Corrigé du devoir surveillé n° 9

Exercice 1. Les opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes préservent le rang. Ainsi,

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}2&4\\3&5\end{pmatrix} \overset{C_2\leftarrow C_2-2C_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0\\3&-1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 2.$$

On procède de la même manière pour B :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\2&1&0&1\\-1&1&0&2\end{pmatrix} \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1\\L_3\leftarrow L_3+L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&-3&2&-3\\0&3&-1&4\end{pmatrix} \overset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&-3&2&-3\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-3&2&-3\\0&0&1&1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix} = 3$$

De manière générale, on peut s'arrêter dès que l'on obtient une matrice échelonnée : le rang est égal au nombre de pivots. Calculons finalement le rang de C. En ajoutant à chaque ligne la ligne d'en dessous, on obtient :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\-1&1&-1&0&0\\0&-1&1&-1&0\\0&0&-1&1&-1\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&0&-1&0&0\\-1&0&0&-1&0\\0&-1&0&0&-1\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix} = 4.$$

Exercice 2.

1. Pour modéliser cette expérience aléatoire, on peut choisir l'univers des triplets de nombres entre 1 et 6, $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$. La probabilité correspondant à des dés équilibrés est alors la probabilité uniforme, car chaque éventualité est aussi probable que les autres. On choisit donc la probabilité $\mathbb{P}$ donnée par
$$A \subset \Omega,\ \mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$
2. La seule manière d'écrire 4 comme une somme de trois entiers naturel est $4 = 1 + 1 + 2$. Si la somme des dés est 4, alors les dés affichent forcément 1, 1 et 2, dans le désordre. Les seules éventualités réalisant A_4 sont donc $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$ et $(2, 1, 1)$. On en déduit que
$$\mathbb{P}(A_4) = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}.$$
3. On raisonne de la même manière que pour A_4. Il faut déterminer les manières d'écrire 6 comme une somme de 3 entiers. Cette fois-ci, on trouve trois décompositions différentes :
$$\begin{aligned}6 &= 1 + 1 + 4\\ &= 1 + 2 + 3\\ &= 2 + 2 + 2\end{aligned}$$
La première décomposition correspond aux 3 éventualités $(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1)$, la deuxième correspond à 6 éventualités, $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$, et la dernière décomposition ne correspond qu'à 1 éventualité. On en déduit que $\mathrm{Card}(A_6) = 3 + 6 + 1 = 10$, et donc
$$\mathbb{P}(A_6) = \frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}.$$
4. Pour calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{A_6}(B)$, il faut calculer la probabilité de $B \cap A_6$. On a déjà fait le travail d'identifier les éventualités qui réalisent A_6, il suffit donc de dénombrer celles qui contiennent un 1. En fait, il n'y en a qu'une qui ne contient *pas* de 1 : $(2, 2, 2)$. Ainsi, $\mathrm{Card}(B \cap A_6) = 9$. Finalement,
$$\mathbb{P}_{A_6}(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A_6)}{\mathbb{P}(A_6)} = \frac{\mathrm{Card}(B \cap A_6)}{\mathrm{Card}(A_6)} = \frac{9}{10}.$$

5. Les évènements A_6 et B sont indépendants si $\mathbb{P}_{A_6}(B) = \mathbb{P}(B)$, ou, de manière équivalente, si $\mathbb{P}(A_6 \cap B) = \mathbb{P}(A_6)\mathbb{P}(B)$. Pour répondre à cette question, il nous reste donc à calculer la probabilité de l'évènement B. Il est plus facile de calculer la probabilité de $\overline{B} =$ « aucun des dés n'affiche 1 ». On a alors

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{216 - 125}{216} = \frac{91}{216}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}(B) \neq \mathbb{P}_{A_6}(B),$$

et, par suite, B et A_6 ne sont pas indépendants.

Exercice 3. 1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un élément du noyau de ϕ. Alors $\phi(x_0) = \phi(x_1) = \cdots = \phi(x_n) = 0$, et donc P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, et qui possède $n+1$ racines distinctes. On en conclut que nécessairement, $P = 0$, et donc $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$.

2. ϕ est linéaire, et son noyau est réduit à 0, et donc elle est injective. De plus, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ sont deux espaces vectoriels de dimension $n+1$. Par conséquent, ϕ est bijective.
3. La propriété demandée est une conséquence directe de la définition de la bijectivité : soit $v = (y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Comme ϕ est bijective, v admet un unique antécédant par ϕ. En d'autres termes, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\phi(P) = v \iff (P(x_0), \ldots, P(x_n)) = (y_0, \ldots, y_n).$$
4. On peut répéter la démonstration des questions précédentes : on considère
$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}_3[X] &\to \mathbb{R}^4 \\ P &\mapsto (P(a), P'(a), P(b), P'(b))\end{aligned}$$
L'application ψ est linéaire. Si $P \in \mathrm{Ker}(\psi)$, alors P admet deux racines doubles distinctes, a et b. En particulier, P est un multiple du polynôme $(X-a)^2(X-b)^2$. Or, comme P est de degré $\leqslant 3$, c'est forcément le polynôme nul. Ainsi, à nouveau, $\mathrm{Ker}(\psi) = \{0\}$, et donc ψ est injective. De plus, $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$, et donc ψ est une bijection. On en conclut que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ admet un unique antécédant par ψ, c'est-à-dire que
$$\forall (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4,\ \exists!\ P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } (P(a), P'(a), P(b), P'(b)) = (\alpha, \beta, \delta, \gamma).$$