Corrigé du devoir surveillé n° 10

Exercice 1. 1. On vérifie que A est inversible en calculant son déterminant :

$$\det(A) = 1 \times 11 - 2 \times 6 = -1 \neq 0,$$

et donc A est inversible, et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice B, on procède avec l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}{\iff}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 7 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}{\iff}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

On en déduit que B est inversible, et que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On peut tout à fait procéder avec l'algorithme de Gauss pour cette question, mais le calcul de C^2 permet une méthode plus directe. En effet :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2C + 3I_4,$$

et donc $C(C - 2I_3) = 3I_4$, ce qui implique que C est inversible, et que

$$C^{-1} = \frac{1}{3}(C - 2I_4) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Le système n'étant pas aisé à résoudre, il faut différencier plusieurs cas. Notons $S_{a,b}$ l'ensemble des solutions du système. On entame l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ a & b & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - aL_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & b-1 \\ 0 & b(1-a) & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right)$$

La matrice associée au système est inversible dès lors que les coefficients diagonaux sont tous non nuls, c'est-à-dire que $b(a-1) \neq 0$ et $2 - a -^2 \neq 0$. On traite séparément les cas où l'un de ces coefficients est nul. Commençons donc par identifier ces cas : $2 - a - a^2 = 0 \iff a = 1$ ou $a = -2$, donc la matrice est inversible si $a \notin \{-2, 1\}$ et $b \neq 0$.

a. Cas $a = -2$: le système devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -2 & 1 \\ 0 & -3b & 3 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right),$$

donc si $b \neq -2$, alors $S_{-2,b} = \varnothing$. Si par contre $b = -2$, alors le système devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et l'ensemble des solutions est alors

$$S_{-2,-2} = \left\{ \left(z, -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}.$$

b. Cas $a = 1$: le système devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right),$$

et donc si $b \neq 1$, le système est incompatible, et $S_{1,b} = \varnothing$. Sinon,

$$S_{1,1} = \{(1 - y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$$

c. Cas $b = 0$ et $a \neq 1$, $a \neq -2$: le système devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -a \end{array}\right),$$

et pour trouver une solution, on doit donc avoir

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-1} = \frac{a}{a^2+a-2} &\iff \frac{1}{a-1} = \frac{a}{(a-1)(a+2)} \\ &\iff 1 = \frac{a}{a+2} \iff a = a+2, \end{aligned}$$

ce qui est exclu, et donc le système est incompatible, $S_{a,0} = \varnothing$

d. Cas $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $b \neq 0$. On l'a déjà dit : dans ce cas, la matrice est inversible, et on peut mener l'algorithme de Gauss jusqu'au bout. On trouve

$$z = \frac{b-a}{2-a-a} = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)},$$

puis

$$y = \frac{1}{b(a-1)}(b - 1 + (a-1)z) = \frac{ab - 2 + b}{b(a-1)(a+2)},$$

et finalement,

$$x = 1 - by - az = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}.$$

Exercice 2. Pour résoudre l'équation différentielle (E), on commence par résoudre l'équation homogène associée

$$(H) : y'' - 3y' + 2y = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pour ce faire, il suffit de résoudre l'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$, dont les racines sont 1 et 2. Alors les solutions de (H) sont

$$\mathcal{S}(H) = \{x \mapsto Ae^x + Be^{2x},\ A, B \in \mathbb{R}\}.$$

Cherchons maintenant une solution particulière de (E). Comme $2i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, on peut trouver une solution de la forme $x \mapsto \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$, où α et β sont des constantes réelles. Une telle fonction est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-4\alpha\cos(2x) - 4\beta\sin(2x) + 6\alpha\sin(2x) - 6\beta\cos(2x) + 2\alpha\cos(2x) + 2\beta\sin(2x) = \sin(2x)$$

Après avoir regroupé les termes en sinus et cosinus, on est ramené au système

$$\begin{cases} -2\alpha - 6\beta = 0 \\ \ \ 6\alpha - 2\beta = 1, \end{cases}$$

qui a pour solution $(\alpha, \beta) = \frac{1}{20}(3, -1)$. On peut en conclure que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S}(E) = \left\{ x \mapsto Ae^x + Be^{2x} + \frac{3}{20}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x),\ A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3.

