# TD 6 : Équations différentielles

## 1 Intégration

**Exercice 1.** Déterminer, pour chaque fonction ci-dessous, une primitive en précisant le (ou les) intervalle(s) de validité.

1. $x \mapsto e^{3x} + 2x^4$
2. $x \mapsto xe^{-x^2}$
3. $t \mapsto \sqrt{1+2t}$
4. $t \mapsto \dfrac{1}{t}\ln(t)$
5. $\theta \mapsto \cos(\theta)^2$
6. $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$

**Exercice 2.** Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x^2 - x|\, dx$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^x+3}\, dx$
3. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{t^2+2t-1}{t+1}\, dt$
4. $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

**Exercice 3.** Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par parties.

1. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} (x-1)\cos(x) dx$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\ln(1+x) dx$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(1+x^2) dx$
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\arctan(x^2) dx$

**Exercice 4.** Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.

1. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \qquad (x = \ln(t))$
2. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt \qquad (t = u^2)$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+e^t} dt \qquad (u = e^t)$

**Exercice 5** (Recherche de primitives)**.**

1. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, une primitive de la fonction arctangente.
2. Déterminer une primitive de la fonction tangente sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On rappelle que $\forall\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.
3. a. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
   b. En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur l'intervalle $]-1, 1[$.

## 2 Équations différentielles du premier ordre

**Exercice 6.** Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes.

1. $2y' - 3y = 0$
2. $y' - xy = 0$
3. $(1+x^2)y' + 2xy = 0$
4. $y' - \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}y = 0$

**Exercice 7.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle spécifié.

1. $y' - 3y = 2 \quad$ sur $\mathbb{R}$
2. $y' + y = 1 + x + xe^{-x} + \sin(x) \quad$ sur $\mathbb{R}$
3. $y' - 2xy = \sinh(x) - 2x\cosh(x) \quad$ sur $\mathbb{R}$
4. $(1+x)^2y' + xy = \sqrt{1+x^2} \quad$ sur $\mathbb{R}$
5. $x^3y' + 4(1-x^2)y = x^4 \quad$ sur $\mathbb{R}_+^*$
6. $y' + \tan(x)y - \sin(2x) = 0 \quad$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

**Exercice 8.** Résoudre les problèmes de Cauchy suivant

1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$, avec $y(0) = 1$.
2. $(1-x)y' - (1+2x)y = 1 + 2x$ sur $]-1, 1[$, et avec $y(0) = 0$.
3. $\cos(x)y' + \sin(x)y = 1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, avec $y(0) = 2$.

**Exercice 9** (Équation fonctionnelle 1)**.** Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $f(s+t) = f(s)f(t)$.

**Exercice 10** (Équation fonctionnelle 2)**.** Décrire toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ 2xf(x) = 3\int_0^x f(t)dt.$$

**Exercice 11.** On considère une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T$-périodique, pour un certain $T > 0$. On pose $\bar{a} = \frac{1}{T}\int_0^T a(x)dx$ la valeur moyenne de $a$. Montrer que si $f$ est une solution de l'équation différentielle

$$y' - a(x)y = 0$$

sur $\mathbb{R}$, alors $x \mapsto e^{-\bar{a}x}f(x)$ est $T$-périodique.

## 3 Équations différentielles du deuxième ordre

**Exercice 12.** Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$.

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 2y' + 2y = 0$

**Exercice 13.** Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue $y$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. $y'' - 2y' + y = te^t$
2. $y'' - 4y' + 5y = \cos(2t) - 2\sin(2t)$
3. $y'' + 9y = \cos(2t)e^t$
4. $y'' + 4y' - 5y = 2e^t$
5. $y'' + y' + y = e^t \cos(t)$
6. $y'' - 3y' + 2y = (t^2 + 1)e^t$

**Exercice 14.** Commenter la résolution suivante :

« On considère l'équation différentielle d'inconnue $y$, $x^2y(x)'' - xy(x)' = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. L'équation caractéristique est $x^2r^2 + xr = 0$, dont les racines sont $r = 0$ et $r = -1/x$. On en déduit que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto A + B\exp(-1/x),\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}. \text{ »}$$

**Exercice 15.** Soit $m \in \mathbb{R}$. En fonction de la valeur de $m$, trouver les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + my = \cos(x)$$

**Exercice 16** (Équation fonctionnelle 1)**.** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + f(-x) = e^x.$$

**Exercice 17** (Équation fonctionnelle 2)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions $f$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = f(\lambda - x).$$

**Exercice 18.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différenteielle

$$(t^2 + 1)y'' + (t^2 - 2t + 1)y' - 2ty = 0$$

en introduisant la fonction $z = y' + y$.

**Exercice 19** (Un changement de variable)**.** On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{2x^2}y = 0 \qquad (E)$$

sur $]0, +\infty[$. Pour ce faire, on définit, pour $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y(e^t)e^{-t/2}$.

1. Soit $x > 0$. Exprimer $y(x)$ en fonction de $z(\ln(x))$.
2. En déduire que la fonction $z$ vérifie une équation différentielle $(E')$ d'ordre 2 à coefficients constants.
3. Résoudre $(E')$, puis résoudre $(E)$.

**Exercice 20** (e3a PSI 2019)**.** On considère l'équation différentielle d'ordre 3

$$y^{(3)} - y = 0. \qquad (E_1)$$

1. Soit $f$ une solution de $(E_1)$. On pose $g = f'' + f' + f$. Déterminer une équation différentielle du premier ordre $(E_2)$ vérifiée par $g$.
2. Résoudre $(E_2)$.
3. En déduire les solutions de $(E_1)$.