Colle n°23 : Matrices d'applications linéaires

Semaine du 05/06/2023

Ce que le programme contient

- Matrice des coordonnées d'un vecteur par rapport à une base (dans un espace vectoriel réel de dimension finie), et matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
- Le rang d'une famille de vecteur est égal au rang de la matrice de ses coordonnées dans une base donnée.
- Matrice de passage : si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

- Changement de base : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = P_{\mathcal{B}'\to B}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$, et $P_{\mathcal{B}'\to B} = P_{\mathcal{B}'\to F}P_{\mathcal{F}\to B}$.
- Matrices d'applications linéaires relativement à deux bases :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F\leftarrow\mathcal{B}_E}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\left(u(\mathcal{B}_E)\right).$$

  $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F\leftarrow\mathcal{B}_E}$ est un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Le rang d'une application linaire est égal au rang de la sa matrice relativement à deux bases données.
- Matrice d'un vecteur image :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F\leftarrow\mathcal{B}_E}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

- Composition et produit matriciel :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G\leftarrow\mathcal{B}_E}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G\leftarrow\mathcal{B}_F}(v)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F\leftarrow\mathcal{B}_E}(u)$$

- Un endomorphisme est inversible ssi sa matrice l'est, et alors la matrice de l'inverse est l'inverse de la matrice.
- Changement de base : $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}(id_E)$, et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_F\leftarrow\mathcal{B}'_E}(u) = P_{\mathcal{B}'_F\to\mathcal{B}_F}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F\leftarrow\mathcal{B}_E}(u)P_{\mathcal{B}_E\to\mathcal{B}'_E}.$$

- Autour du rang : un endomorphisme est inversible ssi son rang est égal à la dimension de l'espace, et une matrice carrée est inversible ssi son rang est égal à sa taille.
- Un endomorphisme est de rang r ssi il existe des bases relativement auxquelles sa matrice s'écrit par blocs

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Une matrice M est de rang r ssi il existe des matrices inversibles P et Q telles que $M = PJ_rQ$.
- Corollaire : une matrice et sa transposée ont même rang.

Ce que le programme ne contient pas :

- Des espaces vectoriels non réels.
- Les polynômes d'applications linéaires / de matrices
- Le déterminant pour des matrices plus grandes que 2×2
- La réduction d'endomorphismes...

Question de cours :

- Montrer la formule de changement de base pour la matrice des coordonnées d'un vecteur.
- Montrer que si u est inversible, alors sa matrice l'est, et donner la matrice de l'inverse.
- Calculer une matrice de changement de base.
- Un calcul simple de rang d'une matrice / d'une application linéaire / d'une famille de vecteurs.