Devoir surveillé du 26/05/2023 : Devoir final

Le sujet est intentionnellement trop long : s'il ne s'agit pas forcément de le traiter en entier, il ne s'agit pas non plus d'optimiser la copie en traitant une question de chaque exercice. La continuité sera valorisée dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 (Algèbre linéaire)**.**

1. Trouver l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

2. On considère la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer C^2, en déduire que C est inversible, et donner l'inverse de C.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant, en détaillant plusieurs cas selon les valeurs de a et de b :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

On pourra commencer par traiter des cas particuliers, comme par exemple le cas $b = 0$, puis le cas $a = -2$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle d'inconnue y

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = \sin(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. On considère la fonction f définie par$f(x) = 2\sqrt{3+x}$. Étant donné un réel u_0, on souhaite étudier la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étudier la fonction f : préciser son domaine de définition, si elle est continue, et dresser un tableau de variation.
2. Montrer si u_0 est dane le domaine de définition de f, alors la suite est bien définie, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est dans le domaine de définition de f.
3. Montrer que pour tout $u_0 \geqslant -3$, la suite (u_n) est monotone.
4. Trouver les points fixes de f, c'est-à-dire les réels x tels que $f(x) = x$.
5. En supposant que la suite (u_n) converge, quelles sont ses limites possibles ?
6. Dresser alors le tableau de signe de la fonction $g(x) = f(x) - x$, et en déduire à quelle condition sur u_0 la suite (u_n) est croissante, et à quelle condition elle est décroissante.
7. Conclure : montrer que $\forall u_0 \geqslant -3$, la suite (u_n) converge vers 6.

Exercice 4 (Calcul des décimales de π)**.** *Historiquement, les décimales de π étaient déterminées en approximant un cercle par un polygone régulier dont on peut calculer le périmètre. Cette méthode est restée d'actualité jusqu'à ce qu'Isaac Newton change la donne grâce à des développements en série (qui sont essentiellement des développements limités).*

Le meilleur résultat connu à cette époque était celui de Ludolph Van Ceulen, qui a méticuleusement calculé, à la main, le périmètre d'un polygone régulier à 2^{62} côtés. Ce calcul, qui lui demanda 25 ans de travail (!!), lui permit de déterminer 35 décimales de π. En 1666, alors confiné chez lui en raison de l'épidémie de la peste qui ravage l'Angleterre, Isaac Newton comprend comment utiliser les polynômes pour approximer des fonctions, *ce qui lui permet de développer une nouvelle formule d'approximation de π, beaucoup plus facile à mettre en œuvre.*

Dans cet exercice, nous revisitons la méthode de Newton grâce au développement limité de la fonction arctan. *Le type de formule de que nous allons démontrer reste utilisé aujourd'hui pour calculer π avec une très grande précision !*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ à l'ordre $2n$ en 0.
2. En déduire que le développement limité de la fonction arctan en 0 et à l'ordre $2n+1$ s'écrit
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x\to 0}(x^{2n+1}).$$
3. Que vaut $\arctan(1)$? En déduire une approximation de π, grâce au développement limité de la question précédente à l'ordre 1.

*Cette approximation, bien sûr, n'est pas très bonne. Le problème vient du fait qu'on utilise le développement limité d'*arctan *en* 0 *pour calculer* $\arctan(1)$. *On obtiendrait un meilleur résultat avec une formule faisant intervenir des termes de la forme* $\arctan(x)$, *avec x proche de* 0 *: c'est l'objectif de la fin de ce problème.*

4. (Formule de John Machin) On admet que pour tout x, y tels que $xy \neq 1$ et $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$,
$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$
Montrer que $2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$, puis que $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$. En déduire que
$$\arctan(1) = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$
5. (Application) Utiliser la formule de John Machin et le développement limité d'arctan à l'ordre 1 pour en déduire une approximation de π. Combien de décimales de π sont correctes ? (*Indication :* $4/239 \simeq 0,02$, $\pi \simeq 3,14$.)

À titre indicatif, on retrouve les 35 décimales de π de Van Ceulen avec la formule de Machin en faisant un DL d'ordre 21, ce qui n'est pas rien, mais qui se calcule en un temps considérablement plus court que 25 ans. Un ordinateur le fait instantanément !

$\therefore$ Fin du sujet court $\therefore$

Exercice 5 (Somme de nombres impairs)**.** On pose $s(1) = 1$, $s(2) = 3+5$, $s(3) = 7+9+11, \ldots$, de sorte que $s(n)$ est la somme des n premiers nombres impairs non utilisés dans $s(1), \ldots, s(n-1)$.

1. Calculer $s(i)$ pour $i \in [\![1,4]\!]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $I(k)$ le k-ième entier naturel impair.
   a. Exprimer $I(k)$ en fonction de k.
   b. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(N) = \sum_{k=1}^{N} I(k)$. Calculer $S(N)$.
   c. En déduire la somme $T(n) = \sum_{i=1}^{n} s(i)$
   d. Exprimer $s(n) =$ grâce à $T(n-1)$ et $T(n)$, et en déduire la valeur de $s(n)$.
4. À l'aide des résultats précédents, donner la valeur de $\sum_{i=1}^{n} i^3$ en fonction de n.

Exercice 6 (Polynômes réels scindés)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à 2. On suppose que P est scindé, c'est-à-dire qu'il admet n racines réelles, comptées avec multiplicité. En d'autres termes, il existe $x_1 < x_2 < \cdots < x_p \in \mathbb{R}$ et $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = \deg(P)$ et
$$P(X) = (X - x_1)^{n_1}(X - x_2)^{n_2} \ldots (X - x_p)^{n_p}.$$
On va montrer que P' est scindé.

1. Énoncer le théorème de Rolle.

2. En déduire qu'il existe $y_1, \dots, y_{p-1}$ tels que $P'(y_1) = \cdots = P'(y_{p-1}) = 0$, et
$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < y_{p-1} < x_p.$$
3. Si x_k est une racine de P de multiplicité $n_k \geqslant 1$, quelle est sa multiplicité dans P' ?
4. Démontrer que P' est scindé.

Exercice 7 (Polynômes de Chebychev)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $T_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$
On rappelle que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$.

1. a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
   b. Simplifier $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$.
   c. Démontrer que pour tous réels a, b, on a la relation
   $$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
   d. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in [-1, 1]$,
   $$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$
   e. Grâce à la question précédente et au calcul de T_0 et T_1, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est une fonction polynomiale.
2. Par facilité d'écriture, on confondra dans la suite du sujet la fonction polynomiale, ici définie sur $[-1, 1]$, et le polynôme correspondant, qui peut être évalué en tout $x \in \mathbb{R}$.
   a. Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le degré de T_n ? Quel est son coefficient dominant ?
   b. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Que vaut $\arccos(\cos(\theta))$? On rappelle que arccos est la fonction réciproque de la fonction cosinus *restreinte à* $[0, \pi]$.
   c. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   d. Déterminer les racines de T_n appartenant à $[-1, 1]$. Le polynôme T_n admet-il des racines en dehors de cet intervalle ?
3. On rappelle que la fonction cosinus hyperbolique est définie par
   $$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cosh(x)) = \cosh(nx)$.
   b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|T_n(x)| \leqslant 1 \iff |x| \leqslant 1$.