup que la suite est décroissante : pour ce faire, on étudie $f(x) - x$ pour $x \geqslant \sqrt{a}$:

$$f(x) - x = \frac{x^2 + a}{2x} - x = \frac{x^2 - 2x^2 + a}{2x} = \frac{-x^2 + a}{2x} \leqslant 0,$$

et donc, si $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n \leqslant 0$, et la suite (x_n) est décroissante.

6. La suite (x_n) est décroissante, et elle est minorée par $\sqrt{a}$ d'après la question 5. D'après le théorème de la limite monotone, la suite (x_n) est donc convergente, et sa limite est supérieure ou égale à $\sqrt{a} > 0$. Mais alors les conclusions de la question 3. s'appliquent : sa limite est forcément égale à $\sqrt{a}$. On a donc montré que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

7. On choisit $a = 2$, et on calcule les premiers termes de la suite.

$$x_0 = 2, \quad x_1 = \frac{4 + 2}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{9/4 + 2}{3} = \frac{17}{12}.$$

En posant la division euclidienne, on trouve que $17/12 = 1,41666\ldots$ Ainsi, l'approximation de $\sqrt{2}$ est plutôt bonne étant donnée la simplicité des calculs : leurs parties décimales ont deux chiffres en commun, autrement dit,

$$\left| \sqrt{2} - \frac{17}{12} \right| < 10^{-2}.$$