Corrigé du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 1. 1. $\text{Re}(z) = 3$, $\text{Im}(z) = 1$, $|z| = \sqrt{10}$ et $\bar{z} = 3 - i$.

2. Voir cours.
3. Voir cours.
4. a. Soit f dans $\mathcal{C}$. La proposition $P(f)$ s'écrit $\underline{\text{"}\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)\text{"}}$, et sa négation : $\underline{\text{"}\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -f(-x)\text{"}}$. La proposition $Q(f)$ s'écrit $\underline{\text{"}f(0) = 0\text{"}}$ et sa négation $\underline{\text{"}f(0) \neq 0\text{"}}$.
   b. Pour f dans $\mathcal{C}$, on considère l'implication "$P(f) \Longrightarrow Q(f)$". La récipoque est "$Q(f) \Longrightarrow P(f)$", autrement dit "si f s'annule en 0, f est impaire". La négation est "$P(f)$ et non($Q(f)$)", autrement dit "f est impaire et ne s'annule pas en 0". La contraposée est "non($Q(f)$) $\Longrightarrow$ non($P(f)$)", autrement dit "si f ne s'annule pas en 0, f n'est pas impaire".
   c. Soit f dans $\mathcal{C}$. Si $P(f)$ est vraie, alors pour tout x dans $\mathbb{R}$ $f(x) = -f(-x)$. En particulier pour $x = 0$ on obtient $f(0) = -f(-0) = f(0)$ donc $f(0) = 0$, autrement dit $Q(f)$ est vraie. On a montré que pour tout f dans $\mathcal{C}$, $P(f) \Longrightarrow Q(f)$.
   d. Cette implication peut se lire "Il est nécessaire que $Q(f)$ soit vraie pour que $P(f)$ soit vraie", autrement dit "Il est nécessaire que f s'annule pour que f soit impaire".
5. Voir cours.
6. $f(x)$ est défini si et seulement si $x^2+x-2 > 0$ (car ln definie sur $\mathbb{R}_+^*$). Avec un tableau de signe de x^2+x-2, on en déduit que $\boxed{f \text{ est définie sur }]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[.}$ Par opération sur les fonctions usuelles, f est dérivable et

$$\forall x \in]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[, \quad f'(x) = 1 \times \ln(x^2+x-2) + x\frac{2x+1}{x^2+x-2} = \boxed{\ln(x^2+x-2) + \frac{x(2x+1)}{x^2+x-2}.}$$

Ensuite, $g(x)$ définie $\Leftrightarrow$ $\mathrm{e}^{2x} - 2 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 2x \geqslant \ln(2) \;\Leftrightarrow\; x \geqslant \frac{\ln(2)}{2}$. Ainsi, $\boxed{g \text{ est définie sur } \left[\frac{\ln(2)}{2}, +\infty\right[.}$
Par opération sur les fonctions usuelles, g est dérivables sur $\left]\frac{\ln(2)}{2}, +\infty\right[$ et

$$\forall x \in \left]\frac{\ln(2)}{2}, +\infty\right[, \quad g'(x) = \frac{2\exp(2x)}{2\sqrt{\exp(2x)-2}} = \boxed{\frac{\exp(2x)}{\sqrt{\exp(2x)-2}}.}$$

Exercice 2.

1. $(3,4) \in A$ car $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$.
   $(1,1) \notin A$, c'est à dire $(1,1) \in \overline{A}$ car $1^2 + 1^2 = 2$ et 2 n'est le carré d'aucun entier.
   $(4,3) \in B$ car pour $n = 2 \in \mathbb{N}^*$, $4 = 2n$ et $3 = n^1 - 1$.
   $(3,4) \in \overline{B}$ car 3 n'est pas pair et donc il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $3 = 2n$.
   $(8,15) \in C$ car $8 \leqslant 9$ et $\geqslant 13$
   $(10,15) \in \overline{C}$ car $10 > 9$
2. Pour $n = 4$, on a $(2n, n^2-1) = (8,15)$, donc $(8,15) \in B \subset A$, et $(8,15) \in C$, et ainsi $\boxed{(8,15) \in A \cap C.}$
3. Soit $(a,b) \in B$.
   On a donc $a = 2n$ et $b = n^2 - 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ (par définition de l'ensemble B) et ainsi,

$$a^2 + b^2 = 4n^2 + (n^2-1)^2 = 4n^2 + n^4 - 2n^2 + 2 = n^4 + 2n^2 + 1 = (n^2+1)^2$$

