Ordre et manipulations

1. (a) Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de Heaviside $H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0, \end{cases}$ et δ_0 la distribution de Dirac en 0, définie par $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$ pour toute fonction test ϕ. Montrer que $H' = \delta_0$ au sens des distributions.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, donner un exemple de distribution d'ordre n et donner une distribution d'ordre infini.
   (c) Pour $\theta \in \mathcal{C}^\infty$, calculer $\theta \delta_0'$.
2. Étudier la convergence au sens des distributions des suites suivantes, on précisera l'ordre des distributions de la suite ainsi que celui de la limite lorsqu'elle existe :

   (a) $f_n(x) = n^d f(nx)$ avec $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$;
   (b) $T_n = (-1)^n \delta_{1/n}$;
   (c) $T_n = \frac{n}{2}(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})$;
   (d) $f_n(x) = \cos(nx)$;
   (e) $f_n(x) = n^p \cos(nx)$ avec $p > 0$;
   (f) $f_n(x) = |x|^{\frac{1}{n}-1} - 2n\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Deux exemples

3. On étudie deux distributions : la valeur principale et la partie finie.
   (a) On définit la valeur principale de $1/x$ par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
   $$\langle \mathrm{vp}(1/x), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$
      i. Montrer que $\mathrm{vp}(1/x)$ définit bien une distribution et préciser son ordre.
      ii. Montrer que $x\,\mathrm{vp}(1/x) = 1$ au sens des distributions.
      iii. Montrer que $x \mapsto \ln(|x|)$ définit une distribution dont la dérivée est $\mathrm{vp}(1/x)$.
   (b) On définit la partie finie de $1/|x|$ par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
   $$\langle \mathrm{pf}(1/|x|), \varphi \rangle = \int_{-M}^{M} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx + 2\varphi(0) \ln(M),$$
   où $M > 0$ vérifie $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$.
      i. Montrer que $\mathrm{pf}(1/|x|)$ définit bien une distribution (en particulier ne dépend pas de M tant que $[-M, M]$ contient le support de φ) et préciser son ordre.
      ii. Montrer que $x\ \mathrm{pf}(1/|x|) = \mathrm{sgn}(x)$ au sens des distributions.
      iii. Montrer que $x \mapsto \mathrm{sgn}(x) \ln(|x|)$ définit une distribution dont la dérivée est $\mathrm{pf}(1/|x|)$.

Résolutions d'EDO au sens des distributions

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
   (a) Résoudre $T' = 0$ dans $\mathcal{D}'(I)$.
   (b) Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(I)$, montrer que toute solution T de $T' + fT = g$ dans $\mathcal{D}'(I)$ est une fonction lisse.
   (c) Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, résoudre $T' + fT = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (d) Résoudre $T'' - T' - 2T = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
5. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau telle que $|x| \leqslant 1 \implies \chi(x) = 1$.
   (a) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que
   $$\varphi(x) - \varphi(0)\chi(x) = x\psi(x).$$
   (b) Résoudre $xT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (c) Résoudre $xT = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, résoudre $x^n T = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. *Indication : on pourra s'inspirer des premières questions et commencer par résoudre $x^n T = 0$.*
6. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ les équations suivantes :

   (a) $xT = \mathrm{sgn}(x)$,
   (b) $xT = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$,
   (c) $(x - 1)T = \delta_0$,
   (d) $(x - a)(x - b)T = 1$ avec $a \neq b$.

7. (*Formule des sauts*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, on dit que f admet un saut en 0 si f se prolonge par continuité à droite et à gauche de 0 par des valeurs finies. On note $[[f(0)]] = f(0^+) - f(0^-)$ la hauteur du saut de f en 0. On note $\{f'\}$ la dérivée de la partie régulière de f, c'est-à-dire

$$\{f'\}(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } f \text{ est dérivable en } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Montrer qu'au sens des distributions :
$$f' = \{f'\} + [[f(0)]]\delta_0.$$
   (b) Soit (x_n) une suite indexée par $\mathbb{Z}$ strictement croissante telle que
$$\lim_{n\to-\infty} x_n = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ admettant des sauts sur chaque x_n. Montrer qu'au sens des distributions
$$f' = \{f'\} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} [[f(x_n)]]\delta_{x_n}.$$
   (c) On définit l'opérateur différentiel $P = \partial^2 + a\partial + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
      i. Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on définit $h = f\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} + g\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}$. Calculer Ph au sens des distributions.
      ii. En déduire une solution particulière de l'équation $T'' + aT' + b = \delta_0$.

