Colle n°20 : espaces vectoriels III

Semaines du 24/04/2023

Malgré le titre, les probabilités finies restent au programme de cette semaine. On introduit la notion de dimension aux espaces vectoriels.

- Probabilités sur des univers finies : formule de Bayes, probabilités conditionnelles, indépendance de deux évènements (c.f. la feuille de colle 19)
- Définition et caractérisations des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels, des applications linéaires, de leur noyau et image.
- Familles génératrices et familles libres, bases.
- Théorème de la base incomplète (et de la base extraite d'une famille génératrice)
- Théorème de la dimension finie : le cardinal d'une famille génératrice est plus grand que le cardinal d'une famille libre. Deux bases ont donc même cardinal.
- Définition des espaces de vectoriels de dimension finie : ce sont ceux qui admettent une base.
- Proposition : dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille est une base si, et seulement si, elle est libre et de cardinal égal à la dimension.
- Dans les ev de dimension finie, les sev sont de dimension finie.
- Proposition : si deux sous-espaces vectoriels sont de même dimension, ils sont égaux si, et seulement si, l'un est inclus dans l'autre.

Ce que le programme ne contient pas :

- les variables aléatoires et tout ce qui y est lié,
- les sommes d'espaces vectoriels et des supplémentaires,
- le théorème du rang.

Question de cours :

- L'énoncé d'un des théorèmes du cours + application
- Démontrer un des lemmes du cours : si u est combinaison linéaire de $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n, u) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. Si $(v_1, \dots, v_n)$ est libre et $u \notin \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$, alors $(v_1, \dots, v_n, u)$ est libre.
- Montrer que si deux sev ont même dimension et que l'un est inclus dans l'autre, alors ils sont égaux.
- Une application directe des théorèmes importants (montrer qu'une famille est une base, montrer que deux sev sont égaux).