TD 1 : méthodes numériques pour l'algèbre linéaire

1 Normes et conditionnement

Exercice 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

1. Quel lien y a-t-il entre $\mathrm{cond}(A^2)$ et $\mathrm{cond}(A)^2$ pour un conditionnement lié à une norme quelconque ?
2. Supposons que A soit symétrique. Montrer qu'alors, $\mathrm{cond}(A^2) = \mathrm{cond}(A)^2$.

Exercice 2. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle subordonnée à une norme $|.|$ de $\mathbb{R}^n$. Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. On pose aussi $\Delta A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\delta b \in \mathbb{R}^n$. Soient x et δx définis par :

$$Ax = b, \quad (A + \Delta A)(x + \delta x) = b + \delta b.$$

Montrer qu'alors

$$\frac{|\delta x|}{|x|} \leqslant \frac{\mathrm{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \left(\frac{|\delta b|}{|b|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right).$$

Exercice 3. Soit A la matrice de la discrétisation du Laplacien de taille n :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \tag{1}$$

Calculer ses valeurs propres et son conditionnement par rapport à la norme 2. *Indication :* on pourra chercher des solutions non nulles de $y''_\lambda = \lambda y_\lambda$, $y_\lambda(0) = y_\lambda(1) = 0$ et montrer que le vecteur $Y = \left(y_\lambda\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est bien vecteur propre
Que vaut ce conditionnement lorsque la taille de la matrice croît vers $+\infty$?

2 Méthodes directes

Exercice 4. (Les codes des algorithmes proprement dits)

1. Écrire un programme qui résout le système $Ax = b$ par la méthode de Gauss. Il faudra penser à mettre en place une exception pour quand la matrice n'est pas inversible. On pourra écrire une routine intermédiaire qui résout le système lorsque A est triangulaire supérieure (et qui vérifie évidemment qu'elle l'est !)
2. Écrire une routine qui prend une matrice A en entrée et renvoie sa décomposition LU. On pensera à mettre en place une exception pour le cas où les mineurs principaux ne sont pas tous inversibles. On pourra écrire une routine intermédiaire qui résout le système lorsque A est triangulaire inférieure (et qui vérifie évidemment qu'elle l'est !)
3. Écrire une routine qui prend une matrice A en entrée et renvoie sa décomposition de Cholesky ($A = BB^T$ avec la diagonale de B strictement positive). On pensera à mettre en place une exception pour le cas où A n'est pas symétrique définie positive.

Exercice 5. (Les factorisations LU pour des matrices tridiagonales) Soit A une matrice tridiagonale, i.e. :

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

1. Exprimer la décomposition LU de A en fonction des mineurs principaux de A (on exhibera une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par ces mineurs) et des a_i et des c_j.
2. En déduire la factorisation LU de la matrice du Laplacien définie en (1).

Exercice 6. (Factorisation QR et matrices de Householder) On définit pour $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ la matrice de Householder associée :

$$H(v) = I_n - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2} \text{ (avec H(0) = } I_n).$$

1. Montrer que pour tout v, $H(v)$ est symétrique et orthogonale. Diagonaliser H.
2. Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=2}^n |a_i| > 0$. Montrer alors que $H(a \pm \|a\|_2 e_1)(a) = \pm\|a\|_2 e_1$, le signe du résultat étant déterminé par le signe de a_1.
   En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ il existe une matrice de Householder H tel que Ha ait
   — sa première composante positive
   — toutes ses composantes de 2 à n nulles
3. Soit maintenant $A \in M_n(\mathbb{R})$. En déduire qu'il existe $n-1$ matrices de Householder $H_1, \ldots, H_{n-1}$ telles que $H_{n-1}, \ldots, H_1 A$ soit triangulaire supérieure ainsi qu'un algorithme pour trouver ces matrices.
4. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R telles que $A = QR$. Quel est l'intérêt de cette méthode par rapport à celle du pivot de Gauss ? Montrer qu'en plus on peut s'arranger pour que les termes diagonaux de R soient positifs.
5. Quel autre algorithme aurait-on pu utiliser ?

