Devoir en temps libre 8 : correction

Exercice 1.

1. a.
```
def P(x):
    return x**3-6*x**2+3*x+1
```
   b. $P' = 3X^2 - 12X + 3$. En posant la division de P par P' on obtient un reste $\boxed{R = -6X + 3}$ et un quotient $\boxed{Q = \frac{1}{3}X - \frac{2}{3}.}$

   c. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3x^2 - 12x + 3 = 3(x^2 - 4x + 1)$. Pour déterminer le signe de P', on calcule ses racines à l'aide du discriminant ($\Delta = 4^2 - 4 = 12$) : f' admet deux racines réelles

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

   La fonction P' est positive en dehors de ses racines (car son coefficient dominant est positif) et négative entre ses racines, on en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$P(x_1)$	$\searrow$	$P(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

   Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ s'obtiennent avec $f(x) = x^3(1 + \cdots)$ où les termes $\cdots$ tendent vers 0 en $\pm\infty$.
   De plus $P(x_1) = Q(x_1)P'(x_1) + R(x_1) = R(x_1)$ car x_1 est une racine de P', et de même pour x_2.
   On obtient ainsi $P(x_1) = 6\sqrt{3} - 9 = \sqrt{108} - \sqrt{81} > 0$ et $P(x_2) = -6\sqrt{3} - 9 < 0$.

   d. D'après les questions précédentes, la fonction P est <u>strictement croissante</u> et <u>continue</u> sur $]-\infty, x_1[$, donc elle réalise une <u>bijection</u> de $]-\infty, x_1[$ vers l'intervalle $]-\infty, 6\sqrt{3} - 9[$.
   Comme $0 \in]-\infty, 6\sqrt{3} - 9[$ (car $6\sqrt{3} = \sqrt{108} > \sqrt{81} = 9$), <u>il existe un unique antécédent de 0 par P dans l'intervalle $]-\infty, x_1[$</u> que l'on note α. On a $P(\alpha) = 0$, c'est à dire α est une racine de P.
   On fait le même raisonnement sur les deux autres intervalles pour montrer que P admet une racine $\beta \in]x_1, x_2[$ et une racine $\gamma \in]x_2, +\infty[$.

2. a. Comme P tend vers $-\infty$ en $infty$ et $P(0) = 1 > 0$, P admet au moins une racine strictement négative d'après le TVI, donc $\alpha < 0$. Comme $P(0) = 1 > 0$ et $P(1) = -1 < 0$, et d'après le TVI, P admet une racine entre 0 et 1 qui ne peut être que β, puisque γ n'est pas dans l'intervalle $]0, 1[$ (car $\gamma > x_2 > 1$).

   b. On part de l'encadrement donné à la question précédente. On pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, et on a $f(a_0) > 0$ et $f(b_0) < 0$. On calcule l'image par f du milieu de l'intervalle (pour avoir son signe) afin d'affiner l'encadrement :
   — $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8} > 0$. On pose donc $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{1}{2}$ et $b_1 = b_0 = 1$.
   — $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{19}{64} > 0$. On pose donc $a_2 = \frac{3}{4}$ et $b_2 = b_1 = 1$.

   On a $b_2 - a_2 = \frac{1}{4}$, donc on a atteint la précision souhaitée avec l'encadrement $\boxed{\frac{3}{4} < \beta < 1}$.

   c. La fonction P a été définie pour `Python` à la question 1, on peut donc l'utiliser dans le code.

```
def dicho(epsilon):
    a=0;b=1
    while b-a > epsilon:
        c=(b+a)/2
        if P(a)*P(c)>0:
            a=c
        else:
            b=c
    return b
```

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u_{n+2} - 3u_{n+1} - u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = AX_n \quad \text{avec } \boxed{A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

b. ... par récurrence $X_n = A^n X_0$. Ensuite, comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le produit $A^n X_0$ est la première colonne de A^n, et le coefficient de la troisième ligne de X_n, qui est donc la première colonne de A^n est u_n.

c. On effectue les calculs matriciels $A^2 = A \times A$ et $A^3 = A^2 \times A$ ce qui donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 33 & -19 & -6 \\ 6 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 179 & -105 & -33 \\ 33 & -19 & -6 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad P(A) = A^3 - 6.A^2 + 3.A + I_3 = \mathbb{O}_3$$

d. Notons R_n le reste de la division euclidienne de X^n par P. On a $\deg(R_n) < \deg(P) = 3$, donc R_n est de degré au plus 2, c'est à dire qu'il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$.
En notant Q le reste de cette division euclidienne puis en évaluant l'égalité entre polynômes $X^n = PQ + R_n$ en α, β et γ, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha^2 a_n + \alpha b_n + c_n = \alpha^n \\ \beta^2 a_n + \beta b_n + c_n = \beta^n \\ \gamma^2 a_n + \gamma b_n + c_n = \gamma^n \end{cases}$$

e. Maintenant, comme $\underline{P \text{ est un polynôme annulateur de } A}$, en évaluant l'égalité polynomiale $X^n = PQ + R_n$ en $X = A$, on obtient

$$A^n = \underbrace{P(A)}_{=\mathbb{O}_3} Q(A) + R_n(A) = R_n(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3.$$

Les coefficients de la 3ième ligne 1ère colonne de A et I_3 sont nuls, donc $A^n = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ a_n & * & * \end{pmatrix}$ et ainsi $u_n = a_n$.

f. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\gamma^{n+1}(\beta - \alpha) + \beta^{n+1}(\alpha - \gamma) + \alpha^{n+1}(\gamma - \beta)}{\gamma^n(\beta - \alpha) + \beta^n(\alpha - \gamma) + \alpha^n(\gamma - \beta)} = \frac{\gamma(\beta - \alpha) + \beta\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^n(\alpha - \gamma) + \alpha\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^n(\gamma - \beta)}{(\beta - \alpha) + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^n(\alpha - \gamma) + \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^n(\gamma - \beta)},$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{\alpha}{\gamma}\right| < 1$ et $\left|\frac{\beta}{\gamma}\right| < 1$. Ainsi, par opération sur les limites, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\gamma(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = \gamma.$$

g.
```
U=[0,0,1]
for k in range(2,20):
    U.append(6*U[k]-3*U[k-1]-U[k-2])
print(U[20]/U[19])
```

4. Le polynôme P est unitaire de degré 3, et on a justifié à la question 1 qu'il admet trois racines réelles distinctes $\alpha < \beta < \gamma$. Ces racines sont de multiplicité 1 (car la somme des multiplicités de ne doit pas dépasser 3), et on en déduit donc la forme factorisée suivante :

$$\boxed{P = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma).}$$

En redéveloppant, on obtient $P = X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma$, puis en identifiant les coefficients devant X^2 avec la définition de P, on obtient $\alpha + \beta + \gamma = 6$.

Remarque. D'une manière général, lorsqu'on écrit la forme factorisée d'un polynôme à l'aide de ses racines (et de leur multiplicité) et que l'on développe, on obtient des relations entre les coefficients du polynômes et les racines du polynômes. Par exemple, le terme constant d'un polynôme est, au signe près, le produit de toutes ses racines.

5. On a donc

$$\alpha = 6 - \beta - \gamma \approx 6 - 0,81521 - 5,41147 = 6 - 6,22668 \boxed{= -0,22668.}$$