1. La fonction racine carrée étant définie est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f l'est sur $[-3, +\infty[$ par composition. Par ailleurs, il est clair que la fonction f est strictement croissante sur son domaine de définition.
2. Il s'agit de montrer par récurrence que si $u_0 \geqslant -3$, alors la suite est bien définie, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant -3$. Pour cela, il suffit de remarquer que f ne prend que des valeurs positives ($\mathbb{R}_+$ est stable par f), et donc on a immédiatement que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. La fonction définissant la suite est croissante, et donc la suite est monotone. *Attention : elle n'est pas forcément croissante !*
4. Soit $x \geqslant -3$. Si x est un point fixe de f, alors
$$\begin{aligned} x = 2\sqrt{3+x} &\implies x^2 = 4(3+x) \\ &\implies x \in \{-2, 6\} \end{aligned}$$
On vérifie si ces solutions correspondent ou non à un point fixe : $f(-2) = 2\sqrt{1} = 2$, donc -2 n'est pas un point fixe. Par contre, $f(6) = 2\sqrt{9} = 6$; 6 est l'unique point fixe de f.
5. f est continue sur son domaine, et donc si (u_n) converge, c'est forcément vers un point fixe de f, c'est-à-dire que la seule limite (finie) possible est 6.
6. On s'intéresse au signe de $g(x) = f(x) - x = 2\sqrt{3+x} - x$. D'après l'étude déjà faite pour les points fixes, on peut affirmer que $g(x) = 0$ ssi $x = 6$. Comme de plus $g(-3) = 3 > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, on en déduit que
$$g(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant 6.$$
En particulier, $f(u_0) \geqslant u_0$ ssi $u_0 \leqslant 6$, c'est-à-dire que $u_1 \geqslant u_0$ ssi $u_0 \leqslant 6$. Par conséquent, comme on a vu que la suite (u_n) est monotone, on peut conclure que la suite (u_n) est croissante ssi u_0, et décroissante sinon.
7. Si $u_0 > 6$, alors la suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. La seule limite possible étant 6, elle converge nécessairement vers 6. Si par contre $-3 \leqslant u_0 \leqslant 6$, alors la suite est croissante, et majorée par 6 : en effet, par croissance de f, $u_n \leqslant 6 \implies u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(6) = 6$, et donc la récurrence est immédiate. Ainsi, la suite converge aussi, et c'est forcément vers 6.

Exercice 4.

1. Le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0 à l'ordre n est donné par
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_{x\to 0}(x^n).$$
Par changement de variable, on obtient alors
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \cdots + (-1)^n x^{2n} + o_{x\to 0}(x^{2n}).$$
2. En primitivant le DL précédent, on obtient :
$$\arctan(x) - \arctan(0) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x\to 0}(x^{2n+1}).$$
Comme $\arctan(0) = 0$, c'est le développement limité demandé.

