Présentation analytique des travaux

Simon Zugmeyer

Présentation générale et mots-clés

Depuis le début de ma thèse, j'explore les inégalités fonctionnelles optimales, grâce, notamment, aux équations aux dérivées partielles, au transport optimal, et à l'analyse convexe. Je suis particulièrement familier avec les méthodes de flots, et la théorie de Bakry-Émery.

Ce document est une brève présentation de mes résultats accompagnée d'une encore plus courte bibliographie, qui, je l'espère, met en lumière mes intérêts de recherche. J'ai choisi d'aborder les papiers dans l'ordre chronologique. Dans l'optique d'une audition, j'aimerais présenter un aperçu transversal de mes travaux, en insistant sur l'idée des flots-gradients dans l'espace des probabilités, et donc les sections 3 et 4.

Mots-clés : Inégalités fonctionnelles optimales, Transport optimal, Équations aux dérivées partielles, Méthode de Bakry et Émery, Condition de courbure-dimension, Flots-gradients.

1 La théorie de Brunn-Minkowski [Zug19]

Plus riche que l'inégalité isopérimétrique, puisque cette dernière en est une conséquence, l'inégalité de Brunn-Minkowski

$$|A+B|^{1/d} \geqslant |A|^{1/d} + |B|^{1/d} \quad \text{pour tout compacts } A, B \subset \mathbb{R}^d$$

et ses généralisations offrent un cadre efficace pour démontrer des inégalités de la famille de l'inégalité de Sobolev. Récemment, Sergueï Bobkov et Michel Ledoux ont fait appel à l'inégalité de Borell-Brascamp-Lieb pour retrouver les inégalités de Sobolev sur l'espace euclidien [BL08]. L'inégalité de Borell-Brascamp-Lieb peut être reformulée de la manière suivante : soit $t \in [0,1]$. Si g, W, et H sont trois fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $(0,+\infty]$, telles que $\int g^{-d} = \int W^{-d} = 1$ et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad H((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)g(x) + tW(y),$$

alors

$$\int H^{-d} \geqslant 1.$$

Grâce à la théorie du transport optimal, on peut prouver la version suivante de l'inégalité de Borell-Brascamp-Lieb [BCEF$^+$20] : avec les mêmes hypothèses sur g, W et H,

$$\int H^{1-d} \geqslant (1-t)\int g^{1-d} + t\int W^{1-d}.$$

C'est cette inégalité qui est réellement le point de départ du papier. En utilisant à notre avantage les propriétés d'une l'inf-convolution, on peut non seulement retrouver l'inégalité de Sobolev sur $\mathbb{R}^d$ tout entier [BCEF$^+$20], mais on peut aussi prouver une famille d'inégalités de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev à trace sur les cônes convexes, notamment.

2 Inégalités de Beckner sur les variétés [GZ19]

Les inégalités de Beckner, que l'on nomme ainsi en référence à [Bec89], interpolent entre l'inégalité de Sobolev logarithmique et l'inégalité de Poincaré : si μ est une mesure de probabilité et $p \in (1,2]$, on dit qu'une variété M satisfait à une inégalité de Beckner avec la constante ρ si

$$\frac{p}{p-1}\left[\int f^2 d\mu - \left(\int f^{2/p} d\mu\right)^p\right] \leqslant \frac{2}{\rho}\int |\nabla f|^2 d\mu,$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$. Ces inégalités jouent un rôle fondamental parmis les inégalités pour les mesures de probabilité, étant utiles à la fois pour comprendre le comportement asymptotique d'équations paraboliques, que pour étudier la géométrie d'espaces mesurés.

Des résultats de ce genre ont été d'abord prouvés par Bidaut-Véron et Véron [BVV91] sur la sphère, en utilisant une méthode proposée par [GS81]. Un point essentiel de ces résultats est la courbure positive de la sphère : c'est donc naturel d'étendre l'étude aux variétés qui vérifient une condition de courbure-dimension $CD(\rho, n)$. Ici, on reprend la notion de courbure-dimension développée par Bakry et Émery (d'ailleurs aujourd'hui aussi appelée critère de Bakry-Émery, pour la distinguer dans la zoologie de critères de courbure-dimension qui ont depuis été formulés).

Dans ce papier, on démontre deux résultats intéressants, qui ont trait d'une part à des variétés dont la courbure de Ricci n'est *pas* minorée par une constante strictement positive, mais simplement par 0, et d'autre part à des variétés de dimension effective n négative. La clé de l'approche est bien sûr l'étude d'un flot sur la variété, dans la bonne tradition de la méthode de Bakry-Émery.

