

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Motivation</b>	<b>2</b>
1.1	Théorie de l'intersection . . . . .	2
1.2	Le complexe cotangent . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Le théorème de Dold-Kan</b>	<b>8</b>
2.1	Objets simpliciaux . . . . .	8
2.2	Morphismes de face et de dégénérescence . . . . .	11
2.3	Théorème de Dold-Kan . . . . .	12
2.4	Preuve du théorème de Dold-Kan . . . . .	15
2.5	Inverse de l'isomorphisme de Dold-Kan . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Rappels sur les catégories dérivées</b>	<b>22</b>
<b>4</b>	<b>Ensembles simpliciaux et espaces topologiques</b>	<b>23</b>
4.1	Réalisation géométrique d'un ensemble simplicial . . . . .	23
4.2	Réalisation géométrique et produit . . . . .	28
4.3	Complexe singulier d'un espace topologique . . . . .	29
4.4	Complexes de Kan . . . . .	30
4.5	Complexes de Kan et homotopies . . . . .	34
4.6	Fibrations de Kan . . . . .	37
4.7	Hom interne . . . . .	39
4.8	Extensions anodines . . . . .	41
4.9	Application des extensions anodines . . . . .	47
4.10	Quelques résultats difficiles . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Foncteurs dérivés</b>	<b>55</b>
5.1	Définition et exemples . . . . .	55
5.2	Catégories de modèles . . . . .	60
5.3	Construction de structures de modèles . . . . .	64
5.4	Catégories de modèles simpliciales . . . . .	68
5.5	Exemples . . . . .	72
5.5.1	Groupes simpliciaux . . . . .	72
5.5.2	$R$ -modules simpliciaux . . . . .	72
5.5.3	$R$ -algèbres simpliciales . . . . .	73
5.5.4	Modules et algèbres sur un anneau simplicial . . . . .	75
5.6	Catégories de modèles propres . . . . .	75
5.7	Résolutions standard . . . . .	76
5.8	Retour sur les foncteurs dérivés . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Autres exemples de foncteurs dérivés</b>	<b>81</b>
6.1	Produit tensoriel . . . . .	81

6.2	Hom simplicial et Spec dérivé . . . . .	82
6.3	Homologie de Quillen . . . . .	85
6.4	Complexe cotangent . . . . .	87
6.5	Déformations . . . . .	95
6.6	Dérivé d'un schéma en groupes affine . . . . .	99
6.7	Variété des représentations dérivée . . . . .	101
<b>7</b>	<b><math>\infty</math>-catégories</b>	<b>102</b>
7.1	Motivation . . . . .	102
7.2	Deux modèles possibles pour les $\infty$ -catégories . . . . .	103
7.3	Localisation simpliciale de Dwyer-Kan . . . . .	107
7.4	Nerf simplicial et catégorification . . . . .	109
7.5	$\infty$ -catégories . . . . .	110
<b>A</b>	<b>Squelette et cosquelette</b>	<b>112</b>

# 1 Motivation

Les motivations générales, que j'ai déjà évoquée dans la présentation du cours, sont

- la théorie de l'intersection et la formule des multiplicités de Serre ;
- le complexe cotangent ;
- le principe de lissité cachée.

Un but plus concret de ce cours est de comprendre ce qu'est un schéma (ou champ) dérivé assez pour faire des choses comme définir un anneau de déformations galoisiennes dérivé, ou prouver la représentabilité de l'espace de module des fibrés vectoriels sur un schéma de dimension quelconque, et calculer leur complexe cotangent.

Mais d'abord, je vais parler un peu plus de la théorie de l'intersection (dans un cas simple) et du complexe cotangent, pour donner une idée de ce qu'on essaie de faire avec la géométrie algébrique dérivée.

## 1.1 Théorie de l'intersection

Un des premiers résultats que j'ai appris en géométrie algébrique (et qui était utilisé comme motivation pour préférer la géométrie algébrique à la Grothendieck à la géométrie algébrique classique à l'italienne) est le théorème de Bézout.

**Théorème de Bézout 1.1.1.** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos, et soient  $F_1$  et  $F_2$  deux polynômes homogènes dans  $k[t_0, t_1, t_2]$  de degrés respectifs  $d_1$  et  $d_2$ . On suppose que les courbes  $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}_k^2$  définies par  $F_1$  et  $F_2$  n'ont pas de composante irréductible commune.*

Alors le nombre de points de l'intersection  $C_1 \cap C_2$ , compté avec multiplicités, est exactement  $d_1 d_2$ .