   c'est à dire $a^2 + b^2 = c^2$ pour $c = n^2 + 1 \in \mathbb{N}$ et donc $(a,b) \in A$.
   On a montré que tout élément de B est élément de A, c'est à dire $\boxed{B \subset A}$.
   Avec les exemples de la question 1, on a $(3,4) \in A$ et $(3,4) \notin B$, ce qui prouve qu'il existe (au moins) un élément de A qui n'est pas dans B, et donc $\boxed{A \not\subset B.}$
4. On remarque que $16 = 2 \times 8$ et $63 = 8^2 - 1$, donc $(16,63) = (2n, n^2-1)$ pour $n = 8$, et ainsi $(16,63) \in B$. Comme $B \subset A$, on en déduit que $\boxed{(16,63) \in A.}$

5. Supposons le contraire de ce que l'on veut montrer, c'est à dire qu'il existe un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(k,k) \in A$. On a alors $k^2 + k^2 = c^2$ pour un certain $c \in \mathbb{N}$ (par définition de A). Cela donne $2k^2 = c^2$, puis comme $k \neq 0$, $2 = (\frac{c}{k})^2$ et finallement, comme tout est positif, $\sqrt{2} = \frac{c}{k}$. Or on sait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, il est donc impossible que $\sqrt{2}$ s'écrive comme une fraction de deux entiers.

   Ainsi, notre supposition initiale est forcément fausse, et donc sa négation est vraie, c'est à dire $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (k,k) \notin A.}$
6. Notons a, b et c les longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle, avec c celle de l'hypothénuse. D'après le théorème de Pythagore, on a donc $a^2 + b^2 = c^2$. Si ce triangle est de plus isocèle, on a $a = b$, et donc $a^2 + a^2 = c^2$. Si toutes les longueurs étaient des entiers, on en déduirait que $(a,a) \in A$, avec $a \in \mathbb{N}^*$, ce qui est impossible d'après la question précédente.

Exercice 3.

1. La fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x^2 + 2e^x > 0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$
2. La fonction f est dérivable par composition et somme de fonctions dérivables, et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x + 2e^x}{1 + x^2 + 2e^x}.$$

3. Commençons par remarquer que $f'(x) = \frac{2}{1+x^2+2e^x} g(x)$ avec $\frac{2}{1+x^2+2e^x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $f'(x)$ et $g(x)$ sont du même signe, et en particulier s'annulent exactement pour les mêmes valeurs de x.

   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 + e^x > 0$. Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   De plus, par somme de limites on obtient $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.

   Ainsi, g est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (d'après le calcul des limites) et, en particulier, 0 admet un unique antécédent par g que l'on note α.

   On a montré que $\boxed{f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha.}$
4. On a $g(-1) = -1 + \mathrm{e}^{-1} < 0$ et $g(0) = \mathrm{e}^0 = 1 > 0$, donc $g(-1) < g(\alpha) = 0 < g(0)$ et par stricte croissance de g, on en déduit que $\boxed{-1 < \alpha < 0\ .}$

   Ensuite, comme $g(\alpha) = \alpha + e^\alpha = 0$ on a $\alpha = -e^\alpha$ et donc

$$f(\alpha) = \ln(1 + \alpha^2 + e^\alpha) = \ln(1 + \alpha^2 - 2\alpha) = \ln\big((1-\alpha)^2\big) = 2\ln(1-\alpha)\ .$$

   Remarque. Attention, en général $\ln(u^2) = 2\ln(|u|)$, mais ici $1 - \alpha > 0$, donc $|1 - \alpha| = 1 - \alpha$.
5. On a vu précédemment que le signe de f' est le même que celui de g, qui est strictement négative sur $]-\infty, \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$. Le tableau de variation de la fonction f est donc

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln(1-\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

   Pour les limites, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x^2 + 2e^x = +\infty$ (somme de limites), donc par composition, on obtient $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. De même pour la limite en $-\infty$.
6. On a $f'(0) = \frac{2}{3}$ et $f(0) = \ln(3)$, la tangente au graphe de f en 0 a donc pour équation

$$y = f(0) + f'(0)x = \ln(3) + \frac{2}{3}x.$$

7. Transformons l'écriture de f : pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = \ln\Big(2e^x\big(1 + \frac{x}{2e^x} + \frac{1}{2e^x}\big)\Big) = \ln(2) + x + \ln\big(1 + \frac{x}{2e^x} + \frac{1}{2e^x}\big).$$

À partir de là, on remarque que $f(x) - x - \ln(2) = \ln(1 + \frac{x}{2e^x} + \frac{1}{2e^x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$ en utilisant le résultat de croissances comparées $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et la continuité du logarithme en 1. On a donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \ln(2)}$.