— Sous l'hypothèse $CD(0, n)$, avec $n > 0$, on démontre des inégalités de Poincaré à poids. L'idée est que le poids permet de compenser le manque de courbure de la variété.

— Sous l'hypothèse $CD(\rho, n)$, avec $\rho > 0$ et $n < -2$, on démontre des inégalités de Beckner, avec constante optimale $(n-1)/(\rho n)$.

3 Flots d'entropie et inégalité de Sobolev [Zug20]

Dans ce papier, j'ai décidé de revisiter les méthodes de flots pour démontrer des inégalités de Sobolev dans $\mathbb{R}^d$, dont on peut voir des exemples dans [CT00, CV03], ainsi que les références dans [Jü16]. Il y a deux challenges : le premier, c'est que l'espace euclidien est plat. Le deuxième, c'est qu'on sort du cadre linéaire du papier précédent, ce qui ne permet donc pas le recours à la théorie des semigroupes de Markov.

L'idée est de voir l'équation de diffusion rapide

$$\partial_t u = \Delta u^m \quad \text{sur } \mathbb{R}^d,$$

avec $m \in [1 - 1/d, 1)$, comme le flot-gradient d'une entropie généralisée dans l'espace de Wasserstein $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément, pour éviter la convergence des fonctions vers 0, on travaille avec une équation de Fokker-Planck généralisée, obtenue de l'équation de diffusion rapide par un changement auto-similaire.

La méthode de Bakry-Émery permet de retrouver non seulement l'inégalité de Sobolev classique, mais aussi de démontrer de nouvelles formes d'inégalités, comme une inégalité de Sobolev logarithmique à trace sur le demi-espace $\mathbb{R}^d_+$, qu'on démontre dans un papier volontairement auto-suffisant, mis à part un résultat d'existence de solutions d'équations paraboliques, qui relève de la théorie classique de ces équations.

4 Inégalité de Sobolev sur les variétés à courbure de Ricci positive [DGZ21]

C'est bien connu : sur les variétés riemanniennes de dimension d dont la courbure de Ricci est minorée par une constante $\rho > 0$, l'inégalité de Sobolev suivante est vérifiée :

$$\frac{1}{q-2}\left(||v||^2_{L^q(M)} - ||v||^2_{L^2(M)}\right) \leqslant \frac{1}{d}\frac{d-1}{\rho}||\nabla v||^2_{L^2(M)}, \quad q = \frac{2d}{d-2}.$$

C'est un théorème dû à Ilias [Ili83], depuis revisité par dans un certain nombre d'articles, notamment Bidaut-Véron et Véron [BVV91] (qui apportent une preuve différente) et Bakry et Ledoux [BL96] (qui généralisent le résultat aux générateurs de Markov vérifiant une condition de courbure-dimension).

Avec Louis Dupaigne et Ivan Gentil, nous avons essayé de donner du sens aux calculs parfois un peu opaques qui interviennent dans la méthode de Bakry et Émery : grâce à l'interprétation d'Otto des flots-gradients dans l'espace de Wasserstein, nous proposons d'une part une heuristique qui rend les calculs assez clairs, puisque les calculs sont essentiellement les mêmes que pour un flot-gradient en dimension finie, et d'autre part une preuve rigoureuse qui repose sur l'heuristique, et est plutôt compacte et robuste (la démonstration du théorème d'Ilias tient en une page). Ces observations ne sont donc pas des résultats nouveaux, mais je trouve que l'approche est plutôt jolie. C'est un petit papier qui sera publié aux Annales Mathématiques de Toulouse.

5 Projets de recherche

Je travaille actuellement sur deux projets en parallèle, l'un à Lyon (dans la continuité de ma thèse, avec Louis Dupaigne et Ivan Gentil) et l'autre à Paris (avec Nathaël Gozlan et Matthieu Fradelizi), plus en lien avec le transport optimal.

5.1 L'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg

C'est une suite logique des travaux précédents. Notre point de départ est un article de Jean Dolbeault, Maria Esteban et Michael Loss [DEL16], car leur preuve repose essentiellement sur des flots-gradients. L'inégalité de CKN est vérifiée pour $a < a_c$ et $a \leqslant b \leqslant a+1$, $p = 2d/(d-2+2(b-a))$

$$\forall u \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d), \quad \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u^p}{|x|^{bp}}dx\right)^{2/p} \leqslant C_{a,b}\int_{\mathbb{R}_d} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2a}}dx. \tag{1}$$

