Colle n°18 : espaces vectoriels II

Semaine du 27/03/2023

Cette semaine, on reprend tout le programme de la semaine dernière sur les espaces vectoriels, et on introduit les applications linéaires.

— Définition et caractérisations des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels.
— Famille de vecteurs, de combinaison linéaire, espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs.
— Familles génératrices et familles libres, bases.
— Espaces vectoriels usuels : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, etc.
— Applications linéaires : définition et caractérisation. L'ensemble des applications linéaires est un espace vectoriel, et la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.
— Noyau et image d'une application linéaire : définition, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels.
— Lien entre le noyau d'une application linéaire et son injectivité.
— Lien entre l'image par une application linéaire d'une famille génératrice et sa surjectivité.
— Isomorphismes : l'inverse d'une isomorphisme est un isomorphisme, et une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, elle transforme une base en une base.

Ce que le programme ne contient pas :
— la théorie de la dimension,
— des sommes d'espaces vectoriels et des supplémentaires,
— de l'orthogonalité...

Question de cours :
— Montrer qu'une application est linéaire, ou qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, ou qu'une famille est libre, sur un exemple pas trop compliqué.
— Démontrer que le noyau et l'image sont des sev.
— Démontrer le lien entre l'injectivité et le noyau.
— Démontrer que l'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme.