# Corrigé du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1

**Exercice 1.** 1. Soient $a$ et $b$ des réels strictement positifs. On a :

$$0 \leqslant (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a+b)^2 - 4ab,$$

donc $4ab \leqslant (a+b)^2$ et en divisant à gauche et à droite par $4(a+b)$ qui est strictement positif, on obtient

$$\boxed{\frac{ab}{a+b} \leqslant \frac{a+b}{4}.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n$ la proposition "$u_n = \frac{n}{n+1}$". On va démontrer par récurrence que $P_n$ est vraie pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.
   - *Initialisation.* Pour $n = 0$, $u_0 = 0 = \frac{0}{0+1}$ donc $\underline{P_0 \text{ est vérifiée}}$.
   - *Hérédité.* $\underline{\text{Supposons } P_n \text{ vraie}}$ pour un certain entier naturel $n$. Alors

   $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{(HR)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

   et la propriété $\underline{P_{n+1} \text{ est donc vérifiée}}$.

   Par récurrence, on a donc montré que $\boxed{\text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ u_n = \frac{n}{n+1}}$.

3. 
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède par disjonction de cas :
     - ◇ $\underline{\text{si } x \text{ est positif}}$, $(E_1) \iff x^2 + x \leqslant 6 \iff x^2 + x - 6 \leqslant 0$. Ce polynôme a pour racines évidentes $2$ et $-3$ et comme le coefficient devant son terme de plus haut degré est positif, il est négatif exactement entre ses racines. L'ensemble de solutions de $(E_1)$ vérifiant $x \geqslant 0$ est donc $[0, 2]$.
     - ◇ $\underline{\text{si } x \text{ est négatif}}$, $(E_1) \iff x^2 - x \leqslant 6 \iff x^2 - x - 6 \leqslant 0$. Ce polynôme a pour racines évidentes $-2$ et $3$ et comme le coefficient devant son terme de plus haut degré est positif, il est négatif exactement entre ses racines. L'ensemble de solutions de $(E_1)$ vérifiant $x \leqslant 0$ est donc $[-2, 0]$.

     En rassemblant les deux cas qui recouvrent bien tout $\mathbb{R}$, on obtient que $(E_1)$ est vérifiée si et seulement si $\boxed{x \in [-2, 2]}$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. On observe que le quotient est toujours défini puisque $x^2 + 1 > 0$. On se ramène à une étude de signes :

     $$(E_2) \iff \frac{3x+1}{x^2+1} - 2 \leqslant 0 \iff \frac{3x + 1 - 2(x^2+1)}{x^2+1} \leqslant 0.$$

     Comme le dénominateur est strictement positif, cela revient à étudier le signe du polynôme du second degré au numérateur, $3x + 1 - 2(x^2 + 1) = -2x^2 + 3x - 1$. Une racine évidente est 1, qu'on peut donc mettre en facteur afin d'obtenir la deuxième racine : $-2x^2 + 3x - 1 = -2(x-1)(x - \frac{1}{2})$. Comme le coefficient devant le terme de plus haut degré est négatif, le polynôme est strictement positif exactement entre ses racines (non comprises), c'est-à-dire sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$. On en déduit que les solutions de l'inéquation de départ sont exactement $\mathbb{R} \setminus \left]\frac{1}{2}, 1\right[ = \boxed{\left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[}$.

4. Soient $k$ et $n$ des entiers naturels.
   Si $k$ et $n$ sont plus grands que 1 avec $k \leqslant n$, on écrit les coefficient binomiaux à l'aide des factorielles :

   $$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \cancel{k}\frac{(n-1)! \times n}{(k-1)! \times \cancel{k}(n-k+1-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

   Si $k$ et $n$ sont tels que $k > n$, alors on a aussi $k - 1 > n - 1$ et les deux coefficients binomiaux considérés sont nuls.
   Si $n = 0$, l'égalité est vraie pour tout $k$ puisqu'à gauche on a soit $k = 0$, soit $k > n$ et le coefficient binomial est alors nul.
   Si $k = 0$, l'égalité est vraie puisque par convention $\binom{p}{-1} = 0$ pour tout entier $p$.
   On a donc montré l'équation pour tout couple d'entiers naturels $(k, n)$.