3 Méthodes itératives pour les systèmes linéaires

Exercice 7. (Implémentation des différentes méthodes)

1. **Routines intermédiaires :**
   — Écrire une routine qui prend en entrée une matrice A diagonale et un vecteur b et renvoie le vecteur $A^{-1}b$ (et qui renvoie un message d'erreur si les dimensions ne correspondent pas ou si A n'est pas diagonale).
   — Écrire une routine qui prend en entrée une matrice A diagonale et renvoie un booléen suivant que A soit à diagonale strictement dominante ou non.
2. Implémenter la méthode de Jacobi : écrire une routine qui prend en entrée une matrice A à diagonale strictement dominante, un vecteur b ainsi qu'une tolérance *tol* et un nombre d'itération maximal $itermax$ et renvoie le vecteur $A^{-1}b$ par la méthode de Jacobi.
   Attention ! On prendra garde à
   — renvoyer un message d'erreur si les dimensions ne correspondent pas ou si A n'est pas à diagonale dominante.
   — indiquer si le nombre maximal d'itérations a été atteint ou non et la valeur finale de $\frac{\|Ax_k - b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$.
3. Implémenter la méthode de relaxation : écrire une routine qui prend en entrée une matrice A symétrique réelle définie positive, un vecteur b ainsi que ω, *tol* et $itermax$ et renvoie le vecteur $A^{-1}b$ par la méthode de relaxation.
   On prendra garde à vérifier les points similaires à la question 2.

On rappelle que la routine `numpy.linalg.eig` de Python renvoie les éléments propres d'une matrice.

Exercice 8. (Une méthode de Jacobi relaxée) Soit A une matrice symétrique définie positive. On s'intéresse à la méthode de Jacobi relaxée, i.e.

$$D\tilde{x}_{k+1} = (E+F)x_k + b,\ x_{k+1} = \omega\tilde{x}_k + (1-\omega)x_k.$$

1. Écrire cet algorithme sous la forme
$$M_\omega x_{k+1} = N_\omega x_k + b,$$
et donner la matrice $J_\omega = M_\omega^{-1}N_\omega$ associée.
2. Soit $J = D^{-1}(E+F)$. Montrer que J admet une base de vecteurs propres orthonormée (pour le produit scalaire associée à D). On note les valeurs propres $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$.
3. Montrer que $\frac{2}{\omega}D - A$ est symétrique définie positive si et seulement si $(1-\mu_1)\omega < 2$.
4. Exprimer les valeurs propres de J_ω en fonction de celles de J. Montrer que le paramètre optimal minimisant le rayon spectral de J_ω est donné par
$$\omega_{opt} = \frac{2}{2-\mu_1-\mu_n}.$$

4 Recherche de valeurs propres

Exercice 9. (Méthode de la puissance) Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, on note $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots |\lambda_n|$ ses valeurs propres.

1. Implémenter la méthode de la puissance i.e. une routine qui prend en entrée une matrice A, ainsi que *tol* et *itermax* et qui renvoie la valeur propre λ_1 de A ainsi qu'un vecteur propre associé. Inclure une routine qui vérifie A est symétrique réelle (par contre, on admettra que la condition $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ pour tout $i \geqslant 2$ est toujours vérifiée)
2. Définir une matrice M à coefficients aléatoires (suivant par exemple un multiple d'une loi normale). Tester la méthode sur $A = M + M^T$ puis contre $A = -(M + M^T)$. Que remarque-t-on ?
3. On suppose maintenant que seule la condition $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ est vérifiée. Vers quoi convergent alors les suites $(x_k)_k$ et $(|x_k|_2)_k$?
4. Réimplémenter la méthode de la puissance mais cette fois pour une matrice A vérifiant $|\lambda_1| > |\lambda_i|$. On utilisera un résidu basé sur $R_k^1 = \frac{Ax_k - \|y_k\|_2 x_k}{\|y_k\|_2\|x_k\|_2}$ et $R_k^2 = \frac{Ax_k + \|y_k\|_2 x_k}{\|y_k\|_2\|x_k\|_2}$.
5. On suppose maintenant que $0 < |\lambda_n| < |\lambda_i|$ (en particulier A est inversible). Comment la méthode de la puissance peut-elle s'adapter pour trouver λ_1 ? Implémenter cette nouvelle méthode.

