Corrigé du devoir en temps libre 11

Exercice 1. 1. L'univers de l'expérience aléatoire est l'ensemble des n-uplets de $\{\text{pile}, \text{face}\}$. Autrement dit, l'univers est $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}^n$. Comme la pièce est équilibrée, et les lancers sont indépendants, la probabilité de chaque évènement élémentaire est égale à $(1/2)^n$, et on munit donc l'univers Ω de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. L'espace probabilisé est $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

2. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note F_i l'évènement : « le i^{e} lancer donne "face" ». L'évènement B : « "face" n'est jamais suivi de "pile" » est donc la réunion des évènements

$$\begin{aligned}
A_0 &= F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \dots F_n \\
A_1 &= \overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3 \cap \dots F_n \\
A_2 &= \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap \dots F_n \\
&\vdots \\
A_n &= \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3} \cap \dots \overline{F_n}
\end{aligned}$$

Les évènements A_i pour $i \in [\![0, n]\!]$ sont deux à deux incompatibles, donc la probabilité de B est égale à la somme des probabilités des A_i. Ainsi, come les A_i sont des évènements élémentaires,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{n} A_i = \frac{n+1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{n+1}{2^n}$$

3. Par croissances comparées, on a : $\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2^n} = 0$: l'évènement B devient moins probable plus le nombre de lancers augmente, ce qui semble naturel.

Exercice 2. 1. a. Si $v = ae_1 + be_2 + ce_3$, alors

$$\begin{aligned}
f(v) &= af(e_1) + bf(e_2) + cf(e_3) \\
&= b(e_2 + e_3) + c(e_1) = ce_1 + be_2 + be_3,
\end{aligned}$$

donc dans la base $\mathcal{B}$, les coordonnées de $f(v)$ sont (c, b, b).

b. On raisonne dans la base $\mathcal{B}$: d'après la question précédente, $v = (a, b, c) \in \text{Ker}(f) \iff b = c = 0$, donc $\text{Ker}(f) = \{(a, 0, 0), a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(e_1)$. De plus, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}(e_1, e_2 + e_3)$, et la famille $(e_1, e_2 + e_3)$ est clairement libre, c'est donc une base de $\text{Im}(f)$.

c. On calcule l'image par f^2 des vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$f^2(e_1) = 0, \quad f^2(e_2) = f(e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3, \quad f^2(e_3) = f(e_1) = 0.$$

Ainsi, dans la base $\mathcal{B}$, $f^2(a, b, c) = (b, b, b)$. On en déduit que

$$\text{Ker}(f^2) = \text{Vect}(e_1, e_3), \quad \text{Im}(f^2) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3).$$

d. On recommence avec f^3 :

$$f^3(e_1) = 0, \quad f^3(e_2) = f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3, \quad f^3(e_3) = 0,$$

et on s'aperçoit que f^3 et f^2 coïncident sur la base $\mathcal{B}$. Cela implique que $f^3(v) = f^2(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$. On montre alors par une récurrence que pour tout $k \geqslant 2$, $f^k = f^2$: c'est vrai pour $k = 2$ et pour $k = 3$. Supposons que $f^k = f^2$ pour un certain $k \geqslant 3$. Alors

$$f^{k+1} = f \circ f^k = f \circ f^2 = f^3 = f^2.$$

Cela implique en particulier que pour tout $k \geqslant 2$, $N_k = \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^2) = N_2$.

2. a. $N_0 = \text{Ker}(id_E) = \{0_E\}$.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$, et soit $x \in N_k$. Par définition, $f^k(x) = 0$, et donc $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = 0$, donc $x \in N_{k+1}$. On a donc montré que $N_k \subset N_{k+1}$.

c. On suppose que $N_p = N_{p+1}$. Soit $x \in N_{p+2}$. Alors, par définition, $0 = f^{p+2}(x) = f^{p+1}(f(x))$, et donc $f(x) \in N_{p+1}$. Or, $N_p = N_{p+1}$, donc $f(x) \in N_p$, et donc $f^p(f(x)) = f^{p+1}(x) = 0$. On a ainsi montré que si $N_{p+2} \subset N_{p+1}$. Mais d'après la question b., la suite (N_k) est croissante : en particulier, $N_{p+1} \subset N_{p+2}$, d'où l'égalité entre N_{p+1} et N_{p+2}.

d. Le résultat se démontre maintenant par récurrence : on a démontré dans la question précédente que si $N_p = N_{p+1}$, alors $N_{p+1} = N_{p+2}$. Cette propriété se propage donc à tous les entiers plus grands que p, c'est-à-dire que pour tout $k \geqslant p$, $N_{k+1} = N_k$, donc $N_k = N_p$.

3. a. Puisque E est de dimension finie, les N_k sont eux aussi de dimension finie. Comme de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $N_k \subset N_{k+1}$, on en déduit que $\dim(N_k) \leqslant \dim(N_{k+1})$, et que donc $n_k \leqslant n_{k+1}$. La suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b. La suite (n_k) est une suite croissante d'entiers, et elle est majorée par n, la dimension de E. Elle ne peut pas être strictement croissante : il existe donc forcément $k \in \mathbb{N}$ tel que $n_k = n_{k+1}$. On note p le plus petit tel entier k, c'est-à-dire que c'est l'unique entier qui vérifie

$$\begin{cases} k < p \implies n_k < n_{k+1} \\ n_p = n_{p+1}. \end{cases}$$

Si $k < p$, alors $n_k \neq n_{k+1}$ implique que $N_k \neq N_{k+1}$. En outre, on a $N_p \subset N_{p+1}$, et $\dim(N_p) = \dim(N_{p+1})$, et donc $N_p = N_{p+1}$. D'après la question 2.d, on en déduit que pour tout $k \geqslant p$, $N_k = N_p$. En résummé, l'entier p vérifie :

$$\begin{cases} k < p \implies N_k \neq N_{k+1} \\ k \geqslant p \implies N_k = N_p. \end{cases}$$

c. On a montré que (n_k) est une suite strictement croissante pour $k \in [\![0, p]\!]$. Comme $n_0 \geqslant 0$, et comme pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $n_{k+1} \geqslant n_k$, on peut montrer que $n_k \geqslant k$ pour tout $k \in [\![0, p]\!]$. En particulier, $n_p \geqslant p$. Or, on sait aussi que la suite (n_k) est majorée par n, et donc $p \leqslant n_p \leqslant n$, donc $p \leqslant n$.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application nilpotente, et soit p sont indice de nilpotence. En reprenant les notations des questions précédentes, on a $N_p = E$, et $N_{p-1} \neq E$. Cela implique notamment que pour tout $k \geqslant p$, $N_k = N_p$, donc l'entier p est le même que celui défini dans la question 3.b, et en particulier, $p \leqslant n$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. l'application g^k est donnée par

$$g^k((u_0, u_1, u_2, \dots)) = (u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots),$$

donc son noyau est

$$N_k = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid n \geqslant k \implies u_n = 0\},$$

c'est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $k-1$, $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. En particulier, on a toujours que $N_k \subset N_{k+1}$, mais pour tout $k \in \mathbb{N}$, cette inclusion est stricte : $N_k \neq N_{k+1}$.