Rappelons la définition des multiplicités dans ce cas : si  $x \in C_1 \cap C_2$ , alors la multiplicité de l'intersection  $C_1 \cap C_2$  en  $x$  est donnée par

$$(*) \quad \mu(x, C_1 \cdot C_2) = \dim_k(\mathcal{O}_{C_1, x} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, x}} \mathcal{O}_{C_2, x}).$$

Si  $x$  est un point d'intersection transverse, alors on a une suite régulière  $(t_1, t_2)$  dans l'anneau local régulier  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, x}$  telle que  $\mathcal{O}_{C_i, x} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, x} / (t_i)$ , et donc  $\mathcal{O}_{C_1, x} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, x}} \mathcal{O}_{C_2, x} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, x} / (t_1, t_2) = k$  et on retrouve le fait que la multiplicité est 1. En général, le produit tensoriel peut avoir des éléments nilpotents non triviaux.

En langage plus compliqué : Pour tout schéma  $X$  et tout entier  $i$ , on note  $\text{CH}^i(X)$  le groupe des cycles de codimension  $i$  dans  $X$  modulo équivalence rationnelle. La théorie de l'intersection donne une structure d'anneau gradué sur  $\text{CH}^\bullet(X) := \bigoplus_{i \geq 0} \text{CH}^i(X)$ . Si  $X = \mathbb{P}^n$ , on a  $\text{CH}^\bullet(X) = \mathbb{Z}[H]/(H^{n+1})$ , où  $H$  est un élément de degré 1 donné par la classe d'un hyperplan quelconque. Si  $C$  est une courbe de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^2$ , alors  $[C] = d[L]$  où  $L$  est une droite. Le théorème de Bézout dit juste que le produit  $\text{CH}^1(\mathbb{P}^2) \times \text{CH}^1(\mathbb{P}^2) \rightarrow \text{CH}^2(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}$  est donné par

$$[C_1] \cdot [C_2] = \sum_{x \in C_1 \cap C_2} \mu(x, C_1 \cdot C_2)[x] \in \text{CH}^2(\mathbb{P}^2) \mapsto \sum_{x \in C_1 \cap C_2} \mu(x, C_1 \cdot C_2) \in \mathbb{Z}.$$

Quand on essaie de généraliser ceci à l'intersection de deux sous-fermés  $Z_1$  et  $Z_2$  dans une variété lisse  $X$ , on a au moins deux problèmes qui se posent :

- (i) L'intersection pourrait ne pas avoir la bonne dimension. Par exemple, dans l'exemple du théorème de Bézout, ceci correspond au cas où  $C_1$  et  $C_2$  ont une composante irréductible en commun.
- (ii) Si  $\dim(X) \geq 3$ , l'analogie de la formule (\*) n'est plus vrai.

La solution classique à (i) est de remplacer, disons,  $Z_1$  par un autre fermé  $Z'_1$  tel que  $[Z_1] = [Z'_1]$  et que l'intersection  $Z'_1 \cap Z_2$  est la dimension attendue. La solution à (ii) est la formule des multiplicités de Serre. En fait, on peut résoudre les deux problèmes de manière uniforme.

**Exemple 1.1.2.** Voici un exemple du problème (ii) dans  $\mathbb{P}^4$ .<sup>1</sup> On appelle les coordonnées homogènes  $[t_0 : t_1 : t_2 : t_3 : t_4]$ , et on considère les hyperplans  $X_1 = (t_1 = t_2 = 0)$  et  $X_2 = (t_3 = t_4 = 0)$ . Leur intersection (transverse) est le point  $p = [1 : 0 : 0 : 0 : 0]$ . Soit  $X = X_1 \cup X_2$ . Si  $Y$  est un hyperplan générique dans  $\mathbb{P}^4$ , il intersecte  $X_1$  et  $X_2$  transversalement en deux points disjoints, donc on s'attend à ce que  $[Y] \cdot [X] = 2 \in \text{CH}^2(\mathbb{P}^4) \simeq \mathbb{Z}$  pour tout hyperplan  $Y$ .

