1 EDO linéaires

1. Résoudre
   (a) $x' + x = \sin(t)$
   (b) $\sqrt{1+t^2}x' - tx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
2. On considère le système différentiel
$$\begin{cases} x'(t) &= & y(t) + e^{-t}, \\ y'(t) &= & 2x(t) - y(t). \end{cases}$$
   Tracer le portrait de phase du système homogène associé. Déterminer de deux manières différentes la solution maximale du système vérifiant $(x(0), y(0)) = (1, 0)$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Résoudre l'équation différentielle $v''(t) - v(t) = f(t)$.
4. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $y'' + 4y' + 3y = t$.
   (b) $y'' + 9y = (1+t)e^t$.
   (c) $y'' - 7y' + 6y = e^t$.
   (d) $y'' + 4y = \cos(2t)$.
   (e) $y'' - y = \ln(t)$.
   (f) $x^2y'' - 4xy' + (x^2+6)y = 0$.
5. *Utilisation de la résolvante.* Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle d'ordre 2
$$x''(t) + q(t)x(t) = 0. \tag{E}$$
   (a) Décrire le domaine d'une solution maximale de (E). Montrer que les zéros d'une solution non identiquement nulle sont isolés.
   (b) On note $X'(t) = A(t)X(t)$ le système différentiel d'ordre 1 associée à (E).
      i. Rappeler la définition de la résolvante R_s^t du système et ses principales propriétés.
      ii. Déterminer $\det(R_s^t)$ à l'aide de la *formule de Liouville.*
      iii. Montrer que R_0^t possède une valeur propre de module inférieur à 1.

      On suppose désormais que q est 1-périodique.
   (c) Relier R_1^{t+1} et R_0^t pour $t \in \mathbb{R}$.
   (d) Si 1 est valeur propre de R_0^1, montrer que (E) admet une solution 1-périodique non nulle.
   (e) Montrer que (E) admet une solution bornée dans le futur.

2 EDO en 1D

6. Pour chacune des EDOs suivantes, dire si le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et si les solutions maximales sont globales en temps positifs et/ou en temps négatifs.
   (a) $x' = \sin(tx)$
   (b) $y' = \mathrm{sh}(y)$
   (c) $z' = z^3$
   (d) $u' = -u^3$
   (e) $v' = \frac{1}{1+v}$
   (f) $w' = |w|^{\frac{3}{4}}$
7. On étudie l'équation différentielle
$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \text{où } f(t,x) = x^3 - \sin(2\pi t). \tag{E}$$
   (a) i. Dessiner l'isocline I_0, et indiquer le signe de f dans les régions qu'elle délimite.
      ii. Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{R}$ la fonction constante $h_c = c$ est-elle une sur-solution, (resp. une sous-solution) de (E) sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $h_c' \geqslant f(t, h_c)$ (resp. $\leqslant$) ?
   (b) Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de (E).
      i. Montrer qu'il existe $t \in I$ tel que $x(t) \leqslant 1$.
      ii. De la même manière (ou en regardant $t \mapsto -x(t+1/2)$) montrer qu'il existe $t \in I$ tel que $x(t) \geqslant -1$.
      iii. En déduire que les solutions maximales de (E) sont globales en temps négatif.
   (c) i. Déterminer les solutions de $4u'(t) = u^3(t)$.
      ii. Montrer, pour $a \leqslant b$, l'inégalité $4(b-a)^3 \leqslant b^3 - a^3$.
      iii. En déduire que si x et y sont des solutions maximales de (E), alors
$$\lim_{t \to -\infty} x(t) - y(t) = 0.$$
   (d) i. Soient, pour $n \in \mathbb{N}$, y_n et z_n les solutions maximales de condition initale respective $y_n(n) = 1$ et $z_n(n) = -1$. Montrer que pour tout $t \leqslant n$, $y_n(t) = y_0(t-n)$ et $z_n(t) = z_0(t-n)$.
      ii. Montrer que $I_n = [z_n(0), y_n(0)]$ est une suite décroissante de compacts. En déduire qu'il existe une solution maximale $w : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.
      iii. Montrer qu'une telle solution est unique.
      iv. Montrer que w est 1-périodique.
   (e) Soit x une solution maximale différente de w. Est-elle globale dans le futur ?