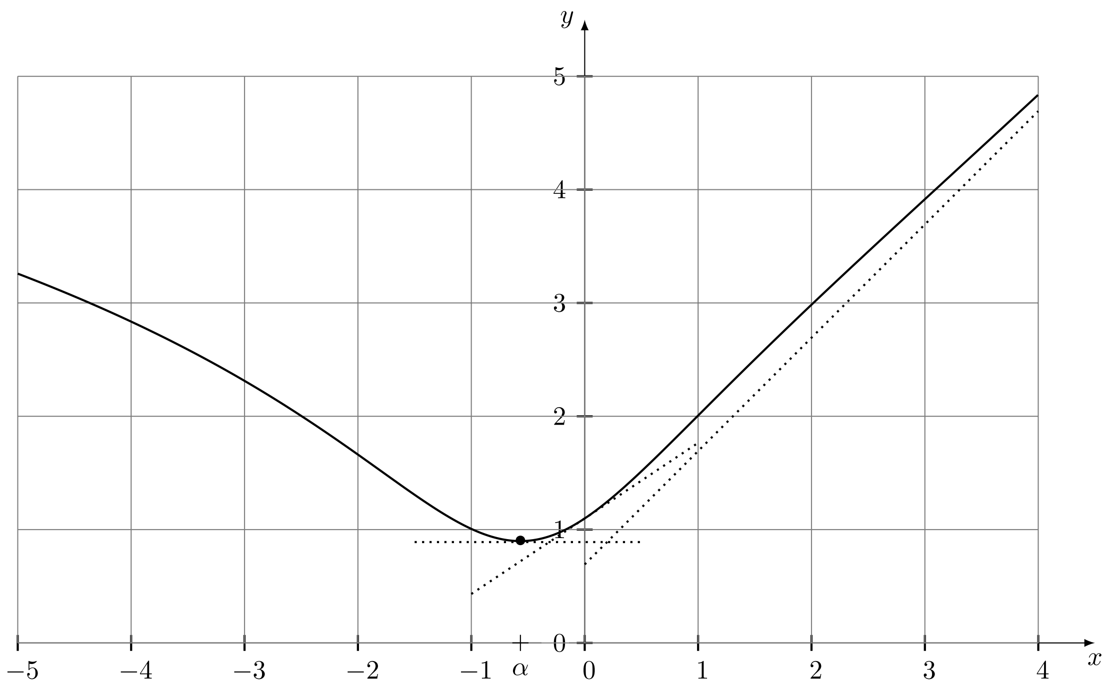
Ainsi, la droite d'équation $\boxed{y = x + \ln(2)}$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

8. Transformons à nouveau l'écriture de f : pour $x \in \mathbb{R}^\star$ on a

$$f(x) = \ln\Big(x^2\big(1 + \frac{1+2e^x}{x^2}\big)\Big) = 2\ln(|x|) + \ln\big(1 + \frac{1+2e^x}{x^2}\big).$$

Comme $\lim_{x\to-\infty} \frac{1+2e^x}{x^2}$ tend vers 0 par croissance comparée, et ln est continue en 1, on en déduit que $f(x) - 2\ln(|x|)$ tend quand x tend vers $-\infty$ vers $\ln(1) = 0$.

9. À l'aide des informations précédemment obtenues, on peut tracer le graphe de f :



Exercice 4.

1. L'erreur est d'utiliser "les deux points *distincts* A_2 et A_n" dans l'hérédité. Si $n = 2$ ces points ne sont pas distincts. On n'a donc pas démontré que la proposition au rang 2 implique la proposition au rang 3.
2. L'écriture $1 + 2 + \cdots + n - 1 + 1 = 1 + 2 + \cdots + n$ est fallacieuse, il y manque le $(n-1)$-ème terme à droite. On ne se serait pas trompés avec des Σ :

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 + 1 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) + 1 = \sum_{k=1}^{n-2} k + (n - 1 + 1) \neq \sum_{k=1}^{n} k.$$