Devoir surveillé du 05/05/2023 : Espaces vectoriels II

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.

La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.

Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.

On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1. Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On lance successivement trois dés à six faces.

1. Quel univers permet de modéliser cette expérience ? Si les dés sont équilibrés, quelle fonction de probabilité choisit-on ?
2. Pour $k \in [\![3, 18]\!]$, on considère l'évènement $A_k =$ « la somme des dés est égale à k ». Décrire les éventualités qui réalisent A_4, et en déduire $\mathbb{P}(A_4)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(A_6)$.
4. On note B l'évènement « au moins l'un des dés est un 1 ». Quelle est la probabilité que B soit réalisé en sachant que la somme des dés est égale à 6 ?
5. B et A_6 sont-ils indépendants ?

Exercice 3. Soient n un entier naturel et $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels distincts. On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{aligned}$$

1. Montrer que le noyau de ϕ est réduit au polynôme nul.
2. En déduire que ϕ est bijective.
3. Montrer qu'alors, si $y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$(P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) = (y_0, y_1, \ldots, y_n).$$
4. Soient deux réels distincts a et b. En s'inspirant des questions précédentes, montrer que si $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que
$$P(a) = \alpha, \quad P'(a) = \beta, \quad P(b) = \gamma, \quad P'(b) = \delta.$$