Devoir en temps libre 8

À rendre pour le vendredi 27 janvier 2023

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est proscrit lors des devoirs sur table, il est donc fortement recommandé de s'habituer dès maintenant à ces nouvelles exigences.

Pour les devoirs maison, il est possible de travailler à plusieurs pour réfléchir aux exercices, de se faire aider (après avoir essayé) ou de poser des questions au professeur. Par contre, il est indispensable que la rédaction des exercices soit personnelle.

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2\ln x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2-2x+x\cos(x) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cos(x)}{x+\sin(x)}.$$

Exercice 2. Calcul des valeurs approchées des racines du polynôme $P = X^3 - 6X^2 + 3X + 1$.

1. a. Définir une fonction `Python` qui pour un réel x donné, renvoie $P(x)$.
   b. Poser la division euclidienne de P par P'.
   c. Dresser le tableau de variation de $x \mapsto P(x)$.
   La question précédente est utile pour déterminer le signe de P là où sa dérivée s'annule.
   d. Montrer que P admet trois racines réelles que l'on notera α, β et γ, avec $\alpha < \beta < \gamma$.
2. a. Montrer que $0 < \beta < 1$.
   b. En appliquant la méthode de la dichotomie, calculer un encadrement à $\frac{1}{4}$ près de β.
   Les étapes du calcul doivent apparaître sur la copie.
   c. Écrire une fonction `Python` dépendant de ε qui renvoie une valeur approchée à ε près de β à l'aide de la dichotomie.
   Remarque. Par exemple, on peut demander à la fonction de renvoyer la borne supérieure de l'intervalle obtenu, ce qui donnerait `0.8152084350585938` pour $\varepsilon = 10^{-5}$.
3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 3u_{n+1} - u_n$.
   On pose de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   a. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
   b. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$, puis que u_n est le coefficient en position $3,1$ de A^n.
   c. Vérifier que $A^2 = \begin{pmatrix} 33 & -19 & -6 \\ 6 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer A^3, puis montrer que P est un polynôme annulateur de A, c'est à dire que $P(A) = A^3 - 6A^2 + 3A + I_3 = \mathbb{O}_3$.
   d. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $R_n \in \mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne de X^n par P. Montrer que R_n est de la forme $a_nX^2 + b_nX + c_n$ où $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ est la solution d'un système linéaire à préciser (mais que l'on ne cherchera pas à résoudre).
   e. Montrer que $A^n = a_nA^2 + b_nA + c_nI_3$, puis que $u_n = a_n$.
   En résolvant le système de la question précédente, on admet que l'on obtient :
   $$a_n = \frac{\gamma^n(\beta-\alpha) + \beta^n(\alpha-\gamma) + \alpha^n(\gamma-\beta)}{(\beta-\alpha)\gamma^2 + (\alpha-\gamma)\beta^2 + (\gamma-\beta)\alpha^2}.$$
   f. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \gamma$.
   g. Compléter le programme `Python` suivant qui calcule les termes de (u_n) jusqu'à $n = 20$ et affiche $\frac{u_{20}}{u_{19}}$.
   ```
   U=[0,0,1]
   for k in range(2,20):
       U.append(......)
   print(U[20]/U[19])
   ```
   Remarque. On obtient le résultat suivant : `5.41147....`
4. a. Donner la forme factorisée de P en fonction de α, β et γ puis justifier que $\alpha + \beta + \gamma = 6$.
   b. En déduire une valeur approchée de α à 10^{-5} près.