**Exercice 2.** 1. On a $u_2 = 2(1+\frac{1}{1})u_1 - 2 \boxed{= 6}$ et $u_3 = 2(1+\frac{1}{2})u_2 - 3 \boxed{= 15}$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $P_n$ la proposition « $u_n > n$ ».
   - *Initialisation.* Comme $u_1 = 2 > 1$, $P_1$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $n \geqslant 1$ et supposons $P_n$ vraie.
     Alors,
     $$u_{n+1} = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\underbrace{u_n}_{\substack{> n \\ (HR)}} - n - 1 \underset{(\star)}{>} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)n - n - 1 = 2(n+1) - n - 1 = n+1,$$
     l'inégalité $(\star)$ étant vérifiée car le facteur $2\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est strictement positif. On a donc montré que $P_{n+1}$ est vraie.

   Par récurrence, on a donc montré que $\boxed{u_n > n \text{ pour tout } n \geqslant 1.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_{n+1} - u_n = \left(2+\frac{2}{n}\right)u_n - n - 1 - u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)\underbrace{u_n}_{>n} - n - 1 > \left(1+\frac{2}{n}\right)n - n - 1 = 1 > 0.$$
   Donc $(u_n)$ est strictement croissante.

4. a. Pour tout $n \geqslant 1$,
   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{2(1+\frac{1}{n})u_n - n - 1}{n+1} = \frac{2(n+1)\frac{u_n}{n} - (n+1)}{n+1} = 2\frac{u_n}{n} - 1 = \boxed{2v_n - 1}$$
   donc $(v_n)$ est arithmético-géométrique. On procède selon la méthode du cours :
   - On commence par résoudre l'équation $\ell = 2\ell - 1$ ; la seule solution est $\ell = 1$.
   - On pose $w_n = v_n - 1$ et on observe que $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison 2.
   - Le terme général est alors donné pour tout $n \geqslant 1$ par la formule
   $$w_n = w_1 2^{n-1} = (v_1 - 1)2^{n-1} = \left(\frac{u_1}{1} - 1\right)2^{n-1} = 2^{n-1}.$$
   On revient enfin à $(v_n)$ pour obtenir $\boxed{v_n = 2^{n-1} + 1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

   b. Finalement, pour tout $n \geqslant 1$, $\boxed{u_n = nv_n = n(2^{n-1}+1).}$

**Exercice 3.** 1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En application directe du cours, on a

   a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$.

   b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \pi^k = \boxed{\pi\frac{1-\pi^n}{1-\pi}}$ comme $\pi \neq 1$.

   c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 2^k 7^{2n-k} = (2+7)^{2n} = 9^{2n} = \boxed{81^n}$ (binôme de Newton à l'ordre $2n$, avec $x = 2$ et $y = 7$).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On travaille un peu plus :

   a. On fait apparaître une somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+3} \ln\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right) = \sum_{k=2}^{n+3} \ln(\sqrt{k}) - \ln(\sqrt{k+1}) = \boxed{\ln\sqrt{2} - \ln(\sqrt{n+4})}$.

   *Remarque :* on pouvait aussi observer grâce au cours que
   $$\sum_{k=2}^{n+3} \ln\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right) = \ln\left(\prod_{k=2}^{n+3}\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{2}{n+4}}\right).$$
   en faisant apparaître un produit télescopique.

b. On découpe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1+3^k}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{2^{k+1}}$ par linéarité. Or pour tout $k$ entier, $\frac{3^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k$.
On sort le facteur $\frac{1}{2}$ de chaque somme et on écrit deux fois la somme d'une suite géométrique, de raison $\neq 1$ :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1+3^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1-(\frac{3}{2})^n}{1-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right).$$

Et en réorganisant encore un peu on obtient $\sum_{k=1}^{n} \frac{1+3^k}{2^{k+1}} = \boxed{-1 + \frac{3^{n+1}-1}{2^{n+1}}}$.