Une injection de Sobolev en dimension 1

8. [Bré94, Chapitre VIII] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $p \in [1, +\infty]$. Soit $f \in W^{1,p}(I) = \{f \in L^p, f' \in L^p\}$, qu'on munit de la norme
$$\|f\|_{W^{1,p}(I)} = \|f\|_{L^p(I)} + \|f'\|_{L^p(I)}.$$
On notera aussi $H^1(I) = W^{1,2}(I)$.
   (a) Soit $a \in I$, montrer que la fonction T, donnée par
$$T(x) = \int_a^x f'(t)dt,$$
   est bien définie, continue et dérivable presque partout. *On pourra utilise le théorème de différentiation de Lebesgue : si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,*
$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|dy \quad \xrightarrow{r\to 0} \quad 0.$$
   (b) Montrer que $T' = f'$ presque partout et au sens des distributions.
   (c) En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = c + \int_a^x f'(t)dt.$$
   En particulier, f admet un représentant continu et dérivable presque partout.
   (d) Si $1 < p < +\infty$, montrer que f est hölderienne. Pour quels $\alpha > 0$ a-t-on l'inclusion $H^1(I) \subset C^{0,\alpha}(I)$?
   (e) Si $p = +\infty$, montrer que f est lipschitzienne.
   (f) Pour tout $p \in [1, +\infty]$, montrer que $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ continûment, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $f \in W^{1,p}(I)$, on a $\in L^\infty(I)$ et
$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant c\|f\|_{W^{1,p}}.$$
   On pourra commencer par le cas $I = \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, et considérer la fonction $g = f|f|^{p-1}$. Ensuite, démontrer la densité des fonctions C_c^∞ dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$ pour conclure lorsque $I = \mathbb{R}$. Finalement, démontrer qu'on peut étendre les fonctions de $W^{1,p}(I)$ en des fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R})$.
   (g) Montrer que $W^{1,p}(I)$ est stable par produit.
   (h) On suppose que I est borné, et que $p \in]1, +\infty]$. Montrer que l'injection $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ est compacte, c'est-à-dire que tout élément de $W^{1,p}(I)$ est dans $C(\overline{I})$, et que de toute suite bornée de $(W^{1,p}(I), \|.\|_{W^{1,p}})$, on peut extraire une suite convergeant uniformément sur $\overline{I}$ vers une limite dans $C(\overline{I})$.
   (i) On suppose I non borné. Montrer qu'alors, pour toute fonction $f \in W^{1,p}(I)$, avec $p \in [1, +\infty[$,
$$\lim_{\substack{|x|\to+\infty \\ x\in I}} f(x) = 0.$$

9. (*Distributions positives*) Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution tel que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ positive, $\langle u, \phi \rangle$ est positive. Montrer qu'alors, u est d'ordre 0, et que l'on peut l'identifier à une mesure de Radon.
10. On note $\arg(z)$ la valeur pricipale de l'argument d'un complexe $z \in \mathbb{C}^*$, *i.e.* l'argument dans $]-\pi, \pi]$. Pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}^*$, on définit
$$f_\epsilon(x) = \ln(x + i\epsilon) = \ln|x + i\epsilon| + i\arg(x + i\epsilon).$$
    (a) Calculer $f_{0^+} = \lim_{\epsilon \to 0^+} f_\epsilon$ et $f_{0^-} = \lim_{\epsilon \to 0^-} f_\epsilon$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
    (b) Calculer f'_{0^+} et f'_{0^-} au sens des distribution. *Indication : utiliser la distribution* $\mathrm{vp}(1/x)$ *définie dans un exercice précédent.*
    (c) Déduire que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x + i\varepsilon} = -i\pi\delta_0 + \mathrm{vp}(1/x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x - i\varepsilon} = i\pi\delta_0 + \mathrm{vp}(1/x).$$