Cette inégalité peut être écrite comme une inégalité de Sobolev standard sur une variété à poids conforme à $\mathbb{R}^d$:

$$\left(\int u^p d\mu\right)^{2/p} \leqslant C_{a,b}\int \Gamma(u)d\mu,$$

où le carré du champ est donné par $\Gamma(u) = |x|^{bp-2a}|\nabla u|^2$ et la mesure est $\mu(dx) = |x|^{-bp}dx$. C'est une simple réécriture, mais l'intérêt de cette forme est qu'on peut faire des parallèles avec ce que l'on sait faire dans $\mathbb{R}^d$. De la même manière que l'inégalité de Sobolev sur $\mathbb{R}^d$ peut se réécrire, par un changement conforme, en l'inégalité de Sobolev sur la sphère $\mathbb{S}^d$, l'inégalité de CKN (1) est équivalente à l'inégalité suivante :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} u^p d\bar{\mu}\right)^{2/p} \leqslant \frac{4}{n(n-2)\alpha^2}\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\Gamma}(u)d\bar{\mu} + \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\bar{\mu}, \tag{2}$$

où

$$\bar{\mu}(dx) = C\frac{|x|^{-bp}}{(1+|x|^{2\alpha})^n}dx,$$
$$\bar{\Gamma}(u) = \left(\frac{1+|x|^{2\alpha}}{2}\right)^n \Gamma(u)$$

D étant une constante de normalisation, et $n = d/(1+a-b)$ la dimension effective, et la constante $\alpha = 1 - bp/2 + a$. Lorsque $a = b = 0$, on retrouve $n = d$, $\alpha = 1$, et l'inégalité (2) est bien Sobolev sur la sphère. La variété que l'on obtient avec ce changement conforme est, en quelque sorte, une sphère de dimension fractionnaire, comme l'appuie la propriété suivante : à une certaine condition sur les paramètres, le triplet $(\mathbb{R}^d, \bar{\Gamma}, \bar{\mu})$ vérifie la condition de Bakry-Émery $CD(\alpha^2(n-1), n)$, dont l'inégalité (2) est une conséquence directe d'après [DGZ21].

Ce point de vue, ancré dans la théorie de Bakry-Émery, permet de démontrer d'autres inégalités, comme par exempe une inégalité de Poincaré à poids, et, par passage à la limite sur la dimension, une inégalité de Sobolev logarithmique, de la même manière qu'on peut l'obtenir dans $\mathbb{R}^d$.

5.2 Conjecture de Mahler et transport optimal

La conjecture de Mahler est une conjecture vieille de 80 ans de géométrie convexe énoncée par Mahler en 1939.

Soit, pour un corps convexe (symétrique par rapport à 0) $K \subset \mathbb{R}^d$, son volume-produit $P(K) = |K||K^\circ|$, où le polaire K° est défini par

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^d, x \cdot y \leqslant 1, \forall y \in K\}.$$

Alors la conjecture dit la chose suivante : pour tout K symétrique,

$$P(B_d^1) \leqslant P(K) \leqslant P(B_d^2),$$

où $P(B_d^1) = |B_d^1||B_d^\infty|$ est le volume-produit de la boule unité pour la norme 1, et $P(B_d^2)$ est le volume-produit de la boule euclidienne. La question de la majoration a été résolue en 1949 par Santaló, mais la minoration reste ouverte : c'est connu en dimension 1, 2 et 3 seulement [IS20], et aussi en toutes dimensions sous des hypothèses de symétrie plus fortes [SR81].

Cette inégalité a un pendant fonctionnel. Les ensembles convexes sont remplacés par des fonctions log-concaves, et le polaire par la transformée de Legendre $\mathcal{L}$. En particulier, on regarde, pour les fonctions ϕ convexes et paires,

$$P(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\phi} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathcal{L}\phi},$$

et la conjecture, énoncée par Matthieu Fradelizi et Matthieu Meyer [FM08], est que

$$P(\phi) \geqslant P(\|.\|_1) = 4^d. \tag{3}$$

Cette conjecture n'a été démontrée qu'en dimension 1 et 2. Les versions fonctionnelle et ensembliste ne sont pas tout à fait équivalentes, mais la fonctionnelle implique l'autre, elle est un peu plus générale.

Nathaël Gozlan [Goz20], en s'inspirant de travaux récents de Max Fathi [Fat18], démontre que l'inégalité (3) est équivalente à une forme duale, qui s'écrit avec le langage du transport optimal : l'inégalité (3) est vraie si, et seulement si, pour toutes mesures ν_1, ν_2 log-concaves (càd que $\nu_i(dx) = e^{-V_i(x)}dx$, avec V_i convexe), en notant les mesures moment $\nu_i = \nabla V_i \# \eta_i$, on a

$$H(\eta_1) + H(\eta_2) \leqslant -d\log(4e^2) + \mathcal{T}(\nu_1, \nu_2), \tag{4}$$

où H désigne l'entropie relative par rapport à la mesure de Lebesgue, $H(\eta_i) = -\int V_i d\eta_i$, et $\mathcal{T}$ est la corrélation maximale, donnée par

$$\mathcal{T}(\nu_1, \nu_2) = \sup_{X_1 \sim \nu_1, X_2 \sim \nu_2} \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2].$$

Avec cette formulation, nous avons retrouvé une preuve de la conjecture dans le cas non symétrique en dimension 1 (cas qui n'est pas présenté dans ce document, mais qui n'est connu qu'en dimension 1).

