Devoir surveillé du 23/09/2022 : réels, suites, récurrence et sommes finies

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.

La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.

Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.

Ce sujet contient ***1 page****.*

On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que pour a et b des réels strictement positifs, on a $\dfrac{ab}{a+b} \leqslant \dfrac{a+b}{4}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

   Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
3. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_1) :\ x^2 + |x| \leqslant 6 \qquad \text{et} \qquad (E_2) :\ \frac{3x+1}{x^2+1} \leqslant 2.$$

4. Montrer que pour k et n des entiers naturels, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite réelle définie par $u_1 = 2$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)u_n - n - 1$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n > n$.
3. En déduire que (u_n) est strictement croissante.
4. On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.
   a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique, puis calculer son terme général.
   b. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n.

Exercice 3. Calculs de sommes

1. En appliquant directement les formules du cours, donner les sommes suivantes (pour $n \in \mathbb{N}^*$) :

   a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \pi^k$ c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 2^k 7^{2n-k}$

2. Calculer les sommes suivantes (pour $n \in \mathbb{N}^*$) en détaillant les étapes :

   a. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+3} \ln\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)$ b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1+3^k}{2^{k+1}}$ c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \mathrm{e}^k$

3. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} > \frac{3}{5}$.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant 2n!$.