# Devoir surveillé du 31/03/2023 : Espaces vectoriels

*L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.*
*La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.*
*Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.*
*On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.*

---

**Exercice 1** (Méli-mélo)**.** Les questions de cette exercice, proches du cours, sont indépendantes les unes des autres.

1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Justifier la réponse.
   a. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z + 1 = 0\}$
   b. $E_2 = \{f \in \mathcal{C}^1[0, 1],\ f(0) = f(1) = 0\}$
   c. $E_3 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ A^2 = 0\}$
2. Démontrer que l'application suivante est linéaire :
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto XP(X) + P'(2X) \end{aligned}$$
3. Déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire suivante (pour le noyau, donner une famille génératrice).
$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y, x - y - z) \end{aligned}$$
4. Déterminer si les familles de vecteurs suivantes sont libres ou liées :
   a. $((0, 0, 1),\ (0, 1, 1),\ (1, 1, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
   b. $((1, 2),\ (3, 4),\ (5, 6))$ dans $\mathbb{R}^2$.
   c. $((1, i),\ (i, -1))$ dans $\mathbb{C}^2$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Exercice 2.** Une urne contient 15 boules : une noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. On tire simultanément trois boules de cette urne. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   a. $A$ : « le tirage est tricolore, »
   b. $B$ : « parmi les boules tirées figurent exactement une noire, et au moins une rouge, »
   c. $C$ : « les trois boules sont de la même couleur. »
2. On suppose désormais que le tirage s'effectue successivement, et avec remise. Déterminer les probabilités des évènements $A$, $B$ et $C$.

**Exercice 3.** Soit $\alpha > 0$. On considère l'application suivante :
$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y + \alpha x) \end{aligned}$$

1. Démontrer que $g$ est linéaire.
2. Déterminer le noyau de $g$, ainsi que son image. $g$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. On considère le cube $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$. Caractériser l'image de $Q$ par $g$ : l'écrire sous la forme suivante
$$\{g(x, y), (x, y) \in Q\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leqslant C \text{ et } f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\},$$
où $C$, $f_1$ et $f_2$ sont à déterminer.
4. Réprésenter les ensembles $Q$ et $g(Q)$ graphiquement dans le cas où $\alpha = 1/2$.

**Exercice 4.** On se place dans $E$, l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0,1]$. Soient $h_1, \dots, h_n$ des éléments de $E$.

1. À quelle condition les fonctions $h_1, \dots, h_n$ forment-elles un famille libre ? L'écrire avec des quantificateurs.
2. Application : démontrer que les fonctions $h_1 : x \mapsto e^x$ et $h_2 : x \mapsto e^{2x}$ sont libres. *Indication : on pourra penser à dériver une relation de liaison.*

**Exercice 5 ($\star$).** Dans cet exercice, $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de vecteurs de $E$. Montrer que si $\mathcal{F}$ n'engendre pas $E$, alors il existe $u_{n+1} \in E$ tel que $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est libre.

On admet dans la suite que si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des familles finies, et si $\mathcal{F}_1$ est libre et $\mathcal{F}_2$ engendre $E$, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_1) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{F}_2)$.

2. En déduire que deux bases ont même cardinal.
3. On dit qu'une famille de polynômes de $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est à *degrés échelonnés* si elle vérifie la condition $0 \leqslant \deg(P_0) < \deg(P_1) < \cdots < \deg(P_n)$. Montrer qu'une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre.
4. Soit $(P_n)$ la suite de polynômes donnés par
$$P_0 = 1, \quad P_{n+1} = XP_n + (X-1)^2 P_n'.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de $P_n$.
5. À l'aide des questions précédentes, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ des polynômes de la question précédente forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$. *Indication : pour montrer que cette famille est génératrice, on pourra procéder par l'absurde et utiliser la question 1.*