TD 13 : Espaces vectoriels I

1 Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $(E, +, .)$:

1. $E = \mathbb{R}^2$
   a. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$
   b. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
   c. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 0\}$
2. $E = \mathbb{R}[X]$
   a. $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$, $n \in \mathbb{N}$
   b. $B = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 2\}$
   c. $C = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid XP' - P = 0\}$
3. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   a. A l'ensemble des fonctions $f \in E$ 2π-périodiques.
   b. $B = \left\{f \in E \text{ continue} \mid \int_0^1 f(x)dx = 0\right\}$
   c. C l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
   $$y'' + y' + y = 1.$$

Exercice 2. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels usuels.

1. $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = 0\}$.
2. $B = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r\}$ (ensemble des suites arithmétiques).
3. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$.
4. $D = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)\}$ (ensemble des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$).
5. $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n\}$ (ensemble des suites géométriques).

2 Familles génératrices, familles liées

Exercice 3. Combinaisons linéaires dans différents espaces vectoriels.

1. Est-ce que $P = X^3 + 2X^2 - X$ est une combinaison linéaire de $P_1 = X^3 - X$, $P_2 = X^2 + 2X - 2$ et $P_3 = 2X - 1$?
2. Est-ce que $u = (1, 2, -1)$ est une combinaison linéaire $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$?
3. Est-ce que $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des matrices
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \text{et } A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ?$$

Exercice 4. Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$: déterminer une famille génératrice des ensembles de solutions des systèmes linéaires homogènes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

Exercice 5. Montrer que les ensembles suivants sont chacun un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel, puis en déterminer une famille génératrice.

1. $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) + P'(1) = 0\}$.
2. $F_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid MA = AM\}$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Pour chacune des familles $\mathcal{F}$ de vecteurs ci-dessous, déterminer si elle est libre et/ou génératrice de l'espace vectoriel E.

Si la famille est liée, donner explicitement une relation linéaire entre les vecteurs. Si elle n'est pas génératrice, donner explicitement un vecteur de E qui n'est pas combinaison linéaire de la famille.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$.
2. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = (A, B, C)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$, avec les polynômes $P_1 = X^2 + 2X - 1$, $P_2 = X - 1$ et $P_3 = X^2 + 1$.
4. $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$, avec
$$(X_1, X_2, X_3, X_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice 7. Exemples de base dans des espaces vectoriels usuels.

1. On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2.
   a. Montrer que la famille $(X + 1, X - 1, X^2 - 1)$ est une base de E.
   b. Donner les coordonnées dans cette base du polynôme X^2.
2. On note $E = \mathbb{R}^4$ et $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 1)$, $u_3 = (-1, 1, 1, -1)$ et $u_4 = (0, 0, 1, 1)$.
   a. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de E.
   b. Donner les coordonnées $(1, 2, 3, 4)$ dans cette base.

Exercice 8. On définit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1, 1, 1)$, $v_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 1, 2)$, $v_2 = (2, 1, 0)$.

1. Montrer que u_1 et v_1 sont des combinaisons linéaires de la famille (u_2, v_2).
2. En déduire que $\mathrm{Vect}(u_1, v_1) \subset \mathrm{Vect}(u_2, v_2)$.
3. Montrer finalement que $\mathrm{Vect}(u_1, v_1) = \mathrm{Vect}(u_2, v_2)$.
4. On cherche à retrouver le résultat de la question 3. par une autre méthode.
   a. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer à quelle condition le vecteur (x, y, z) est combinaison linéaire de (u_1, v_1).
   Indication : en résolvant, sous forme de système d'inconnues α et β, l'équation $\alpha u_1 + \beta v_1 = (x, y, z)$ on obtient une condition de compatibilité.
   b. En déduire que
   $$\mathrm{Vect}(u_1, v_1) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\right\}.$$
   c. Faire de même pour $\mathrm{Vect}(u_2, v_2)$ et retrouver ainsi le résultat de la question 3.

Exercice 9.
1. Justifier que l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $S_a = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + af(x) = 0\}$
   a. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   b. Montrer que si $f \in S$, alors $g : x \mapsto \mathrm{e}^{ax} f(x)$ est une fonction constante.
   c. Conclure que $S = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \mathrm{e}^{-ax}\right)$

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. On suppose que $F \cap G = \{0_E\}$. Montrer que pour tout $u, u' \in F$ et $v, v' \in G$,
$$u + v = u' + v' \quad \Longrightarrow \quad u = u' \text{ et } v = v'.$$

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$, et $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E et $u \in E$.
1. Montrer que si $u \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ alors $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n, u) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.
2. Montrer que si $(v_1, \dots, v_n)$ est libre et $u \notin \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$, alors $(v_1, \dots, v_n, u)$ est libre.
   Indication : démontrer la contraposée, c'est à dire supposer que $(v_1, \dots, v_n, u)$ est liée et conclure que
3. On suppose maintenant que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $u_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} e_i$.
   a. Montrer par récurrence, pour $k \in [\![1, n]\!]$, que $(u_1, \dots, u_k)$ est libre .
   b. Montrer par récurrence que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   c. En déduire que $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.

