TD 5 : Nombres complexes

1 Formes algébrique et exponentielle, représentation graphique

Exercice 1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

$$z_1 = \frac{1}{1+3i}, \quad z_2 = (1+i)^2, \quad z_3 = \frac{2-i}{1+i},$$
$$z_4 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}, \quad z_5 = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}.$$

Exercice 2. Représenter dans le plan puis mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants.

$$z_1 = 3+3i, \quad z_2 = -\sqrt{3}-i, \quad z_3 = -\frac{4}{3}i,$$
$$z_4 = -2, \quad z_5 = \sqrt{3}i - 3, \quad z_6 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} + \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Exercice 3. Pour quels entiers n le nombre $(1+\sqrt{3}i)^n$ est-il réel ? imaginaire pur ?

Exercice 4. Pour $\theta, \theta' \in]-\pi, \pi[$, mettre sous forme exponentielle $\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta'}$ et $\dfrac{1-\mathrm{e}^{i\theta}}{1+\mathrm{e}^{i\theta}}$.

Exercice 5. Mettre sous forme algébrique $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{125}$.

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

a) $3 + \bar{z} - 2iz = 5 - 3i$,
b) $|z-2-i| = 3$,
c) $|z-1| = |z-i|$.

Indication : on pourra raisonner géométriquement pour les deux dernières.

Exercice 7. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 3$, $b = i$ et $c = 2+3i$. Déterminer l'affixe de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 8. Pour $z \in \mathbb{C}$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1$, $b = z$ et $c = z^2$. Déterminer pour quels z ces trois points sont alignés.

Exercice 9. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Montrer que pour $u \in \mathbb{U}$, on a $\overline{u} = \frac{1}{u}$.
2. Montrer que $\forall u \in \mathbb{U}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \ \left|u - \dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{|\overline{u}-z|}{|z|}$.
3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \ \dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{U}$

Exercice 10. Déterminer les complexes z tels que z, $1-z$ et $1/z$ ont même module.

Exercice 11. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z+i| = |z-i| \iff z \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

a) $1 + z + z^2 + z^3 = 0$,
b) $z^2 = |z|$,
c) $z^3 = \overline{z}$,
d) $z^4 = 3 + 4i$.

2 Moivre et trigonométrie

Exercice 13. Linéariser les expressions : $\sin(x)^3$, $\cos(x)^3$ et $\sin(x)^2\cos(x)^2$.

Exercice 14.
1. Démontrer que pour p et $q \in \mathbb{R}$,
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$
2. Déterminer des formules semblables pour la différence de deux cosinus et la somme de deux sinus.
3. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0.$$

Exercice 15. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Mettre sous forme exponentielle $1 + \mathrm{e}^{i\theta}$.
2. Calculer et simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ik\theta}$.
3. En déduire des expressions factorisées de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Exercice 16. Soit $a \in]0, \pi[$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(a)^k \cos(ka)$.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les valeurs de

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}.$$

Indication : calculer $A_n + iB_n$.

3 Racines de polynômes d'ordre 2, suites récurrentes d'ordre 2

Exercice 18.
1. Calculer sous forme algébrique les racines carrées de $1+i$.
2. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$ à l'aide de racines carrées.

Exercice 19. Déterminer les racines des polynômes de degré 2 suivants :
1. $P_1(z) = iz^2 + (1-3i)z + 4i$
2. $P_2(z) = z^2 - (1+i)z + i$
3. $P_3(z) = iz^2 + (i+2)z + 1 - 3i$

Exercice 20. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$.
Déterminer une expression du terme général de u_n.

Exercice 21. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \mathrm{e}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.
Donner l'expression explicite du terme général u_n.
Indication. On pourra étudier la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n)$.

Exercice 22. Soient a, b et c trois nombres complexes avec $c \neq 0$. On cherche à déterminer l'expression du terme général de la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence (E) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$.
1. On suppose dans cette question que $a + b \neq 1$.
   a. Déterminer quelle suite constante vérifie la même relation de récurrence (E) que la suite (u_n).
   b. On note λ la valeur d'une telle suite constante, et on définit la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - \lambda$. Montrer que la suite (v_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.
   c. Déterminer le terme général de (v_n), puis de (u_n), dans le cas $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = -1$.
2. On suppose dans cette question que $a + b = 1$. On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - u_n$.
   a. Montrer que la suite (w_n) est arithmético-géometrique.
   b. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n à partir des w_k pour $k \in [\![1, n]\!]$ à l'aide d'une somme télescopique.
   c. Calculer le terme général de (w_n), puis de (u_n), dans le cas $a = 4$, $b = -3$ et $c = 2$.

4 Racines n-ièmes de l'unité

Exercice 23. Déterminer les racines 4-ièmes de z_1 et z_2 :
$$z_1 = -119 + 120i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{1+i}.$$

Exercice 24. Soit $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$ et $u = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
1. Calculer ω^7 puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \omega^k$.
2. Calculer $u + v$ et uv.
3. Déterminer un polynôme de degré deux dont u et v sont les racines et en déduire la forme algébrique de u et de v.

Exercice 25. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
1. Représenter géométriquement j, j^2, $\overline{j}$, $\frac{1}{j}$.
2. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$(z+1)(z+j)(z+j^2) = (1+z)(1+jz)(1+j^2z).$$
4. Résoudre : $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et on cherche à calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(1+\omega^k\right)^n$.
1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\omega^p = 1$ si et seulement si p est divisible par n.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Développer $\left(1 + w^k\right)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. En déduire que $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{k=1}^{n} (\omega^i)^k$.
4. Conclure que $S_n = 2n$. *Attention aux conditions pour appliquer la formule de somme à termes géométriques.*