Devoir surveillé du 14/10/2022 : raisonnements et étude de fonctions

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.

La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.

Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.

*Ce sujet contient **2 pages**.*

On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1. Les questions de cet exercice, proches du cours, sont indépendantes.

1. Donner les parties réelle, imaginaire, la quantité conjuguée et le module du complexe $z = 3 + i$.
2. Énoncer les formules d'Euler et la formule de Moivre.
3. Linéariser $(\sin(x))^3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout f dans $\mathcal{C}$, on définit les propositions $P(f)$: "f est une fonction impaire" et $Q(f)$: "f s'annule en 0".
   a. Pour f dans $\mathcal{C}$, décrire $P(f)$, $Q(f)$ et leurs négations à l'aide de quantificateurs si nécessaire.
   b. Pour f dans $\mathcal{C}$, donner la réciproque, la négation et la contraposée de l'implication "$P(f) \Longrightarrow Q(f)$".
   c. Démontrer que l'implication "$P(f) \Longrightarrow Q(f)$" est vraie pour tout f dans $\mathcal{C}$.
   d. Écrire une phrase ayant le même sens que cette implication, commençant par "Il est nécessaire que...".
5. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
6. Déterminer le domaine de définition et la dérivée, là où elle est définie, des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x\ln(x^2 + x - 2) \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \sqrt{\exp(2x) - 2}.$$

Exercice 2. On note $E = \mathbb{N}^2$ l'ensemble des couples d'entiers, et on considère les trois parties de E suivantes :

$$A = \left\{(a,b) \in E \mid \exists c \in \mathbb{N}, a^2 + b^2 = c^2\right\}, \qquad B = \left\{(2n, n^2 - 1)\,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad \text{et} \quad C = \left\{(a,b) \in E \mid a \leqslant 9 \text{ et } b \geqslant 13\right\}$$

1. Donner un exemple d'élément de A, de $\overline{A}$, de B, de $\overline{B}$, de C et de $\overline{C}$.
2. Donner un exemple d'élément de $A \cap C$.
3. Démontrer que $B \subset A$. L'inclusion $A \subset B$ est-elle vraie ?
4. En déduire que $(16, 63) \in A$.
5. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k,k) \notin A$.
6. Peut-on tracer un triangle rectangle et isocèle dont les longueurs des trois côtés seraient des entiers ?

Exercice 3. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + x^2 + 2e^x\right)$.

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de f sur son domaine de définition.
3. En étudiant la fonction $g : x \mapsto x + e^x$, justifier que f' s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$.
   On note α l'unique réel tel que $f'(\alpha) = 0$.
4. Montrer que $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$ et que $f(\alpha) = 2\ln(1 - \alpha)$.
5. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites aux bords du domaine.
6. Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
7. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) est une *asymptote oblique* au graphe de f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - ax - b\right) = 0$
   a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$. *Indice : si h est une fonction continue en un réel a, alors $\lim\limits_{t\to 0} h(a+t) = h(a)$.*
   b. En déduire l'équation de l'asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$.
8. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - 2\ln(|x|) = 0$.
9. À l'aide des questions précédentes, tracer l'allure du graphe de f dans un repère orthonormé.
   On pourra utiliser les valeurs approchées $\ln(2) \approx 0.7$ *et* $\ln(3) \approx 1.1$.

Exercice 4. Trouver l'erreur dans les raisonnements suivants.
Attention, le but n'est pas de montrer que la proposition démontrée est fausse, mais bien de pointer l'erreur commise ! La réponse doit être rédigée en maximum deux lignes.

1. « Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$, la propriété $P(n)$: "n points deux à deux distincts quelconques du plan sont toujours alignés".

   Pour $n = 1$ et $n = 2$, la propriété est vraie. Supposons alors la propriété établie à un certain rang $n \geqslant 2$. Considérons $n+1$ points deux à deux distincts $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés sur une droite D. Encore d'après l'hypothèse de récurrence, les points $A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite D'. Or D et D' contiennent les deux points distincts A_2 et A_n, donc $D = D'$. Par conséquent $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur la droite D, et l'hérédité est établie. Par récurrence, on a donc démontré que n points deux à deux distincts quelconques du plan sont toujours alignés, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. »

2. « Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On sait que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   et

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

   Si on rajoute 1 à cette dernière égalité, on obtient :

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 + 1 = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1,$$

   et on en déduit donc que $n(n+1)/2 = (n-1)n/2 + 1$. En simplifiant cette expression, on obtient $n = 1$, et on a donc montré que tout entier naturel est égal à 1. »