Corrigé du devoir surveillé n° 4

Exercice 1. 1. On réécrit les systèmes sous forme matricielle. Le système (S_1) devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 5 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_2 \leftarrow -L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow -L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donc l'ensemble des solutions de (S_1) est

$$\mathcal{S}(S_1) = \{(-1-5z, -2-3z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

Le système (S_2) devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

et donc le système est incompatible, $\mathcal{S}(S_2) = \varnothing$.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve facilement que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $B^3 = 0$. On en déduit que pour tout $n \geqslant 3$, $B^n = 0$.
Maintenant, comme $A = B + I_3$, et comme B et I_3 commutent, on peut utiliser le binôme de Newton pour calculer les puissances de A. Soit $n \geqslant 2$.

$$A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

et donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = 3^n - n^2 2^n = 3^n \left(1 - n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n\right),$$

or, par d'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} n^2(2/3)^n = 0$ car $0 < 2/3 < 1$, et on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Intéressons-nous maintenant à la suite v_n. Comme on a affaire à une fraction, on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme dominant : soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}}{2n+3} = \frac{n(\sqrt{1+1/n^2} - \sqrt{1/n})}{n(2+3/n)} = \frac{\sqrt{1+1/n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}}$$

Or, $1/n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, idem pour $1/\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $3/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc la limite n'est pas indéterminée, et on en conclut que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

4. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. On calcule

$$\begin{aligned} R(\theta)R(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R(\theta+\theta'). \end{aligned}$$

Par ailleurs, $R(0) = I_2$, et donc $R(\theta)R(-\theta) = R(\theta-\theta) = R(0) = I_2$, ce qui montre que $R(\theta)$ est inversible, et $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.

5. Comme les termes des suites (u_n) et (v_n) sont positifs, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_n + v_n.$$

Or, la suite $(u_n + v_n)$ converge vers 0, et donc le théorème des gendarmes s'applique : la suite (u_n) converge elle aussi vers 0. Le même argument, appliqué à l'autre suite, permet de montrer que (v_n) converge elle aussi vers 0 (ou encore, en écrivant $v_n = (u_n + v_n) - u_n$).

Exercice 2. On écrit (S_m) sous forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & m & m & a \\ 1 & m & 1 & b \\ 1 & 1 & m & c \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & c \\ 1 & m & 1 & b \\ m & m & m & a \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & c \\ 0 & m-1 & 1-m & b-c \\ 0 & 0 & m-m^2 & a-mc \end{array}\right)$$

Pour continuer, il faut séparer les cas où le coefficient $m - m^2$ est nul, et les cas où il ne l'est pas. Or $m - m^2 = 0$ ssi $m = 0$ ou $m = 1$.

- Cas $m = 1$. Le système devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 0 & a-c \end{array}\right)$$

et donc le système est compatible si, et seulement si $b - c = a - c = 0$, c'est-à-dire $a = b = c$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S}(S_1) = \{(x, y, a - x - y), x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Si la condition $a = b = c$ n'est pas vérifiée, alors $\mathcal{S}(S_1) = \varnothing$.

- Cas $m = 0$. Le système devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & -1 & 1 & b-c \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right) \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & b-c \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow -L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & -b+c \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right)$$

et donc le système est compatible si, et seulement si, $a = 0$. Si $a \neq 0$, $\mathcal{S}(S_0) = \varnothing$, et si $a = 0$,

$$\mathcal{S}(S_0) = \{(b - z, -b + c + z, z), z \in \mathbb{R}\}.$$

- Cas $m \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$. Dans ce cas, on poursuit les calculs :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & c \\ 0 & m-1 & 1-m & b-c \\ 0 & 0 & m-m^2 & a-mc \end{array}\right) &\overset{\substack{L_2 \leftarrow 1/(m-1) \times L_2 \\ L_3 \leftarrow 1/(m-m^2) \times L_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & c \\ 0 & 1 & -1 & \frac{b-c}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-mc}{m-m^2} \end{array}\right) \\ &\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - mL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c - \frac{a-mc}{1-m} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b-c}{m-1} + \frac{a-mc}{m-m^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-mc}{m-m^2} \end{array}\right) \end{aligned}$$

donc le système a une unique solution (x, y, z), avec

$$\begin{aligned} z &= \frac{a - mc}{m - m^2}, \\ y &= \frac{b - c}{m - 1} + \frac{a - mc}{m - m^2} = \frac{a - mb}{m - m^2}, \\ z &= c - \frac{a - mc}{1 - m} - y = \frac{-(m+1)a + mb + mc}{m - m^2}. \end{aligned}$$

Exercice 3. 1. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$. On peut aller plus loin : la suite s'écrit $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$.

On calcule les puissances de A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. La suite (F_n) est une suite récurrente d'ordre 2 à coefficients constants. Pour déterminer son terme général, on commence par résoudre son équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$. Les racines de ce polynôme sont

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

et donc il existe deux constantes $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = A\varphi^n + B\varphi'^n.$$

On détermine A et B grâce aux premiers termes :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 0 \\ A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -B \\ A\sqrt{5} = 1 \end{cases},$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

3. On a l'inégalité $1 + \sqrt{5} = |1 + \sqrt{5}| > |1 - \sqrt{5}|$, donc $|\varphi| > |\varphi'|$. Alors, si $n > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}}{\varphi^n - \varphi'^n} \\ &= \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} \frac{1 - (\varphi'/\varphi)^{n+1}}{1 - (\varphi'/\varphi)^n} \\ &= \varphi \frac{1 - (\varphi'/\varphi)^{n+1}}{1 - (\varphi'/\varphi)^n}, \end{aligned}$$

et comme $|\varphi'/\varphi| < 1$, $\lim_{n\to+\infty}(\varphi'/\varphi)^n = 0$, et on peut en conclure que $\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété :

$$P(n) : A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On montre que la propriété est vraie par récurrence. On a déjà calculé A, A^2 et A^3, et donc $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$$

donc $P(n + 1)$ est vraie. Par principe de récurrence, on en conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Soient n, p des entiers naturels tels plus grands que 1. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{pmatrix} F_{n+p+1} & F_{n+p} \\ F_{n+p} & F_{n+p-1} \end{pmatrix} = A^{n+p} = A^n A^p = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{p+1} & F_p \\ F_p & F_{p-1} \end{pmatrix}$$

Par identification des coefficients, on en déduit que

$$\begin{cases} F_{n+p+1} = F_{n+1}F_{p+1} + F_nF_p, \\ F_{n+p} = F_{n+1}F_p + F_nF_{p-1}, \\ F_{n+p} = F_nF_{p+1} + F_{n-1}F_p, \\ F_{n+p-1} = F_nF_p + F_{n-1}F_{p-1}, \end{cases}$$

la relation demandée est la seconde.