TD 15 : Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1. Montrer que $((1,1,1),(2,1,1),(2,1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées du vecteur (a,b,c) dans cette base.

Exercice 2. Montrer qu'une famille de vecteurs est une base à l'aide de la dimension.

1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ et les polynômes
$$P_1 = X^3 + X, \quad P_2 = X^3 - 2X^2,$$
$$P_3 = X^2 + 3X \quad \text{et} \quad P_4 = X - 1.$$
Montrer que (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que (A, B, C, D) est une base de E.
3. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On définit les vecteurs
$$u_1 = e_2 + 3e_3, \quad u_2 = e_3 - e_1 \quad \text{et} \quad u_3 = e_1 + 2e_2.$$
Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de E.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $P_0 = 1$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$,
$$P_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i).$$
Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3. On définit les vecteurs de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ suivants :
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
On définit les espaces vectoriels $F_1 = \mathrm{Vect}(u_1)$, $F_2 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, $\ldots$, $F_5 = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_5)$, et $G = \mathrm{Vect}(u_4, u_5)$.

1. Déterminer les dimensions de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 et celle de G.
2. On étudie l'ensemble $F_3 \cap G$.
   a. Montrer que $F_3 \cap G$ est un sous espace-vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   b. Pour $v = \alpha u_4 + \beta u_5$ un élément de G, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, montrer que : $v \in F_3 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$.
   c. En déduire que $F_3 \cap G$ est de dimension 1 et préciser un vecteur qui l'engendre.
3. En s'inspirant de la question précédente, déterminer $\dim(F_2 \cap G)$ et $\dim(F_4 \cap G)$.

Exercice 4. Calculer le rang des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 5. On considère l'application linéaire
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+y+2z, y+z-t, x-y+2t) \end{array}$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. À l'aide du théorème du rang, déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 6. On considère un espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. En déduire que $\mathrm{rg}(f) \leqslant \frac{n}{2}$.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = Q' + Q$.

Exercice 8. Déterminer le rang de l'application
$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^t - A \end{array}$$

Exercice 9. On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles, et a, b deux nombres réels fixés tels que $a^2 + 4b > 0$. On définit
$$F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}$$
et
$$\varphi : \begin{array}{rcl} F & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1). \end{array}$$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E.
2. Déterminer r et s deux réels distincts tels que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

3. Montrer que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre et en déduire que $\dim(F) \geqslant 2$.
4. Montrer que φ est linéaire puis montrer à l'aide d'une récurrence, que $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.
5. En déduire que F est de dimension 2.

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère les polynômes $P_k = (X-a)^k$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

1. Montrer que $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Quelles sont les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base ?