TD 1 : nombres réels, suites et récurrence

1 Nombres réels

Exercice 1. Pour a et b deux nombres réels, simplifier les expressions suivantes sans vous soucier des conditions d'existence :

1) $\dfrac{1}{ab} \times \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$ 2) $\dfrac{\frac{a+b}{ab}}{a-b}$ 3) $\dfrac{a+b}{\frac{ab}{a-b}}$

Exercice 2.

1. Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$. Montrer que $\dfrac{2a+b}{3} \leqslant b$ et $\dfrac{a-4b}{3} \leqslant -b$.
2. Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{3}{n+2} \leqslant \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{n+1}{n+2} \geqslant \dfrac{3}{4}$.
3. Montrer que pour x et y des réels positifs, on a $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x+y}$.

Exercice 3. Soient x et y deux nombres réels tels que $x \in [1,4]$ et $y \in [-3,-1]$.

Donner les encadrements les plus précis possibles des nombres réels suivants : $x-y$, xy et $\dfrac{x}{y}$.

Exercice 4. Résoudre les inéquations suivantes (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) et donner leurs ensembles de solutions à l'aide d'intervalles.

a) $x^2 \leqslant 4$

b) $\dfrac{3}{x} < \dfrac{x}{3}$

c) $\dfrac{2x+1}{x+3} \leqslant 2$

d) $\sqrt{x^2+6} \leqslant 3x$

Exercice 5.

1. Résoudre l'équation $|3x-7| = |-2x+1|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $|x+2| = |x^2-4|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Trouver toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que $|3x+6|-5 < |2x+4|$.

Exercice 6.

1. Montrer que pour tous réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$. Dans quel(s) cas y a-t'il égalité ?
2. On suppose maintenant que $a > 0$ et $b > 0$. Déduire de la question précédente que $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$.

2 Suites et récurrence

Exercice 7. On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{5+2n+{u_n}^2}$.

1. Calculer les premiers termes de la suite (jusqu'au rang $n = 4$).
2. Conjecturer une formule explicite pour le terme général de la suite (c'est-à-dire exprimer u_n en fonction de n).
3. Démontrer la conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 8.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n on a
$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$
2. Soit $a > -1$. Montrer par récurrence que pour tout entier n, on a $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n on a
$$1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Exercice 9. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout entier n.

Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 1 et majorée par 2.

Exercice 10. Pour les suites suivantes, donner la nature de la suite et une expression explicite du terme général.

1. (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
2. (v_n) définie par $\begin{cases} v_1 = 0, \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

1. Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n}{3^n}$.
   a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
   b. En déduire une expression explicite de v_n, puis de u_n, en fonction de n.