---

1. Piqué à Ravi Vakil, cf. <http://math.stanford.edu/~vakil/245/245class1.pdf>.

Prenons  $Y = (t_1 = t_2, t_2 = t_4)$ . Alors  $Y \cap X = \{p\}$ . Essayons de calculer la multiplicité avec la formule (\*). On se place dans le voisinage affine  $\text{Spec } k[t_1, t_2, t_3, t_4]$  de  $p$ . Alors  $X_1 = V((t_1, t_2))$  et  $X_2 = V((t_3, t_4))$ , donc  $X$  est le lieu d'annulation de l'idéal

$$I := (t_1, t_2) \cap (t_3, t_4) = (t_1 t_3, t_1 t_4, t_2 t_3, t_2 t_4).$$

D'autre part,  $Y = V((t_1 - t_3, t_2 - t_4))$ . Donc on doit calculer  $k[t_1, t_2, t_3, t_4]/I \otimes_{k[t_1, t_2, t_3, t_4]} k[t_1, t_2, t_3, t_4]/(t_1 - t_3, t_2 - t_4)$ . Ce produit tensoriel est égal à

$$k[t_1, t_2, t_3, t_4]/(t_1 t_3, t_1 t_4, t_2 t_3, t_2 t_4, t_1 - t_3, t_2 - t_4) \simeq k[t_1, t_2]/(t_1^2, t_1 t_2, t_2^2),$$

qui est un  $k$ -espace vectoriel de dimension 3. D'où malaise.

L'idée est de remplacer dans la formule (\*) le produit tensoriel par le produit tensoriel dérivé (et  $\dim_k$  par une caractéristique d'Euler-Poincaré).

On va regarder explicitement ce qui se passe dans le cas de l'intersection de deux courbes sur une surface.<sup>2</sup> Soit  $X$  une surface projective et lisse sur  $k$ , soient  $C$  et  $D$  deux courbes de  $X$  (i.e. deux sous-schémas purement de codimension 1, ou deux diviseurs effectifs). Pour simplifier encore plus, on va juste essayer de définir le degré  $C \cdot D$  de  $[C] \cdot [D] \in \text{CH}^2(X)$ . On veut que cette opération ait les propriétés suivantes :

- (a)  $C \cdot D$  est additif en les deux variables.
- (b) Si tous les points d'intersections de  $C$  et  $D$  sont transverses, alors  $C \cdot D$  est le cardinal de  $C \cap D$ .
- (c) Si on a  $C \sim C'$  et  $D \sim D'$  (où  $\sim$  est l'équivalence rationnelle), alors  $C \cdot D = C' \cdot D'$ .

**Théorème 1.1.3.** *Il existe une seule opération vérifiant les conditions (a), (b) et (c), et cette opération est donné par*

$$C \cdot D = \chi(\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_D).$$

Rappelons que :

- Le complexe de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_D$  est appelé le produit tensoriel dérivé et défini de la manière suivante :<sup>3</sup> On choisit une résolution  $\cdots \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$  par des  $\mathcal{O}_X$ -modules plats, et alors  $\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_D$  est le complexe  $(\cdots \rightarrow \mathcal{F}_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{F}_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D)$ . Ce complexe dépend de la résolution choisie, mais son homologie (à isomorphisme unique près), et cette homologie est égale à  $\underline{\text{Tor}}_*^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_D)$  (Tor faisceautiques).

De plus, on peut calculer  $\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_D$  en utilisant une résolution plate de  $\mathcal{O}_D$ , ou en résolvant les deux facteurs et en prenant le complexe total du bicomplexe obtenu.

2. Exemple piqué à Akhil Matthew, qui l'a piqué à Daniel Erman.

3. Voir la section ?? pour plus de détails.

- Si  $\mathcal{E}^\bullet$  est un complexe de  $\mathcal{O}_X$ -modules, alors

$$\chi(\mathcal{E}^\bullet) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{E}^\bullet).$$

*Preuve.* Montrons l'unicité. On va utiliser le théorème de Bertini, qui dit que, si  $Y$  est une variété projective lisse et  $Y \rightarrow \mathbb{P}^N$  est un plongement fermé, alors une section hyperplane générique de  $Y$  est lisse.