3. En utilisant le DL à l'ordre 1 comme une approximation, on obtient
$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) \simeq 1,$$
c'est-à-dire $\pi \simeq 4$. Ce n'est pas une très bonne approximation. On aurait pu utiliser le DL à un ordre plus élevé pour obtenir une meilleure approximation, mais le but n'était pas de faire du calcul mental.
4. La formule donnée implique
$$2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right),$$
puis
$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = 2\arctan\left(\frac{5}{12}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{2\times 5}{12}}{1-\frac{25}{144}}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right).$$
Finalement,
$$\begin{aligned}4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) &= \arctan\left(\frac{120}{119}\right) + \arctan\left(-\frac{1}{239}\right)\\ &= \arctan\left(\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119\times 239}}\right)\\ &= \arctan\left(\frac{120\times 239 - 119}{119\times 239+120}\right)\\ &= \arctan\left(\frac{119\times 239+239-119}{119\times 239+120}\right) = \arctan(1).\end{aligned}$$
5. En utilisant la fomrule de Machin et le DL de la fonction arctan à l'ordre 1, on obtient
$$\frac{\pi}{4} \simeq \frac{4}{5} - \frac{1}{239} \implies \pi \simeq \frac{16}{5} - \frac{4}{239} \simeq 3.20 - 0.02 \simeq 3.18,$$
ce qui est une approximation considérablement meilleure que la précédente.

Exercice 5. 1. On calcule les premiers termes de la suite :
$$\begin{aligned}s(1) &= 1,\\ s(2) &= 3+5 = 8,\\ s(3) &= 7+9+11 = 27,\\ s(4) &= 13+15+17+19 = 64.\end{aligned}$$

2. On peut le montrer par récurrence, ou bien remarquer, en sommant deux fois les entiers de 1 à n, que
$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & +\cdots+ & n-1 & + & n \\ + & n & + & (n-1) & + & (n-2) & +\cdots+ & 2 & + & 1 \\ \hline = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & +\cdots+ & n+1 & + & n+1 \end{array}$$
et donc
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. a. $I(k) = 2k-1$
   b. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
$$S(N) = \sum_{k=1}^{N} I(k) = \sum_{k=1}^{N} 2k-1 = N(N+1) - N = N^2$$
   c. La somme $T(n) = \sum_{i=1}^{n} s(i)$ est égale à $S(N)$, où N est le le nombre de nombres impairs qui apparaissent dans la somme. Comme $s(i)$ est la somme de i nombres, $T(n)$ est la somme de $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ nombres. On en conclut donc que
$$T(n) = S\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

d. On a immédiatement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T(n) - T(n-1) = s(n)$ (avec la convention $T(0) = 0$). Mais alors
$$s(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2n^2}{4} = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2 - n^2 + 2n^3 - n^2) = n^3.$$

4. Il ne reste rien à montrer :
$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} s(i) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 6. 1. Le théorème de Rolle énonce que si une fonction dérivable prend la même valeur en deux points, alors sa dérivée s'annule au moins une fois entre ces deux points. Plus précisément, il s'écrit : soient $a < b$ des réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. P est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_p) = 0$. On applique donc le théorème de Rolle à la fonction polynomiale P entre chaque intervalle $[x_1, x_2]$, puis $[x_2, x_3]$, et ainsi de suite jusqu'à $[x_{p-1}, x_p]$ pour trouver des réels $y_1 \in]x_1, x_2[$, $y_2 \in]x_2, x_3[, \ldots, x_{p-1} \in]x_{p-1}, x_p[$ tels que $P'(y_1) = \cdots = P'(y_{p-1}) = 0$, ce qui répond à la question.

3. Si x_k est une racine de P de multiplicité $n_k \geqslant 1$, alors x_k est une racine de P' de multiplicité $n_k - 1$. En effet, si $P = (X - x_k)^{n_k} Q$, alors
$$P' = n_k(X - x_k)^{n_k - 1}Q + (X - x_k)^{n_k}Q' = (X - x_k)^{n_k - 1}(n_kQ + (X - x_k)Q').$$

4. Si P est scindé, alors il s'écrit
$$P(X) = (X - x_1)^{n_1}(X - x_2)^{n_2} \ldots (X - x_p)^{n_p},$$
où les exposants $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = \deg(P)$. Mais alors P' admet $p - 1$ racines disctinctes des $x_1, \ldots, x_p$, et la multiplicité totale des $x_1, \ldots, x_p$ est $\sum_{k=1}^{p}(n_k - 1) = \deg(P) - p$. On ne connait a priori pas la multiplicité des racines $y_1, \ldots, y_{p-1}$ de P', mais on sait qu'elle est au moins 1. Ainsi, le polynôme
$$\pi = \prod_{k=1}^{p}(X - x_k)^{n_k - 1} \prod_{k=1}^{p-1}(X - y_k)$$
divise P'. Mais comme π est de degré $\deg(P')$, P' est égal à π (à multiplication par un scalaire près), et donc P' est scindé.

