Corrigé du devoir en temps libre 10

Exercice 1. 1. On vérifie que $F_1 \cap F_2$ satisfait aux trois axiomes des sous-espaces vectoriels :
- il est clair que $F_1 \cap F_2 \subset E$, puisque F_1 et F_2 sont des sous-ensembles de E :
- par ailleurs, par définition des sous-espaces vectoriels, O_E est un élément de F_1 et F_2, donc dans leur intersection ;
- finalement, soient $x, y \in F_1 \cup F_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda x + y \in F_1$ puisque $x, y \in F_1$, et F_1 est stable par combinaisons linéaires. Par le même argument, $\lambda x + y \in F_2$, et donc $\lambda x + y \in F_1 \cup F_2$.

On en conclut que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Dans $\mathbb{R}$, on a vu que les seuls sous-espaces vectoriels sont $\{O\}$ et $\mathbb{R}$, donc on ne peut pas y construire de contre-exemple. On se place donc dans $E = \mathbb{R}^2$, et on choisit $F_1 = \mathrm{Vect}((1,0))$ et $F_2 = \mathrm{Vect}((0,1))$. Géométriquement, en assimilant $\mathbb{R}^2$ au plan, F_1 est l'axe des abscisses, et F_2 est l'axe des ordonnées. Il est alors clair que $F_1 \cup F_2$ n'est pas un espace vectoriel : le point $(1,1)$ n'appartient ni à F_1, ni à F_2, mais est une combinaison linéaire d'éléments de $F_1 \cup F_2$: $(1,1) = (1,0) + (0,1)$.

Exercice 2. 1. Soit $v \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $(g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(0_F) = 0_G$, et donc $v \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$. On donc montré que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

2. Soit $v \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Par définition, il existe $u \in E$ tel que $(g \circ f)(u) = v$. Mais alors $f(u)$ est un antécédent de v par la fonction g : ainsi, $v \in \mathrm{Im}(g)$, et donc $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

3. a. Si $g \circ f$ est injective, alors $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \{0_E\}$. D'après la question précédente, $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f) = \{0_E\}$, et donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, et donc f est injective.
   b. Si $g \circ f$ est surjective, alors $\mathrm{Im}(g \circ f) = G$. À nouveau, on a $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$, donc $\mathrm{Im}(g) = G$ est g est surjective.

4. L'application f décale les termes de la suite dans un sens, et l'application g les décale dans l'autre : $g \circ f$ est l'identité. En effet, si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et si $n \in \mathbb{N}$,

$$(g(f(u)))_n = (f(u))_{n+1} = u_n.$$

Ainsi, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ est bien bijective.
Remarque : $f \circ g$ n'est pas l'identité (et n'est même pas bijective), car on a toujours $(f(g(u)))_0 = 0$.

5. Dans l'exemple étudié dans la question précédente, $g \circ f$ est bijective, mais l'application f elle même n'est pas surjective, puisque toute suite dont le premier terme n'est pas nul n'admet pas d'antécédent par f. En règle générale, on ne peut donc pas dire plus que $g \circ f$ est bijective $\implies$ f est injective.

Exercice 3. 1. — C'est une évidente que l'ensemble des fonctions T-périodiques est inclus dans l'ensemble des fonctions, $F_T \subset E$.
- La fonction identiquement nulle est T-périodique, $O_E \in F_T$.
- Soient $f, g \in F_T$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda f + g$ est elle aussi T-périodique : en effet, si $x \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda f + g)(x+T) = \lambda f(x+T) + g(x+T) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x).$$

On en conclut que F_T est un sous-espace vectoriel de E.

2. a. Comme on a supposé que f est T-périodique, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+T) = f(x).$$

Notons g la fonction qui à x associe $f(x+T)$. La périodicité de f assure donc que $f = g$. Par ailleurs, f est de classe $\mathcal{C}^2$, et donc par dérivation, on obtient que $f'' = g''$. Or, si $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x+T)$, et $g''(x) = f''(x+T)$. On a bien montré que f'' est T-périodique.
   b. Comme f et ses dérivées sont T-périodique, on a

$$\begin{cases} f(T) = f(0) \\ f''(T) = f''(0) \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(T) + \sin(\pi T) = 0 \\ \sin(T) + \pi^2 \sin(\pi T) = 0. \end{cases}$$

   c. La matrice des coefficients du système linéaire précédent, d'inconnues $\sin(T)$ et $\sin(\pi T)$, est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \pi^2 \end{pmatrix}$. C'est une matrice inversible, car son déterminant $\pi^2 - 1$ est non nul. On en déduit que nécessairement, $\sin(T) = \sin(\pi T) = 0$. Cela implique qu'il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que

$$T = k\pi \quad \text{et} \quad \pi T = k'\pi$$

Comme on a supposé que $T > 0$, $k > 0$, et en substituant T dans les équations précédentes, on obtient $\pi = k'/k$, ce qui est exclu.

d. La fonction f est la somme de deux fonctions périodiques ($x \mapsto \sin(x)$, de période 2π, et $x \mapsto \sin(\pi x)$, de période 2), mais on a montré que f n'est pas une fonction périodique. Ainsi, l'ensemble des fonctions périodiques n'est pas stable par combinaison linéaire, et n'est pas conséquent pas un sous-espace vectoriel de E.