Quelques exercices autour des produits de convolution dans $\mathbb{R}^d$

1. (a) Montrer que le produit de convolution $*$ est bien défini sur $L^1_{loc} \times L^1_c$, où L^1_{loc} désigne les fonctions localement intégrables (c'est-à-dire intégrable sur tout compact), et L^1_c est l'ensemble des fonctions intégrables et à support compact.
   (b) Montrer qu'en outre $* : L^1_{loc} \times L^1_c \to L^1_{loc}$.
   (c) Peut-on définir $*$ sur $L^1_{loc} \times L^1$?
2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.
3. (Convolution de gaussiennes). Soit, pour $\sigma > 0$,
$$f_\sigma : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{1}{\sigma(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right).$$
   Montrer que $f_{\sigma_1} * f_{\sigma_2} = f_{\sigma_1+\sigma_2}$.
4. Soient P un polynôme, et f une fonction intégrable à support compact. Montrer que $f * P$ est un polynôme.
5. (Théorème de Weierstrass par la convolution) Soient $a < b$ des réels, et soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et à valeurs réelles. On souhaite montrer que f est la limite uniforme d'une suite de polynômes.
   (a) Justifier qu'on peut supposer que $f(a) = f(b) = 0$.
   On pose $R = b - a$, et
$$q : x \mapsto \begin{cases} R^2 - x^2 & \text{si } |x| \leqslant R \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (b) Montrer que la suite de fonctions $(Q_n)_{n\geqslant 1}$ définie par
$$Q_n(x) = \frac{(q(x))^n}{\|q^n\|_1}$$
   est une approximation de l'unité.
   (c) On prolonge f par 0 en dehors de $[a, b]$, et on note cette fonction $\tilde{f}$. Montrer que $Q_n * \tilde{f}$ converge uniformément vers $\tilde{f}$.
   (d) Montrer que la restriction de $Q_n * \tilde{f}$ à $[a, b]$ est un polynôme de degré $\leqslant 2n$, et conclure.
6. (Théorème de Borel, [Bon01, Exercice 3.2.10], [Rou99, Exercice 116]). Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Montrons qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = a_n.$$
   (a) Montrer que le théorème est vrai lorsque la suite (a_n) est bornée.
   (b) Soit χ une fonction plateau. On choisit, pour $n \in \mathbb{N}$, des réels $\varepsilon_n > 0$, et on considère
$$f_n(x) = a_n \chi\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right)\frac{t^n}{n!}.$$
   Calculer $f_n^{(k)}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,
$$\|f_n^{(k)}\|_\infty \leqslant \varepsilon_n^{n-k} M_n$$
   pour une certaine constante M_n.
   (d) En déduire que pour un bon choix de la suite (ε_n), la fonction $f = \sum_{n\geqslant 0} f_n$ est une solution au problème.
   (e) (Application) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ paire. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x^2)$. *Indication :* construire une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $v(x) = f(x) - u(x^2)$ ait toutes ses dérivées nulles en $x = 0$, puis montrer que $t \mapsto v(\sqrt{|t|})$ est lisse.

Références

[Bon01] Jean-Michel Bony. *Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier.* Palaiseau : Les Éditions de l'École Polytechnique, 2001.

[Rou99] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, volume 4 of *Enseign. Math., Cassini.* Cassini, 1999.