3 EDO autonomes et portraits de phase, étude qualitative

8. *Equation logistique*
   (a) Décrire le comportement asymptotique de $N' = rN$ selon le signe de $r \in \mathbb{R}$.
   (b) On choisit désormais $K > 0$. Discuter qualitativement du comportement de N vérifiant :
   $$\begin{cases} N' = rN(K - N), \\ N(0) = N_0 > 0. \end{cases}$$
   Résoudre le système en posant $T = 1/N$.
   (c) On rajoute un effet Allee : décrire qualitativement le comportement de N vérifiant, pour $\rho \in [0, K[$,
   $$\begin{cases} N' = rN(K - N)(N - \rho), \\ N(0) = N_0 > 0. \end{cases}$$
9. *Lotka Volterra (lapins et renards).* On s'intéresse au système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy, \end{cases}$$
   où a, b, c, d sont des constantes strictement positives.
   (a) Qui sont les lapins, qui sont les renards ? Discuter du système différentiel en tant que modèle de l'évolution des populations.
   (b) Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ? Montrer qu'une solution maximale issue d'un couple de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ reste dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
   (c) Montrer que l'intégrale première $\mathcal{H}(x, y) = dx - c \log x + by - a \log y$ est constante au cours du temps.
   (d) Montrer que les solutions issues de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ sont bornées. Que peut-on en déduire ?
   (e) Déterminer les points d'équilibres du système.
   (f) Linéariser le système autour du point d'équilibre non nul, et en déduire l'allure des solutions au voisinage de ce point.
   (g) Déterminer les points critiques de $\mathcal{H}$, décrire l'allure de ses niveaux dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et faire le lien avec ce qui précède.
10. Déterminer les points d'équilibre de l'équation différentielle linéaire $X' = AX$ et étudier leur stabilité dans les deux cas suivants :
    $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
11. Déterminer les points d'équilibre de l'équation différentielle $y' = f(y)$ et étudier leur stabilité, où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est donnée par $f(y_1, y_2) = (y_2 - \sin(2y_1), 1 - e^{y_2})$.
12. On considère le système différentiel
    $$\begin{cases} x' = -x^3 - y^2, \\ y' = xy - y^3. \end{cases} \tag{E}$$
    (a) Quels sont les points d'équilibre de (E) ?
    (b) Etudier la stabilité des points d'équilibre.
13. Dessiner le portrait de phase du système différentiel suivant
    $$\begin{cases} x' = y - x - 2, \\ y' = x^2 - y. \end{cases}$$

4 Autour du théorème de Cauchy-Lipschitz

14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on considère l'EDO $x' = f(t, x)$.
    (a) Supposons que $xf(t, x) < 0$ pour tout $x \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que les solutions maximales de l'équation sont globales en temps positif et admettent une asymptote horizontale.
    (b) Supposons que f est à variables séparées, c'est-à-dire $f(t, x) = h(t)g(x)$ où h et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et notons x_1 et x_2 deux zéros successifs de g. Montrer que toute solution maximale issue de $]x_1, x_2[$ est globale.

15. Considérons l'équation $(E) : y' = \exp(-xy)$. Soit f la solution maximale de (E) telle que $f(0) = 0$.
    (a) Montrer que f est impaire.
    (b) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et possède une limite finie notée l en $+\infty$.
    (c) Montrer que $l \geqslant 1$.
16. Considérons l'équation $(E) : y' = \sin(y)$.
    (a) Déterminer les solutions constantes de (E) et montrer que les autres solutions sont strictement monotones. Dans quelle partie du plan se situe chacune de ces solutions non constantes ?
    (b) Montrer que toute solution maximale de (E) est définie sur $\mathbb{R}$.
    (c) Soit $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la solution maximale de (E) telle que $\varphi_0(0) = \pi/2$.
        a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_0(x) = \pi - \varphi_0(-x)$.
        b) Déterminer l'expression de φ_0.
        c) Dessiner la courbe représentative $(\mathcal{C}_0)$ de φ_0. Quelle propriété géométrique possède $(\mathcal{C}_0)$?
17. (a) Soit $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que $\langle v(x), x\rangle < 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer pour tout point de départ x_0 dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$, la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = v(x(t)), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

    reste dans la boule unité. En déduire qu'elle est globale.
    (b) Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai si on suppose seulement que $\langle v(x), x\rangle \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.
18. *Un contre exemple au théorème de Cauchy-Arzela-Péano en dimension infinie.* Soit $c_0(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles qui convergent vers 0, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
    (a) Montrer que l'application

$$f : (x_n)_n \in c_0(\mathbb{N}) \mapsto (y_n) \in c_0(\mathbb{N}) \ ; \ y_n = \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1},$$

    est continue.
    (b) On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{E}$$

    Supposons que $x \in C^1(]-a, a[, c_0(\mathbb{N}))$ est une solution de (E). Montrer qu'on a alors pour tout $n \geqslant 0$ et $t \in]0, a[$,

$$x_n(t) > 0, \quad \frac{x_n'(t)}{\sqrt{x_n(t)}} > 1.$$

    (c) En déduire que $x_n(t) \geqslant t^2/4$ pour tout $n \geqslant 0$ et $t \in [0, a[$. Qu'en conclure ?

