Devoir en temps libre 11 : Espaces vectoriels II

À rendre pour le 28 avril.

La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.

Exercice 1. Soit n un entier non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce équilibrée.

1. Décrire clairement l'espace probabilisé qui modélise cette expérience.
2. Quelle est la probabilité qu'au cours des n lancers, « face »ne soit jamais suivi de « pile » ?
3. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2 (Suite des noyaux itérés)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \operatorname{Ker}(f^k)$, où $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = id_E$.

1. Étude d'un exemple. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère l'endormorphisme défini par
$$f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = e_2 + e_3, \quad f(e_3) = e_1.$$
   a. Soit $v \in \mathbb{R}^3$. On note ses coordonnées (dans la base $\mathcal{B}$) (x, y, z). Donner les coordonnées de $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}$.
   b. Déterminer le noyau de f, ainsi que son image (donner une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels).
   c. Faire de même avec f^2 : déterminer son noyau N_2 et son image.
   d. Calculer $f^3(v)$. Que remarque-t-on ? Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, on a $N_k = N_2$.
2. On retourne dans le cas général, où f est simplement supposé non nul.
   a. Que vaut N_0 ?
   b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$.

   On suppose à partir de maintenant qu'il existe un entier naturel $p \in \mathbb{N}$ tel que $N_p = N_{p+1}$.

   c. Soit $x \in N_{p+2}$. Montrer que $f(x) \in N_{p+1} = N_p$, et en déduire que $N_{p+1} = N_{p+2}$.
   d. En conclure, que pour tout $k \geqslant p$, $N_k = N_p$.
3. On suppose maintenant que E est de dimension finie égale à n, et on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n_k = \dim(N_k)$.
   a. Montrer que (n_k) est une suite croissante d'entiers.
   b. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} k < p & \implies N_k \neq N_{k+1} \\ k \geqslant p & \implies N_k = N_p. \end{cases}$$
   Indication : raisonner avec les dimensions des N_k : que peut-on dire si $n_k = n_{k+1}$? Et dans le cas contraire ?
   c. Montrer que $p \leqslant n$.
4. Application à la nilpotence : on dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On définit alors son *indice de nilpotence*, noté p, par le plus petit tel entier k vérifiant $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. En d'autres termes, p est l'unique entier tel que
$$f^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$
   Montrer que $p \leqslant n$.
5. Dans cette question, on se place dans l'espace des suites à valeurs réelles, $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, qui n'est pas un espace vectoriel de dimension finie. On définit l'application de shift à gauche par
$$g : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_0, u_1, u_2, \dots) & \mapsto (u_1, u_2, u_3, \dots). \end{array}$$
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer N_k, et montrer que $N_k \neq N_{k+1}$.