TD 17 : Matrices d'applications linéaires

Exercice 1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soient $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,-1,0)$, $e_3 = (1,1,1)$, et $f_1 = (0,1,1)$, $f_2 = (1,0,1)$, $f_3 = (1,1,0)$.

1. Montrer que $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire les matrices de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{E}$, $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}$, et de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{F}$, $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{F}}$.
3. En déduire la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$.

Exercice 2. Déterminer les matrices dans les bases canoniques des applications linéaires suivantes :

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (2x-y, x+y-z, y-3z) \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto XP' - P \end{cases}$

Exercice 3. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer l'image et le noyau (en en donnant une base) de l'application linéaire canoniquement associée :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 9 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}$ sa base canonique. On considère les endormophismes de E suivants :

$$f : \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto P(X+1) \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto P(X-1) \end{cases}$$

1. Calculer les matrices $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.
2. Montrer que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
3. En déduire sans calcul que la matrice N est l'inverse de M.
4. Généraliser le résultat précédent pour déterminer l'inverse de la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{n}{n} \\ & 1 & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & (0) & & 1 & \binom{n}{1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. On note $u = (1,-1,1)$ et $v = (0,-1,2)$. Calculer $f(u)$ et $f(v)$ et exprimer ces vecteurs comme combinaison linéaire de u et de v.
2. Justifier que $\mathcal{B} = \big(u, v, (1,0,0)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

   Indication. C'est la matrice des coordonnées des vecteurs $f(u)$, $f(v)$ et $f(1,0,0)$ dans la base $\mathcal{B}$, et pas dans la base canonique.
4. En déduire que $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et vérifier ce résultat directement à partir de la matrice A.

Exercice 6. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$u(e_1) = e_1 + e_2, \quad u(e_2) = -e_1 + 2e_2.$$

1. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $v = xe_1 + ye_2$. Déterminer la matrice de $u(v)$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. On pose $f_1 = e_2$ et $f_2 = e_1 + e_2$. Vérifier que $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Déterminer $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{F}}$ et $P_{\mathcal{F}\to\mathcal{B}}$.
5. En utilisant la formule de changement de base, en déduire la matrice de u dans la base $\mathcal{F}$, puis les expressions de $u(f_1)$ et $u(f_2)$ en fonction de f_1 et f_2.

Exercice 8. On considère les polynômes $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X + 1$, $P_3 = 2X^2 - X$, et on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
3. Soint $P(X) = X^2 - X + 2$. Donner les coordonnées de P dans $\mathcal{B}'$.
4. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ donné par $\theta(P) = XP'$. Déterminer la matrice de θ dans la base $\mathcal{B}'$.