Corrigé du devoir surveillé n° 3

Exercice 1. 1. On remarque que $z = 2$ vérifie $2^5 = 32$. Alors, si $z \in \mathbb{C}$, $z^5 = 32 = 2^5$ si, et seulement si, $\left(\frac{z}{2}\right)^5 = 1$, c'est-à-dire si $z/2$ est une racine 5e de l'unité. Or, les racines 5e de l'unité sont les $e^{i2k\pi/5}$, avec $k \in \{0, 1, \ldots, 4\}$. On en déduit que l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^5 = 32$ est

$$\left\{2e^{\frac{ik\pi}{5}}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\right\}$$

2. Soient $p, q \in \mathbb{R}$. On a, par définition, $\sin(p) + \sin(q) = \operatorname{Im}(e^{ip} + e^{iq})$. Or,

$$\begin{aligned} e^{ip} + e^{iq} &= e^{i(p+q)/2}\left(e^{i(p-q)/2} + e^{i(-p+q)/2}\right) \\ &= 2e^{i(p+q)/2}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

3. La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$, et donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$F : x \mapsto \int_0^x \arctan(t)dt$$

en est une primitive sur $\mathbb{R}$. On se propose de calculer cette intégrale grâce à une intégration par parties : les fonctions arctan et $t \mapsto t$ sont toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donc, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) = \int_0^x \arctan(t)dt &= [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt \\ &= x\arctan(x) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2). \end{aligned}$$

4. On peut remarquer que la fonction constante $x \mapsto 1/4$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1). On résout l'équation homogène associée,

$$(H_1) : \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^4)y'(x) + 4x^3y(x) = 0.$$

Comme $1 + x^4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut normaliser l'équation (H_1), et il suffit alors de trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{4x^3}{1+x^4}$. Cette fraction est de la forme $\frac{u'}{u}$, dont une primitive est $\ln(|u|)$, et donc les solutions de (H_1) sont les éléments de l'ensemble

$$S(H_1) = \{x \mapsto \alpha e^{-\ln(1+x^4)} = \frac{\alpha}{1+x^4}, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$S(E_1) = \left\{x \mapsto \frac{\alpha}{1+x^4} + \frac{1}{4}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

5. On résout l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0.$$

Son équation caractéristique est $X^2 - 3X + 2 = 0$, dont les racines sont 1 et 2, et donc les solutions réelles de l'EDL sont les fonctions de la forme

$$f : x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x},$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Une telle fonction f est la solution du problème de Cauchy si, et seulement si

$$\begin{cases} f(0) = \alpha + \beta = 1 \\ f'(0) = \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1. \end{cases}$$

On en conclut que l'unique solution du problème de Cauchy est la fonction

$$f : x \mapsto 2e^x - e^{2x}.$$

Exercice 2. L'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $r^2-(4+2i)r+3+6i = 0$. Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est

$$\Delta = (4 + 2i)^2 - 4(3 + 6i) = -8i.$$

Déterminons les racines carrés de Δ sous forme algébrique : si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$(x + iy)^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| = 8 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -8 \end{cases}$$

Comme Δ est un complexe non nul, il admet exactement deux racines carrées complexes, opposées l'une de l'autre. Si $x + iy$ est une telle racine, en sommant les deux premières lignes, on obtient $2x^2 = 8$, et la deuxième ligne nous donne $y^2 = x^2 = 4$. La troisième ligne indique que x et y sont nécessairement de signes opposés. Les deux racines carrées de Δ sont donc $\pm(2 - 2i)$. Par conséquence, les racines de l'équation caractéristiques sont

$$r_1 = \frac{4 + 2i + (2 - 2i)}{2} = 3 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{4 + 2i - (2 - 2i)}{2} = 1 + 2i$$

Il existe alors deux constantes complexes A et B tel que le terme général de la suite s'écrit à l'aide de ces racines :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

Déterminons ces constantes à l'aide des données initiales :

$$\begin{cases} 0 = u_0 = A + B \\ -4 + 4i = u_1 = Ar_1 + Br_2 \end{cases} \iff \begin{cases} B = -A \\ -4 + 4i = A(r_1 - r_2) = A(2 - 2i) \end{cases}$$