c. On procède en plusieurs étapes : d'abord un changement de variable de type glissement, en notant $i = k+1$, puis on sort un facteur $\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et on fait apparaître la formule du binôme de Newton en ajoutant et ôtant le premier terme de la somme, et enfin on applique cette formule. Le tout donne :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}\mathrm{e}^k = \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathrm{e}^{i-1} = \mathrm{e}^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\mathrm{e}^i - \binom{n+1}{0}\mathrm{e}^0\right) = \boxed{\frac{1}{\mathrm{e}}\left((1+\mathrm{e})^{n+1}-1\right)}.$$

3. Pour tout $n \geqslant 3$, on note $P_n$ la proposition $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} > \frac{3}{5}$. Démontrons par récurrence que $P_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 3$.

- *Initialisation.* Pour $n = 3$, $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k+3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{15+12+10}{60} = \frac{37}{60} > \frac{3}{5} = \frac{36}{60}$, donc $P_3$ est vérifiée.
- *Hérédité.* Supposons $P_n$ vraie pour un certain entier naturel $n \geqslant 3$. Pour montrer que $P_{n+1}$ est vraie, on va faire un changement d'indice $i = k+1$, mettre de côté les termes d'indice $i = n+1$ et $i = n+2$ et ajouter artificiellement le terme en $i = 1$ pour se ramener à la somme concernée par $P_n$, puis appliquer notre hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} = \sum_{i=2}^{n+2} \frac{1}{i+n} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{1+n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n}.$$

Or, $\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{n+1-\frac{1}{2}(2n+1)}{(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \geqslant 0$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} \underset{(HR)}{>} \frac{3}{5}.$$

On a donc montré que la propriété $P_{n+1}$ est vérifiée.

Par récurrence, on a donc montré que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 3, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} > \frac{3}{5}}$.

4. Pour tout entier naturel $n$, on note $P_n$ la proposition $\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant 2n!$. Notons que $P_0$ est vraie puisque la somme à gauche est nulle (bornes dans le mauvais sens), et $0! = 1$. Démontrons par récurrence que $P_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- *Initialisation.* Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k! = 1! \leqslant 2 \times 1!$ donc $P_1$ est vérifiée.
- *Hérédité.* Supposons $P_n$ vraie pour un certain entier naturel $n \geqslant 1$. On veut montrer $P_{n+1}$. Pour l'instant on a $\sum_{k=1}^{n+1} k! = \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)! \leqslant 2n! + (n+1)! = n!(2+(n+1))$ d'après l'hypothèse de récurrence. Or, pour $n \geqslant 1$, on a $n+3 \leqslant 2(1+n)$ (c'est faux pour $n = 0$, d'où la mise de côté du cas $n = 0$ en début de preuve !). Donc on peut reprendre le calcul :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k! = \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)! \underset{(HR)}{\leqslant} 2n! + (n+1)! = n!(2+(n+1)) \underset{n\geqslant 1}{\leqslant} n!2(n+1) = 2(n+1)!$$

Et on a donc montré que la propriété $\underline{P_{n+1} \text{ est donc vérifiée}}$.

Par récurrence, on a donc montré que pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant 2n!$, et on a démontré l'égalité directement pour $n = 0$. Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \sum_{k=1}^{n} k! \leqslant 2n!}$.

*Autre démonstration,* sans récurrence : si $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k! = n! + \sum_{k=1}^{n-1} k! \leqslant n! + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1)! = n! + (n-1)(n-1)! \leqslant n! + n(n-1)! \leqslant 2n!$$

On a sorti le terme de plus haut indice pour obtenir la première égalité, puis dit que pour chaque $k$ entre 1 et $n-1$, $k! \leqslant (n-1)!$ (car la factorielle est croissante). Ensuite, on a calculé une somme dont le terme général est indépendant de l'indice : la valeur est alors le nombre de termes multiplié par le terme général. Enfin, on a majoré $(n-1)(n-1)!$ par $n(n-1)!$, et identifié une nouvelle factorielle. En vérifiant le cas $n = 0$ à la main comme dans la précéente, on a prouvé ce qu'il fallait démontrer.