

## Devoir surveillé du 18/11/2022 : nombres complexes et équations différentielles

*L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.*

*La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.*

*Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.*

*On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.*

---

**Exercice 1.** Les questions de cet exercice, proches du cours, sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $z^5 = 32$ .
2. Soient  $p, q \in \mathbb{R}$ . Factoriser  $\sin(p) + \sin(q)$  en factorisant par l'arc moitié.
3. Après avoir justifié qu'elle existe, donner une primitive de la fonction arctan sur  $\mathbb{R}$ .
4. Résoudre l'équation différentielle

$$(E_1) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^4)y'(x) + 4x^3y(x) = x^3,$$

d'inconnue  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

5. Trouver l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

**Exercice 2.** Déterminer le terme général de la suite suivante, définie par une récurrence double :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = -4 + 4i \\ u_{n+2} = (4 + 2i)u_{n+1} - (3 + 6i)u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Exercice 3.** En utilisant le principe de superposition et en cherchant des solutions particulières, résoudre l'équation différentielle

$$(E_2) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^x + (3x - 1)e^{2x} + x - 2,$$

**Exercice 4.** Soient deux fonctions  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues et telles que  $\forall x \in [0, 1]$ ,

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Justifier que  $f$  et  $g$  sont dérivables, puis que leurs dérivées sont elles aussi dérivables.
2. Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont  $f$  et  $g$  sont solution, puis la résoudre.
3. Que valent  $f(0)$  et  $f'(0)$ ? Conclure.