Exercice 7. 1. a. $\cos(2\theta) = \mathrm{Re}(e^{i2\theta}) = \mathrm{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

b. Soit $x \in [-1, 1]$.
$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \cos(0 \times \arccos(x)) = 1, \\
T_1(x) &= \cos(\arccos(x)) = x, \\
T_2(x) &= \cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1.
\end{aligned}$$

c. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}
\cos(a) + \cos(b) &= \mathrm{Re}\left(e^{ia} + e^{ib}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(a+b)/2}(e^{i(a-b)/2} + e^{i(b-a)/2})\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(2e^{i(a+b)/2}\cos\left((a-b)/2\right)\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).
\end{aligned}$$

d. Soient $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\theta = \arccos(x)$.
$$\begin{aligned}
T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) \\
&= 2\cos\left(\frac{n+1+n-1}{2}\theta\right)\cos\left(\frac{n+1-n+1}{2}\theta\right) \\
&= 2\cos(n\theta)\cos(\theta) = 2T_n(x)T_1(x) = 2xT_n(x),
\end{aligned}$$
ce qui prouve la formule de récurrence demandée.

e. T_0, T_1 et T_2 sont des fonctions polynomiales. On montre par récurrence que c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$: supposons que T_n et T_{n-1} sont des fonctions polynmiales pour un certain $n \geqslant 1$. Alors T_{n+1} est donné par la formule de récurrence :

$$\forall x \in [-1,1], \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

et donc T_{n+1} est aussi une fonction polynomiale. D'après le principe de récurrence, c'est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a. On montre par récurrence : si $n \in \mathbb{N}$, le degré de T_n est égal à n, et son coefficient dominant est égal à 2^{n-1} si $n \geqslant 1$, et 1 si $n = 0$. Cette propriété est vraie pour $n = 0, 1, 2$. Supposons que la propriété est vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le polynôme $T_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ est donné par

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}.$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $\deg(2XT_n) = n+1$ et $\deg(T_{n-1}) = n-1$, et donc leur différence est de degré $n+1$. Par ailleurs, le monôme de plus haut degré dans cette expression est le monôme de plus haut degré dans $2XT_n$, et donc son coefficient est $2 \times 2^n = 2^{n+1}$, toujours d'après l'hypothèse de récurrence. On a donc montré la propriété au rang $n+1$, et on en conclut qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

b. Si $\theta \in [0, \pi]$, alors $\arccos(\cos(\theta)) = \theta$, par définition de la fonction arccos. De la même manière, si $\phi \in [0, \pi]$,

$$\arccos(-\cos(\phi)) = \arccos(\cos(\pi - \phi)) = \pi - \phi,$$

car $\pi - \phi \in [0, \pi]$.
Dans le cas général, si $\theta \in \mathbb{R}$, il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta - k\pi \in [0, \pi[$, et alors

$$\begin{aligned} \arccos(\cos(\theta)) &= \arccos\big((-1)^k \cos(\theta - k\pi)\big). \\ &= \begin{cases} \theta - k\pi & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \pi - \theta + k\pi = (k+1)\pi - \theta & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Pour ce faire, on peut utiliser la formule établie dans la question 2.b., mais on peut aussi simplement remarquer les points suivants :

i. si $\theta \in [0, \pi]$, alors $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n \arccos(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ par définition de la fonction arc cosinus ;
ii. si $\theta \in [-\pi, 0]$, alors $T_n(\cos(\theta)) = T_n(\cos(-\theta)) = \cos(n(-\theta)) = \cos(n\theta)$ d'après le premier point ;
iii. $\theta \mapsto T_n(\cos(\theta))$ est 2π-périodique, et $\theta \mapsto \cos(n\theta)$ l'est aussi.

