Devoir en temps libre 10 : Espaces vectoriels

À rendre pour le 4 avril

La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel, et soit F_1, F_2 des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Fournir un contre-exemple dans le cas de la réunion de sous-espaces vectoriels : donner un espace vectoriel E et des sous-espaces vectoriels F_1, F_2 tels que $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. *Indication : on pourra trouver des contre-exemples dans $E = \mathbb{R}^2$.*

Exercice 2. Soient E, F, G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ des applications linéaires.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
3. En déduire que
   a. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,
   b. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
4. On considère maintenant les applications f et g, définies sur l'ensemble des suites à valeurs réelles de la manière suivante : si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors

$$(f(u))_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ u_{n-1} & \text{si } n \geqslant 1, \end{cases} \qquad (g(u))_n = u_{n+1}.$$

   Montrer que $g \circ f$ est bijective.
5. En déduire une réponse à la question : si $g \circ f$ est bijective, peut-on dire que f l'est aussi ?

Exercice 3. Dans cet exercice, E désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $T > 0$, et soit $F_T \subset E$ l'ensemble des fonctions T-périodiques. Montrer que F_T est un sous-espace vectoriel de E.
2. Considérons la fonction $f : x \mapsto \sin(x) + \sin(\pi x)$, et supposons qu'il existe $T > 0$ tel que f soit T-périodique.
   a. Justifier que f' est T-périodique, puis que f'' l'est aussi.
   b. En déduire que
$$\begin{cases} \sin(T) + \sin(\pi T) = 0, \\ \sin(T) + \pi^2 \sin(\pi T) = 0. \end{cases}$$
   c. Résoudre le système de la question b., et en déduire une absurdité. *Indication : π n'est pas rationnel.*
   d. Est-ce que l'ensemble des fonctions $f \in E$ périodiques est un sous-espace vectoriel ?