Matthieu Fradelizi a depuis rejoint le projet, et nous travaillons sur une inégalité de la même famille, qui est une version fonctionnelle d'un théorème que Saint-Raymond [SR81] a utilisé pour démontrer la conjecture de Mahler dans le cas où les ensembles convexes sont supposés inconditionnels (c'est-à-dire qu'ils sont symétriques par rapport à tous les hyperplans canoniques).

Références

[BCEF+20] François Bolley, Dario Cordero-Erausquin, Yasuhiro Fujita, Ivan Gentil, and Arnaud Guillin. New sharp Gagliardo-Nirenberg-Sobolev inequalities and an improved Borell-Brascamp-Lieb inequality. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (10) :3042–3083, 2020.

[Bec89] William Beckner. A generalized Poincaré inequality for Gaussian measures. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 105(2) :397–400, 1989.

[BL96] D. Bakry and M. Ledoux. Sobolev inequalities and Myers's diameter theorem for an abstract Markov generator. *Duke Math. J.*, 85(1) :253–270, 1996.

[BL08] S. G. Bobkov and M. Ledoux. From Brunn-Minkowski to sharp Sobolev inequalities. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 187(3) :369–384, 2008.

[BVV91] Marie-Françoise Bidaut-Véron and Laurent Véron. Nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds and asymptotics of Emden equations. *Invent. Math.*, 106(3) :489–539, 1991.

[CT00] J. A. Carrillo and G. Toscani. Asymptotic L^1-decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 49(1) :113–142, 2000.

[CV03] J. A. Carrillo and J. L. Vázquez. Fine asymptotics for fast diffusion equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(5-6) :1023–1056, 2003.

[DEL16] Jean Dolbeault, Maria J. Esteban, and Michael Loss. Rigidity versus symmetry breaking via nonlinear flows on cylinders and Euclidean spaces. *Invent. Math.*, 206(2) :397–440, 2016.

[DGZ21] Louis Dupaigne, Ivan Gentil, and Simon Zugmeyer. Sobolev's inequality under a curvature-dimension condition. À paraître dans les Annales Mathématiques de Toulouse, 2021.

[Fat18] Max Fathi. A sharp symmetrized form of Talagrand's transport-entropy inequality for the Gaussian measure. *Electron. Commun. Probab.*, 23 :Paper No. 81, 9, 2018.

[FM08] M. Fradelizi and M. Meyer. Some functional inverse Santaló inequalities. *Adv. Math.*, 218(5) :1430–1452, 2008.

[Goz20] Nathael Gozlan. The deficit in the Gaussian Log-Sobolev inequality and inverse Santalo inequalities. *Int. Math. Res. Not.*, 2020.

[GS81] B. Gidas and J. Spruck. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 34(4) :525–598, 1981.

[GZ19] Ivan Gentil and Simon Zugmeyer. A family of Beckner inequalities under various curvature-dimension conditions. À paraître dans Bernoulli, February 2019.

[Ili83] Saïd Ilias. Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 33(2) :151–165, 1983.

[IS20] Hiroshi Iriyeh and Masataka Shibata. Symmetric Mahler's conjecture for the volume product in the 3-dimensional case. *Duke Math. J.*, 169(6) :1077–1134, 2020.

[Jü16] Ansgar Jüngel. *Entropy methods for diffusive partial differential equations.* SpringerBriefs in Mathematics. Springer, [Cham], 2016.

[SR81] J. Saint-Raymond. Sur le volume des corps convexes symétriques. In *Initiation Seminar on Analysis : G. Choquet-M. Rogalski-J. Saint-Raymond, 20th Year : 1980/1981*, volume 46 of *Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie*, pages Exp. No. 11, 25. Univ. Paris VI, Paris, 1981.

[Zug19] Simon Zugmeyer. Sharp trace Gagliardo-Nirenberg-Sobolev inequalities for convex cones, and convex domains. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 36(3) :861–885, 2019.

[Zug20] Simon Zugmeyer. Entropy flows and function inequalities on convex sets. Pré-publication, 2020.