Comme $\theta \mapsto T_n(\cos(\theta))$ et $\theta \mapsto \cos(n\theta)$ coïncident sur $[-\pi, \pi]$ et qu'elles sont 2π-périodiques, elles coïncident sur $\mathbb{R}$.

d. La fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Ainsi, pour $x \in [-1, 1]$, en posant $\theta = \arccos(x) \in [0, \pi]$, on a l'équivalence suivante :

$$T_n(x) = 0 \iff T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) = 0.$$

On en déduit que les racines de T_n comprises entre -1 et 1 sont exactement les $\cos(\theta)$, où $\theta \in [0, \pi]$ vérifie $\cos(n\theta) = 0$, c'est-à-dire

$$\{x \in [-1,1], P(x) = 0\} = \{\cos(\theta), \theta \in [0, \pi] \text{ et } \cos(n\theta) = 0\} = \left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

Les racines ainsi trouvées sont distinctes. On a donc trouvé n racines au polynôme T_n, qui est de degré n : il ne peut y en avoir d'autres, donc T_n ne s'annule pas en dehors de $[-1, 1]$.

3. a. On montre cette propriété par récurrence. Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_0(\cosh(x)) = 1 = \cosh(0)$, et $T_1(\cosh(x) = \cosh(x)$. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $T_k(\cosh(x)) = \cosh(kx)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Alors, d'après la formule de récurrence,

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(\cosh(x)) &= 2\cosh(x)T_n(\cosh(x)) - T_{n-1}(\cosh(x)) \\
&= 2\cosh(x)\cosh(nx) - \cosh((n-1)x) \\
&= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})(e^{nx} + e^{-nx}) - \frac{1}{2}(e^{(n-1)x} + e^{-(n-1)x}) \\
&= \frac{1}{2}\Big(e^{(n+1)x} + e^{(-n+1)x} + e^{(n-1)x} + e^{-(n+1)x} - e^{(n-1)x} - e^{-(n-1)x}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(e^{(n+1)x} + e^{-(n+1)x}\Big) = \cosh((n+1)x),
\end{aligned}$$

et donc la propriété est aussi vraie au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cosh(x)) = \cosh(nx).$$

b. La propriété n'est vraie qu'à partir de $n = 1$. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$, et soit, dans un premier temps, $x \geqslant 0$.

- Si $x \in [0, 1]$, alors il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$, et donc $T_n(x) = T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, et en particulier, $|T_n(x)| \leqslant 1$.
- Si par contre $x > 1$, alors il existe $y > 0$ tel que $x = \cosh(y)$, et donc $T_n(x) = T_n(\cosh(y)) = \cosh(ny) > 1$, d'où $T_n(x) > 1$.

On a ainsi montré que si $x \geqslant 0$, alors $|T_n(x)| \leqslant 1 \iff |x| \leqslant 1$. On va alors étendre le résultat grâce à la parité. Montrons que si n est pair, alors T_n est pair, et à l'inverse, si n est impair, T_n est aussi impair. C'est vrai pour $n = 0, 1, 2$. Supposons que c'est vrai pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, si n est pair, T_n est paire, et T_{n-1} impaire par hypothèse de récurrence. Par conséquent, $x \mapsto 2xT_n(x)$ est impaire, et donc $x \mapsto T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ est aussi impaire. Si n est impair, le même raisonnement montre que T_{n+1} est pair. Finalement, le principe de récurrence s'applique, et dans tous les cas, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |T_n(-x)| = |T_n(x)|,$$

et on peut conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |T_n(x)| \leqslant 1 \iff |x| \leqslant 1.$$