Ainsi si A et B sont les constantes associées à (u_n), on a nécessairement $(A, B) = (-2, 2)$. On peut donc conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n = -2 \times 3^n + 2(1 + 2i)^n.$$

Exercice 3. • On commence par résoudre l'équation homogène associée,

$$(H_2) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0.$$

L'équation caractéristique associée à (H_1) est $X^2 - 4X + 4 = 0$, qui admet une unique racine double $X = 2$. Par conséquent, l'ensemble des solutions réelles de (H_2) est

$$S(H_2) = \{x \mapsto (\alpha + \beta x)e^{2x}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

• Cherchons maintenant des solutions particulières pour les seconds membres $b_1 : x \mapsto e^x$, $b_2 : x \mapsto (3x - 1)e^{2x}$ et $b_3 : x \mapsto x - 2$. Le cas de b_1 et b_3 sont les plus faciles à traiter, commençons par là. Pour b_1, comme 1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière φ_1 de la forme $\varphi_1 : x \mapsto Ce^x$, où C est une constante réelle. Après injection dans l'équation différentielle, on trouve, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(C - 4C + 4C)e^x = e^x$, et donc $C = 1$.

Pour b_3, on cherche une solution particulière φ_3 de la forme $\varphi_3 : x \mapsto \alpha x + \beta$. Un calcul direct donne : φ_3 est une solution particulière pour le second membre b_3 si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-4\alpha + 4\alpha x + 4\beta = x - 2$, ce qui est équivalent à $\alpha = \frac{1}{4}$ et $\beta = -\frac{1}{4}$.

Finalement, pour b_2, le calcul est un peu plus laborieux car 2 est racine double de l'équation caractéristique. Ainsi, il existe A et B tels que $\varphi_2 : x \mapsto x^2(Ax + B)e^{2x}$ est une solution particulière. On calcule les dérivées successives de φ_2 : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= (Ax^3 + Bx^2)e^{2x} \\ \varphi_2'(x) &= (2Ax^3 + (3A + 2B)x^2 + 2Bx)e^{2x} \\ \varphi_2''(x) &= (4Ax^3 + (12A + 4B)x^2 + (6A + 8B)x + 2B)e^{2x}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi_2''(x) - 4\varphi_2'(x) + 4\varphi_2(x) = (3x-1)e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, A et B sont des solutions du systèmes d'équation

$$\begin{cases} 4A - 8A + 4A = 0 \\ 12A + 4B - 12A - 8B + 4B = 0 \\ 6A + 8B - 8B = 3 \\ 8B = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 6A = 3 \\ 8B = -1. \end{cases}$$

- On peut enfin utiliser le principe de superposition pour conclure que l'ensemble des solutions réelles de (E_2) est

$$S(E_2) = \left\{ x \mapsto \left(\alpha + \beta x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x^3 \right) e^{2x} + e^x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 4.

1. La fonction g est continue sur $[0,1]$, et donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \int_0^x g(t)dt$ est dérivable, et c'est une primitive de g. On en déduit donc que f est dérivable, et que $f' = g$. Le même argument permet de démontrer que g est dérivable, et que $g' = f$. Il s'ensuit alors que f' est elle-même dérivable, et il en va de même pour g'.
2. D'après la question précédente, on peut affirmer que $f'' = g' = f$, et que $g'' = f' = g$. Par conséquent, les fonctions f et g sont toutes les deux solutions de l'équation différentielle

$$(E_3) : \forall x \in [0,1], \quad y''(x) - y(x) = 0.$$

   Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x}$, où α, β sont des constantes réelles.
3. Par hypothèse, $f(0) = \int_0^0 g(t)dt = 0$. De même, $f'(0) = g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$. Or, comme f est une solution de (E_3), il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x}$. Mais puisque $f(0) = f'(0) = 0$, on a nécessairement $\alpha = \beta = 0$. Par conséquent, f est la fonction nulle, et g est nulle elle aussi. Ce sont les seules fonctions qui vérifient la propriété de l'énoncé.