TD 2 : sommes et produits finis

Exercice 1. Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$:

a) $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 150^3 = ?$

b) $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{10} + \cdots + \dfrac{1}{66} = ?$

c) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + \dfrac{1}{29} = ?$

d) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = ?$

Exercice 2. Montrer par récurrence que les propositions suivantes sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (k+n) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$

Exercice 3. Donner une expression simple, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, pour les sommes suivantes.

a) La somme des n premiers nombres impairs.

b) $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1)$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$

e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (k^2 + 2k + 1)$

f) $\displaystyle\sum_{p=3}^{n+2} 2^p(1 + 3^p)$

g) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2^{2\ell-1}}$

h) $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j j^2$

Exercice 4. Calculer les sommes suivantes en faisant apparaître une somme télescopique.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \sqrt{k+1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!}$

e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 5. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les produits suivants.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k$

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k-1)$

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^k$

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

Exercice 6. Calculs de sommes et suites usuelles.

1. Soit (u_k) une suite arithmétique. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de u_0, u_n et n.
   Indication : on pourra utiliser $u_k = u_0 + kr$ où r est la raison de la suite.
2. Soit (w_n) une suite arithmético-géométrique de coefficients a et b (c'est-à-dire $w_{n+1} = aw_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = a^n w_0 + b \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k$.
   b. On suppose $a \neq 1$. Simplifier l'expression obtenue pour w_n.
   c. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} w_k$ en fonction de a, b et n.

Exercice 7. On étudie dans cet exercice la formule, définie pour m et $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+m}{m} = \binom{n+m+1}{m+1}.$$

1. Représenter le triangle de Pascal jusqu'à la 8ième ligne et vérifier que la formule est vraie pour $n = 3$ et $m = 3$.
2. Montrer par récurrence que la formule est vraie. *Indication :* dans ce raisonnement, m est fixé, et la récurrence se fait sur n.
3. À l'aide de la formule de Pascal, mettre la somme de la formule sous la forme d'une somme télescopique et retrouver ainsi le résultat de la question précédente sans faire de récurrence.

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^{2k}}{3^{k+1}}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \mathrm{e}^{-k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2^{k-1} + 1) \binom{n}{k}$

($\star$) d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 9. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^n$ où n est un entier naturel non nul.

1. Développer l'expression de f.
2. Calculer de deux manières $f'(x)$.
3. En déduire $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} k2^k\binom{n}{k}$.

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$A_n = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} \quad B_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}$$
$$P_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i} \quad I_n = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{2n}{2j+1}.$$

1. Calculer A_n et B_n.
2. En séparant termes pairs et impairs, exprimer A_n en fonction de P_n et I_n. Faire de même pour B_n.
3. En déduire les valeurs de P_n et I_n.

Exercice 11. À l'aide de la formule du binôme, démontrer que

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est multiple de 3.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est multiple de 6.

Exercice 12. On note k et n deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$.

1. Montrer, à partir de la formule explicite des coefficients du binome, que pour tout $i \in [\![k, n]\!]$,
$$\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}.$$
2. Donner une interprétation en terme de dénombrement de la formule précédente.
3. En déduire que pour tout réel x, on a $\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}x^{n-i} = \binom{n}{k}(1+x)^{n-k}$.