Exercice 12. On note u, v, w les trois suites réelles définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1$, $v_n = 2^n$ et $w_n = 3^n$.
1. Soit α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{-n}(\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n) = \gamma$
2. Montrer, en s'inspirant du résultat précédent, que la famille (u, v, w) est libre.
3. On note $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$. Montrer qu'il existe une unique suite $(x_n) \in F$ telle que $x_0 = 1$, $x_1 =$ et $x_2 = 6$ et donner son terme général.

3 Applications linéaires

Exercice 13. Pour chacune des applications définies ci-dessous, déterminer si elle est linéaire. Si c'est le cas, donner une famille génératrice de son image et de son noyau.

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y + 1, 2y - 1) \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y - z, x - 2y + z) \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) \mapsto P(X + 1) - P(X) \end{cases}$
4. $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto xyz \end{cases}$
5. $f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto (P(2), P'(1)) \end{cases}$
6. $f_6 : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto \frac{1}{2}(M + M^t) \end{cases}$

Exercice 14. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par
$$f\big((x, y, z)\big) = \frac{1}{2}\left(x + y + z, 2y, x - y + z\right).$$
1. Pour $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de votre choix, calculer $f(u)$ puis $f(f(u))$. Généraliser en démontrant que $f \circ f = f$.
2. Déterminer $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(v_1)$.
3. Déterminer v_2 et $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$. Calculer $f(v_2)$ et $f(v_3)$.
4. Vérifier que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $\mathcal{B}$.
5. Pour un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, déterminer les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de celles de u dans $\mathcal{B}$.

Exercice 15. On considère l'application linéaire f définie par
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \quad P \quad \longmapsto (P(-1), P(0), P(1)). \end{cases}$$

1. Déterminer le noyau de f. *Indication :* penser à la relation entre nombre de racines et degré.
2. Montrer que $\big(f(1), f(X), f(X^2)\big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire que f est un isomorphisme.
4. Déterminer $P_1 = f^{-1}\big((1,0,0)\big)$, $P_2 = f^{-1}\big((0,1,0)\big)$ et $P_3 = f^{-1}\big((0,0,1)\big)$.
5. En déduire une expression générale pour $f^{-1}\big((x,y,z)\big)$, où $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 16. On note $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de E défini par

$$f : X \mapsto AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note F l'ensemble des vecteurs invariants par f, c'est à dire $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,|\, f(X) = X\}$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. Que peut-on en déduire pour f ? On admet que f est aussi surjective.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
3. Déterminer deux vecteurs X_1 et X_2 tels que $F = \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$.
4. Soit $Y \in E$. Montrer que $f(Y) = 2Y$ si et seulement si $Y \in \mathrm{Vect}(X_3)$, avec X_3 un vecteur à préciser.
5. Montrer que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de E.
6. Pour un vecteur $X \in E$, donner les coordonnées de $f(X)$ dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées de X dans $\mathcal{B}$.
7. En déduire une expression de $f^{-1}(Y)$ pour $Y \in E$ à l'aide des coordonnées dans $\mathcal{B}$.

Exercice 17. On définit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-2,1,-1)$.

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit v_1, v_2, v_3 des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe au plus une application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_2$ et $f(u_3) = v_3$.

   Indication. On pourra supposer qu'il existe deux applications f_1 et f_2 qui vérifient les égalités ci-dessus et montrer qu'alors $f_1 - f_2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ en utilisant la décomposition d'un vecteur dans la base (u_1, u_2, u_3).
3. Pour $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ et $v_3 = (0,0,1)$ déterminer explicitement une telle application f.

Exercice 18. Soient E et F des espaces vectoriels, $\mathcal{F} = (u_1, \dots u_n)$ une famille de vecteurs de E et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Montrer que si $\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est une famille libre.
2. Montrer que si $\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$ est génératrice de F et $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, alors $\mathcal{F}$ est génératrice de E.
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est libre et $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \{0_E\}$, alors $\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$ est libre.

Exercice 19. Soient E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que : $\quad g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2. Montrer que : $f \circ g = g \circ f \implies \forall u \in \mathrm{Ker}(f), g(u) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\forall v \in \mathrm{Im}(f), g(v) \in \mathrm{Im}(f)$.

   Cela signifie que si f et g commutent, alors le noyau et l'image de f sont stables par g.
3. Montre que : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
4. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g \circ f) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0_E\}$.

Exercice 20. On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et f l'application qui a une suite (u_n) de E associe la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Est-il injectif ? surjectif ?
3. Déterminer g un endomorphisme de E tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
4. Peut-on trouver h un endomorphisme de E tel que $h \circ f = \mathrm{Id}_E$?