TD 18 : Projecteurs

Exercice 1. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y = 0\},$$
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + z = 0\}.$$

1. Déterminer les dimensions de F, de G, de $F \cap G$.
2. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$. Cette somme est-elle directe ?

Exercice 2. Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$p : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z).$$

1. Donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que p est un projecteur et déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.
3. Donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ obtenue en concaténant une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et une base de $\mathrm{Im}(p)$.
4. Déterminer la matrice de p dans $\mathcal{B}$.
5. On note q la projection sur $\mathrm{Ker}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$. Exprimer l'application q en fonction de p et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ puis donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Une forme linéaire est une application linéaire de rang $\leqslant 1$. On note

$$H = \mathrm{Vect}\big((1, 2, 4, 0), (-1, 1, -1, 1), (2, 0, 1, -1)\big).$$

1. Vérifier que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
   Indication. On pourra faire apparaître une condition de compatibilité dans un système linéaire en raisonnant à partir de $(x, y, z, t) \in H \Leftrightarrow \dots$
2. Choisir un vecteur u dans la liste ci-dessous tel que $\mathbb{R}^4 = H \oplus \mathrm{Vect}(u)$.
   $$(2, 3, 4, 0) \qquad (3, -1, 2, -2) \qquad (1, 2, -4, 1)$$
3. Soit $v \in E$. Déterminer, à l'aide φ et en fonction de v, un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v - \alpha.u \in H$.
4. Déterminer, à l'aide de la question précédente, la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection sur H parallèlement à $\mathrm{Vect}(u)$. Vérifier que $M^2 = M$.

Exercice 4. On note $E = \mathbb{R}_4[X]$ et on considère les sous espaces vectoriels de E :

$$F = \{P \in E \,|\, P'' = 0\},$$
$$G = \{P \in E \,|\, P(0) = P(1) = 0\}.$$

1. Montrer que la somme de F et G est directe puis que $F \oplus G = E$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X, X^2 - X, X^3 - X, X^4 - X)$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.
3. On note p la projection sur G parallèlement à F. Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.
4. Décomposer chacun des vecteurs de la base canonique de E dans $\mathcal{B}$ et en déduire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel. On dit que s est une symétrie de E si $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s^2 = \mathrm{Id}_E$. On note f et g deux endomorphismes de E.

1. On suppose que f est un projecteur. Montrer que $2f - \mathrm{Id}_E$ est une symétrie.
2. On suppose que g est une symétrie.
   a. Montrer que $\frac{1}{2}(g + \mathrm{Id}_E)$ est un projecteur.
   b. En déduire que $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.
   c. Donner la matrice de g dans une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel et p_1 et p_2 deux projecteurs de E. On cherche à savoir à quelle condition $p_1 + p_2$ est encore un projecteur.

1. Montrer que : $p_1 + p_2$ est un projecteur $\iff p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer alors que $p_1 \circ p_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
3. En déduire que : $p_1 + p_2$ est un projecteur $\iff \mathrm{Im}(p_1) \subset \mathrm{Ker}(p_2)$ et $\mathrm{Im}(p_2) \subset \mathrm{Ker}(p_1)$.
4. Montrer que dans le cas où $p_1 + p_2$ est un projecteur, on a $\mathrm{Im}(p_1 + p_2) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2)$.