5 Temps d'existence des solutions

19. *Version générale du lemme de Gronwall.* On veut montrer le résultat suivant : soit $f : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, et soit $s(t)$ une solution sur (a, b) de $s'(t) = f(t, s(t))$. Si la fonction $x : (a, b) \to \mathbb{R}^d$ vérifie que

$$\begin{cases} \|x(t_0)\| = s(t_0) \\ \|x'(t)\| \leqslant f(t, \|x(t)\|) \quad \forall t \in [t_0, b[\end{cases}$$

    pour un certain $t_0 \in (a, b)$, alors pour tout $t \in [t_0, b[$, $\|x(t)\| \leqslant s(t)$.
    (a) On suppose pour l'instant que l'inégalité est stricte : pour tout $t \in [t_0, b[,$, $\|x'(t)\| < f(t, \|x(t)\|)$. Montrer que

$$\sup \{t \in [t_0, b[, \ \|x(t)\| \leqslant s(t)\} = b.$$

    (b) En considérant $f_\varepsilon = f + \varepsilon$, conclure dans le cas général.
20. *Lemme d'Osgood :* On se donne $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

(a) En supposant que f ne s'annule pas et que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty$$
montrer que la solution maximale du problème de Cauchy $x'(t) = f(x(t))$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ est définie sur $]t_0 - T_*, t_0 + T^*[$ où
$$T_* = -\int_{-\infty}^{x_0} \frac{ds}{f(s)} \text{ et } T^* = \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)}$$

(b) En supposant que f ne s'annule qu'en ζ_0, montrer que l'intervalle de définition de la solution maximale de $x'(t) = f(x(t))$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ n'est pas majoré si $x_0 < \zeta_0$.

On suppose maintenant que f est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que
$$\int_a^{\infty} \frac{ds}{F(s)} = \infty$$
et $|f(t,x)| \leqslant F(|x|)$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On veut montrer que toute solution maximale de $x'(t) = f(t, x(t))$ est globale. Raisonnons par l'absurde. Soit $x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$ une solution, supposons que $\sup J < \infty$.

(c) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $|x(t)| \geqslant 1$.

(d) Soit $r : t \mapsto |x(t)|$, définie pour $t \in [A, \sup J[$. Montrer que
$$\forall t \in [A, \sup J[, \;\; r' \leqslant F(r(t)).$$

(e) Déduire que x est globale.

21. *Un théorème de Lyapunov.* Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^1. On suppose que l'EDO
$$x'(t) = f(x(t)), \tag{1}$$
admet une fonction de Liapounov $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^1, c'est-à-dire une fonction qui vérifie
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \nabla V(x) \cdot f(x) \leqslant 0.$$

(a) Soit (x, I) une solution de l'équation (1). Vérifier que la fonction $t \mapsto V(x(t))$ décroît sur I.

(b) Soit $x^\star \in \mathbb{R}^d$ un point d'équilibre de l'équation (1) - autrement dit un zéro de f. On suppose de plus que V atteint un minimum local strict en $x^\star$, c'est-à-dire qu'il existe $r_1 > 0$ tel que $V(x^\star) < V(x)$ pour tout x différent de $x^\star$ dans $B(x^\star, r_1)$. Pour tout $0 < r < r_1$, on note $\alpha_r = \min\{V(x), |x - x^\star| = r\}$.

i. Soit $0 < r < r_1$. Montrer que $U_r = \{x \in \mathbb{R}^d : V(x) < \alpha_r\} \cap B(x^\star, r)$ est un ouvert contenant $x^\star$, et que toute trajectoire issue de U_r reste dans $B(x^\star, r)$.

ii. Montrer que $x^\star$ est un point stationnaire stable.

(c) On garde les mêmes hypothèses que dans la question précédente et on suppose de plus que
$$\forall x \in \mathbb{R}^d \backslash \{x^\star\}, \quad \nabla V(x) \cdot f(x) < 0.$$
On va montrer que le point $x^\star$ est asymptotiquement stable.

i. Soit $0 < r < r_1$. Montrer que le flot $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ de (1) est bien défini sur $\mathbb{R}_+ \times U_r$.

ii. Soit $x \in U_r$. On définit l'ensemble ω-limite $\omega(x)$ du point x de la manière suivante :
$$\omega(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^d : \exists (t_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \; t_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty, \; \phi_{t_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\to} y\right\}.$$
Montrer que pour tout $y \in \omega(x)$, la fonction $t \mapsto V(\phi_t(y))$ est constante sur $\mathbb{R}_+$.

iii. Montrer que $\omega(x) \subset \{y \in \mathbb{R}^d : \mathrm{d}V(y) \cdot f(y) = 0\}$ pour tout $x \in U_r$.

iv. Prouver que $\omega(x) = \{x^\star\}$ pour tout $x \in U_r$, et conclure.

Exemple important : si $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, c'est une fonction de Liapounov pour l'EDO donnée par son champ de gradient : $x'(t) = -\nabla g(x(t))$.