Exercice 10. (Méthode de la puissance, bis) Soit A une matrice symétrique réelle. On suppose que $0 < |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| < \cdots < |\lambda_1|$.

1. On rappelle que A est diagonalisable dans la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$. Étudier le spectre de la matrice $B = A - \lambda_1 e_1 e_1^T$.
2. En déduire un algorithme pour déterminer tout le spectre d'une matrice A symétrique ayant des valeurs propres de module deux à deux distincts.
3. Implémenter cet algorithme.

Exercice 11. (Calcul du conditionnement en norme 2) On rappelle que pour une matrice A, son conditionnement pour la norme 2 est donné par

$$\mathrm{cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_1}}$$

où les $(\mu_i)_i$ sont les valeurs propres de AA^T.
Écrire alors une fonction qui prend en entrée une matrice A inversible, ainsi que *tol* et *itermax* et renvoie son conditionnement par rapport à la norme 2 (en utilisant bien sûr des sous-routines de l'exercice précédent).

Exercice 12. (Méthode de Jacobi pour la diagonalisation) Soit A une matrice symétrique réelle de taille n. Le but de l'exercice va être de trouver une suite de matrices orthogonales O_k "très simples" telles que $(O_1 \cdots O_k)^T A (O_1 \cdots O_k)$ converge vers la matrice diagonale à laquelle A est semblable.

1. Soient $(p, q) \in [\![1, n]\!]$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit O telle que

$$O_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \notin \{p, q\}, \\ \cos(\theta) & \text{si } i = j \text{ et } i \in \{p, q\} \\ \sin(\theta) & \text{si } i = p \text{ et } j = q \\ -\sin(\theta) & \text{si } i = q \text{ et } j = p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que O est orthogonale, que $B = O^T A O$ reste symétrique et que

$$\sum_{i,j} b_{i,j}^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$$

2. Soient p, q tels que $a_{p,q} \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]-\pi/4, \pi/4[\backslash\{0\}$, tel que $b_{p,q} \neq 0$, que ce θ est solution de

$$\mathrm{cotan}(\theta) = \frac{a_{q,q} - a_{p,p}}{2a_{p,q}},$$

et que

$$\sum_i b_{i,i}^2 = \sum_i a_i^2 + 2a_{p,q}^2$$

3. On pose $c = \cos(\theta)$ et $s = \sin(\theta)$. Exprimer les coefficients de B en fonctions de ceux de A et de c et s.

La méthode de *Jacobi classique* consiste alors à poser $A^0 = A$ à chaque itération k à choisir p_k, q_k tels que $|A^k_{p_k,q_k}| = \max_{i \neq j} |A_{i,j}|$ et de poser $A^{k+1} = O_k^T A_k O_k$ avec O_k défini comme en question 1 pour $p = p_k$, $q = q_k$ et θ_k de telle sorte que $A^{k+1}_{p_k,q_k} = 0$.

4. On pose alors $A^k = D_k + B_k$ où $D_k = \mathrm{diag}(A^k_{1,1}, \cdots A^k_{n,n})$. Montrer que $(B_k)_k$ tend vers 0.
5. Montrer que $(D_k)_k$ n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence et que $\lim_{k \to +\infty} D_{k+1} - D_k = 0$.
6. En déduire que $(D_k)_k$ converge vers une matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(i)})$, où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
7. On pose $\Omega_k = (O_1 \cdots O_k)$. On suppose ici que les λ_i sont distincts. Montrer, en utilisant une stratégie similaire aux questions précédentes, que $(\Omega_k)_k$ converge vers une matrice constituée des vecteurs propres de A réordonnés par la permutation σ.