

Devoir surveillé du 18/11/2022 : nombres complexes et équations différentielles

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.

La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.

Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.

On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1. Les questions de cet exercice, proches du cours, sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^5 = 32$.
2. Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Factoriser $\sin(p) + \sin(q)$ en factorisant par l'arc moitié.
3. Après avoir justifié qu'elle existe, donner une primitive de la fonction arctan sur \mathbb{R} .
4. Résoudre l'équation différentielle

$$(E_1) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^4)y'(x) + 4x^3y(x) = x^3,$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

5. Trouver l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2. Déterminer le terme général de la suite suivante, définie par une récurrence double :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = -4 + 4i \\ u_{n+2} = (4 + 2i)u_{n+1} - (3 + 6i)u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exercice 3. En utilisant le principe de superposition et en cherchant des solutions particulières, résoudre l'équation différentielle

$$(E_2) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^x + (3x - 1)e^{2x} + x - 2,$$

Exercice 4. Soient deux fonctions $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que $\forall x \in [0, 1]$,

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Justifier que f et g sont dérivables, puis que leurs dérivées sont elles aussi dérivables.
2. Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont f et g sont solution, puis la résoudre.
3. Que valent $f(0)$ et $f'(0)$? Conclure.