Supports et convolution

11. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
    (a) Rappeler la définition du support de T.
    (b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, montrer que si $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi = \varnothing$ alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$. La réciproque est-elle vraie ? Est-ce que si ϕ s'annule sur le support de T, $\langle T, \varphi \rangle = 0$?
    (c) On suppose que T est à support compact et on considère $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\psi = 1$ sur un voisinage de $\operatorname{supp} T$. Montrer que $\psi T = T$.
12. (*Distribution à support ponctuel*) Montrer que les distributions dont le support est un singleton peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des dérivées de la distribution de Dirac en ce point.
13. (a) Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrer que si $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi$ est compact alors on peut définir $\langle T, \varphi \rangle$.
    (b) Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on suppose T et S vérifient la condition suivante : pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$,
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \;\middle|\; x \in \operatorname{supp} T,\ y \in \operatorname{supp} S,\ x + y \in K\right\}$$
    est compact. Montrer que dans ce cas, $T * S$ et $S * T$ sont bien définies.
14. La convolution est-elle associative pour le triplet 1, δ_0' et H, où H est la fonction de Heaviside définie dans l'exercice 1 ? Donner une condition suffisante sur les supports pour que la convolution soit associative.
15. Calculer les convolutions suivantes :

    (a) $\delta_a * \delta_b$ sur $\mathbb{R}^d$,
    (b) $T * \delta_a$ avec $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$,
    (c) $H * H$ (Heaviside),
    (d) $(x^p \delta_0^{[q]}) * (x^m \delta_0^{[n]})$,
    (e) $\delta_0^{[k]} * (x^m H)$,
    (f) $(x^p H) * (x^q H)$,
    (g) $\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]}$,
    (h) $\mathbb{1}_{[0,1]} * (xH)$,
    (i) $\delta_{S(0,r)} * |x|^2$ sur $\mathbb{R}^3$.

16. (*Densité des fonctions lisses dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$) Soit (ρ_n) une suite régularisante définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \rho_n(x) = n^d \rho(-nx),$$
    où $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, [0, 1])$ est à support dans la boule unité. Montrer que pour toute distribution T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $T \star \rho_n$ converge vers T au sens des distributions.
17. (*Régularisation par des polynômes*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, On définit P_n un polynôme sur $\mathbb{R}^d$ par
$$P_n(x) = \frac{n^d}{\pi^{d/2}} \left(1 - \frac{|x|^2}{n}\right)^{n^3}.$$
    (a) Calculer la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ de la suite $(P_n)_n$?
    (b) Déduire que toute distribution à support compact est une limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ d'une suite de polynôme.
18. On note $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}^+\}$.
    (a) Montrer que la convolution de deux éléments de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ est bien définie et donne un élément de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. *On pourra loucher sur l'exercice 11. Pour la suite de l'exercice, on admet que la convolution est associative et commutative dans* $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Quel est le neutre de la convolution dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$?
    (b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $T, S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, on a $(e^{ax}T) * (e^{ax}S) = e^{ax}(T * S)$.
    (c) Pour $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, on note T^{-1} l'inverse de T dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ pour la convolution lorsqu'il existe. Montrer que T^{-1} est effectivement unique et calculer $(\delta_0')^{-1}$, $(H)^{-1}$ et $(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{-1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) Soit P un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, calculer $(P(\partial)\delta_0)^{-1}$.

(e) Résoudre dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ le système suivant

$$\begin{cases} \delta_0'' * X + \delta_0' * Y = \delta \\ \delta_0' * X + \delta_0'' * Y = 0. \end{cases}$$

19. On étudie le comportement de la convergence de distributions avec le produit de convolution.
    (a) Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et (V_n) une suite de distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer que si $V_n \to V$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ alors $V_n * T \to V * T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
    (b) Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $V \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et (V_n) une suite de distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer que si $V_n \to V$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ alors $V_n * T \to V * T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
    (c) Montrer qu'il existe deux suites de distributions (T_n) et (V_n) convergeant vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et telles que $T_n * V_n \to \delta_0$.
20. (a) Montrer que pour $d \geqslant 3$, la solution fondamentale de l'équation de Laplace est

$$u_0(x) = -\frac{1}{d(d-2)\omega_d |x|^{d-2}}, \quad \text{où } \omega_d = |B(0,1)|,$$

    i.e. $\Delta u_0 = \delta_0$ au sens des distributions.
    (b) Donner la solution de $\Delta u = f$ au sens des distributions avec f dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

Références

[Bré94] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Paris : Masson, 1994.