TD 3 : logique et ensembles

1 Propositions logiques

Exercice 1. Pour P, Q et R des propositions logiques, écrire les tables de vérité des propositions « $(P$ et $Q) \Rightarrow R$ » et de « $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ ». Que peut-on en conclure ?

Exercice 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et P_1, P_2 et P_3 les propositions suivantes :

— P_1 : « $\forall x \in I,\ x \geqslant 2$ »,

— P_2 : « $\exists x \in I,\ x > 1$ »,

— P_3 : « $\forall x \in I,\ \exists y \in I,\ x + y = 2$ ».

1. Écrire, à l'aide des quantificateurs, les négations des propositions P_1, P_2 et P_3.
2. On suppose pour cette question que $I = [2, 4]$.
   Pour chacune des propositions P_1, P_2 et P_3, déterminer si elle est vraie ou fausse en justifiant rigoureusement.
3. Même question avec l'intervalle $I = [-1, 3]$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\exists k \in \mathbb{N},\ n^3 + 2n = 3k$ ».

1. Vérifier que $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
2. Développez $(n+1)^3$ puis démontrer, par récurrence, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Énoncer à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes portant sur une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis écrire leur négation.

1. (u_n) est croissante.
2. (u_n) est géométrique.
3. (u_n) est bornée.

Exercice 5.

1. Donner une condition nécessaire mais non suffisante sur x pour que $x^2 \geqslant 1$.
2. Donner une condition suffisante mais non nécessaire sur x pour que $x^2 \geqslant 1$.

Exercice 6. Dire si ces affirmation sont vraies.

1. Pour que le produit de deux réels soit positif, il suffit que ces réels soient positifs.
2. Pour que le produit de deux réels soit positif, il faut que ces réels soient positifs.
3. Il est nécessaire que $x > 0$ pour que $2x + 3 > 0$.
4. Il suffit que $x > 0$ pour que $2x + 3 > 0$.

2 Ensembles

Exercice 7. Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Écrire à l'aide des ensembles A, B et C et des opérations sur les ensembles (intersection, réunion et complémentaire) les ensembles suivants :

1. L'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B, mais pas aux deux à la fois.
2. L'ensemble des éléments de E qui appartiennent exactement à deux des trois ensembles A, B et C.
3. L'ensemble des éléments qui n'appartiennent à aucun des trois ensembles.

Exercice 8. Soient X et Y deux parties d'un ensemble E. Écrire de manière plus simple les ensembles suivants :

1. $A = (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y})$,
2. $B = (X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y})$,
3. $C = (X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) \cap (\overline{X} \cup Y) \cap (\overline{X} \cup \overline{Y})$,
4. $D = (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y})$.

Exercice 9. En considérant $\mathbb{R}^2$ comme l'ensemble des points du plan (rapporté à un repère orthonormé), représenter graphiquement les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ ci-dessous :

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\right\}, \\ B &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0\right\}, \\ C &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ et } x \geqslant 0\right\}. \end{aligned}$$

Exercice 10. Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

1. Montrer que si $A \cup B = A \cap B$, alors $A = B$.
   On pourra montrer l'égalité d'ensembles par double inclusion.
2. $(\star)$ Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.

Exercice 11. Montrer que les deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}^2$ définis ci-dessous sont égaux.

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + 2y = 1\right\}, \\ B &= \left\{\left(1 - t, \tfrac{1}{2}t\right) ;\ t \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

3 Raisonnements

Exercice 12. Soit a et b des réels. Écrire la contraposée de l'implication : $(a = 0 \text{ ou } b = 0) \implies ab = 0$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par contraposée, que

$$(n^2 - 1) \text{ n'est pas divisible par } 8 \implies n \text{ est pair.}$$

On pourra utiliser le fait que si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 3$.

Exercice 14.

1. Montrer en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.
3. En déduire que pour m, n, p et q des entiers relatifs, on a

$$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \iff m = p \text{ et } n = q.$$

Exercice 15. Soient a, b et c trois réels de $[0, 1]$.

1. Déterminer le maximum sur l'intervalle $[0, 1]$ de la fonction f définie par $f(x) = x(1 - x)$.
2. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que l'un au moins des nombres $a(1 - c)$, $b(1 - a)$ et $c(1 - b)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice 16. Montrer que, pour tout nombres réels a et b, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, a \times 2^n + b \times 3^n = 0 \iff a = b = 0.$$

Exercice 17. Soit a un réel. Prouver l'équivalence :

$$a = 0 \iff \forall \epsilon > 0,\ |a| \leqslant \epsilon.$$

Exercice 18. En procédant par analyse et synthèse, montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 19. En procédant par analyse et synthèse, déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, f(m + n) = f(m) + f(n).$$

Exercice 20. En procédant par analyse et synthèse, résoudre $|2x - 1| = x + 2$ pour x dans $\mathbb{R}$.

Exercice 21. En procédant par analyse et synthèse, déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$