TD 4 : Fonctions usuelles et étude globale de fonctions

Exercice 1. Simplifier les nombres ci-dessous (pour x un réel convenable et n entier).

$A = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}+\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$ $\quad F = \frac{\sqrt{e^{3x+5}}}{(e^x)^2 e^{-\frac{1}{2}x+2}}$

$B = \frac{3^{-2}\times 27}{(3^2)^3\times 3^{-1}}$ $\quad G = \frac{2^{x+1}6^x}{3^x} - 4^x$

$C = \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}$ $\quad H = \frac{e^{3-\ln(2)}}{e^2}$

$D = \exp\left(\ln(4)+|2\ln(2)-2|\right)$ $\quad I = \frac{\left(x\sqrt{x}\right)^5}{(x^2\times x)^3}$

$E = 7\times 3^n - 9\times 3^{n-1} - 3^{n+1}$ $\quad J = 16^{\frac{1}{4}} + 9^{\frac{1}{2}} - 125^{\frac{1}{3}}$

$$K = 2\ln\left(\sqrt{x^2-1}\right) - \ln(x-1) - \ln(x+1)$$

Exercice 2. Compositions de fonctions.

1. Pour $f : x \mapsto x^2+2x$ et $g : x \mapsto x+1$, donner une expression simplifiée pour les fonctions $g\circ f$ et $f\circ g$.
2. Pour $f : x \mapsto x^2+2x$ et $g : x \mapsto \frac{x}{x+1}$, donner une expression simplifiée pour les fonctions $g\circ f$ et $f\circ g$.
3. Pour $f : x \mapsto \ln(x)^2 - \ln(x)$ et $g : x \mapsto e^{-x}$, donner une expression simplifiée pour les fonctions $g\circ f$ et $f\circ g$.

Exercice 3. Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, étudier le domaine de définition, puis calculer la dérivée là où elle est définie.

$f_1 : x \mapsto \ln(1+x^3)$ $\quad f_8 : t \mapsto \sqrt{\ln(t)+1}$

$f_2 : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-1}$ $\quad f_9 : a \mapsto 2^a$

$f_3 : y \mapsto \ln(y)^4$ $\quad f_{10} : x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$f_4 : x \mapsto x^2 e^{-\frac{1}{x}}$ $\quad f_{11} : x \mapsto \ln\left(e^{x+1}+e^{x-1}\right)$

$f_5 : t \mapsto \ln\left(\ln(t)\right)$ $\quad f_{12} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}$

$f_6 : \theta \mapsto \cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2$ $\quad f_{13} : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$f_7 : t \mapsto \frac{\cos\left(t^2\right)}{t}$ $\quad f_{14} : x \mapsto \left(1+x\ln(x)\right)^3$

Exercice 4. Étudier chacune des fonctions définies ci-dessous (domaine de définition et de dérivabilité, calcul de la dérivée, tableau de variations et limites au bord du domaine) puis représenter l'allure de leur graphe dans un repère orthonormé en s'aidant entre autres des tangentes horizontales et des points d'annulation.

$$f : x \mapsto \sqrt{x}-x,\quad g : x \mapsto x\ln(x),\quad h : x \mapsto \frac{x^2-x-1}{x^2+x+1}.$$

Exercice 5. Étudier le domaine de définition puis la parité de

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

Exercice 6. Soient f et g deux fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$. Déterminer la parité de $f+g$, $f\times g$, et $f\circ g$.

Exercice 7. Représenter dans un même repère le graphe des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

Exercice 8. Démontrer, à l'aide d'une étude de fonction, que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{2x} - 2xe^x \geqslant 1$.

Exercice 9. Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$, les inéquations ou équations suivantes :

$(E_1) :\ 3e^x - 2e^{\frac{x}{2}} < 1,$
$(E_2) :\ \ln(9x^2) - 2\ln(3) = 2,$
$(E_3) :\ \exp(-2x^2)\exp(3x) \leqslant e,$
$(E_4) :\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \geqslant 0,99,$
$(E_5) :\ e^{2x} - e^x < 6,$
$(E_6) :\ e^{x^2-1} = \ln(2),$
$(E_7) :\ 2\ln(1+x^2) \geqslant 3.$

Exercice 10. Pour tout $x > 0$, on définit

$$f(x) = 2\ln(x) - x + \frac{1}{x}.$$

1. Calculer la dérivée de f et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.
3. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 au graphe de f.
4. Représenter l'allure du graphe de f dans un repère orthonormé, et celui de sa bijection réciproque.

Exercice 11. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^x}$.

1. Donner le domaine de définition de f, puis calculer sa dérivée.
2. On note $g : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$.
   a. Établir le tableau de variations de g.
   b. Justifier rigoureusement que g s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$, en un réel que l'on notera α.
   c. Donner, en fonction de α, le tableau de signes de g.
3. Montrer que $f(\alpha) = \alpha - 1$ et que α vérifie l'encadrement suivant : $1 \leqslant \alpha \leqslant 1 + \mathrm{e}^{-1}$.
4. Dresser le tableau de variations de f en précisant bien les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x) - x\big) = 0$.

   On admet que cela signifie que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote au graphe de f en $-\infty$.
6. Représenter, dans un repère orthonormé, l'allure du graphe de f, à l'aide entre autres de ses tangentes horizontales et de ses asymptotes.

Exercice 12. On étudie la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

1. Donner le domaine de définition de f, calculer sa dérivée et en déduire son tableau de variations.
2. Préciser les limites de f aux bords de son domaine. On pourra utiliser $\lim\limits_{x\to1^-} \ln(x) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x) = 0^+$.
3. Tracer l'allure du graphe de f dans un repère orthonormé.
4. Préciser, en fonction de la valeur de $y \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions à l'équation, $f(x) = y$.

Exercice 13. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Déterminer, en distinguant éventuellement plusieurs cas selon la valeur de a, le nombre de solutions aux équations :

$(E_1) :\ \ln(x + a) = x$,

$(E_2) :\ x^3 + a = 3x$,

$(E_3) :\ x^a = a^x$, en supposant $a > 0$.

Remarque : on ne demande pas la valeur des solutions, seulement leur nombre.

Exercice 14. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

1. Calculer la dérivée de f et en déduire ses variations.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à préciser.
3. Résoudre, pour $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ et en déduire une expression de $f^{-1}(y)$.

Exercice 15. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{|x|}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour chacune des propositions logiques ci-dessous, démontrer si elles sont vraies ou fausses (avec une rédaction rigoureuse et concise).

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)$,
2. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$,
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| > 1 \Rightarrow f(x) < \frac{1}{2}$,
4. $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$,
5. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant f(x_0)$,
6. $\forall y \in]0, \frac{1}{2}], \exists! x \in]0, 1], f(x) = y$.