Soit  $H$  un diviseur ample sur  $X$ . Pour  $n \gg 0$ , les diviseurs  $nH$ ,  $nH + C$  et  $nH + D$  sont tous les trois très amples. Montrons que le produit  $(nH) \cdot (nH + C)$  est uniquement déterminé par les conditions (b) et (c). Comme  $nH + C$  est très ample, on a une immersion fermée  $X \rightarrow \mathbb{P}^N$  telle que  $nH + C$  soit une section hyperplane de  $X$  pour cette immersion. D'après le théorème de Bertini, une section hyperplane générique est lisse (et rationnellement équivalente à  $nH + C$ ), donc il existe une courbe lisse  $C'$  sur  $X$  qui est rationnellement équivalente à  $nH + C$ . Soit  $X \rightarrow \mathbb{P}^M$  une immersion fermée telle que  $nH$  soit une section hyperplane pour cette immersion. D'après le théorème de Bertini, appliqué cette fois à  $X \rightarrow \mathbb{P}^M$  et  $C' \rightarrow \mathbb{P}^M$ , si on remplace  $nH$  par une section hyperplane générique  $H'$ , alors  $H'$  et  $H' \cap C'$  sont lisses ; la deuxième condition dit que  $H'$  intersecte  $C'$  transversalement. Les propriétés (b) et (c) donnent alors

$$(nH + C) \cdot (nH) = C' \cdot H' = \text{card}(C' \cap H').$$

On voit de même que les propriétés (b) et (c) déterminent  $(nH + D) \cdot (nH)$  et  $(nH + C) \cdot (nH + D)$ . Finalement, la propriété (a) permet d'en déduire  $C \cdot D$ .

Montrons que la formule de l'énoncé vérifie bien les propriétés (a), (b) et (c).

(b) Soit  $x \in C \cap D$ , supposons que l'intersection soit transverse en  $x$ . Comme plus haut, on a alors on a une suite régulière  $(t_1, t_2)$  dans l'anneau local régulier  $\mathcal{O}_{X,x}$  telle que  $\mathcal{O}_{C_i,x} = \mathcal{O}_X/(t_i)$ . Alors

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\times t_1} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

est une résolution de  $\mathcal{O}_C$  par des  $\mathcal{O}_X$ -modules libres, donc on peut s'en servir pour calculer  $\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_D$ . On trouve que  $\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_D$  est le complexe (placé en degré 1 et 0)

$$\mathcal{O}_X/(t_2) \xrightarrow{\times t_1} \mathcal{O}_X/(t_2).$$

La flèche de ce complexe est injective, donc il n'y a de l'homologie qu'en degré 0, et son  $H_0$  est  $\mathcal{O}_X/(t_1, t_2)$ . Ceci signifie que  $\mathcal{O}_{C_1,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}^L \mathcal{O}_{C_2,x} = \mathcal{O}_{X,x}/(t_1, t_2) = k$ . Donc si tous les points d'intersection sont transverses,  $\mathcal{O}_{C_1} \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_{C_2}$  est la somme sur  $x \in C_1 \cap C_2$  des faisceaux grasse-cielles de valeur  $k$  en  $x$ , ce qui donne (b).

(c) On remarque qu'on a des suites exactes de  $\mathcal{O}_X$ -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-C) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0,$$

qui sont des résolutions de  $\mathcal{O}_C$  et  $\mathcal{O}_D$  par des  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres. Donc  $\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_D$  est le complexe (en degrés 2, 1 et 0) :

$$\mathcal{O}_X(-C-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-C) \oplus \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$

Comme  $\chi$  est additive sur les suites exactes courtes, on en déduit que

$$(**) \quad C \cdot D = \chi(\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_D) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-C)) - \chi(\mathcal{O}_X(-D)) + \chi(\mathcal{O}_X(-C-D)).$$

Or il est clair que le terme de droite de cette formule ne dépend que des classes d'équivalence rationnelles de  $C$  et  $D$ .

- (a) Version “marteau pilon” : Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch implique que, pour tout complexe de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{E}^\bullet$  (qui est automatiquement parfait, car  $X$  est lisse),

$$\chi(\mathcal{E}^\bullet) = f_*(\text{ch}(\mathcal{E}^\bullet)\text{td}(X)),$$

où  $\text{ch}(\mathcal{E}^\bullet) \in \text{CH}^\bullet(X)$  est le caractère de Chern de  $\mathcal{E}^\bullet$  et  $\text{td}(X)$  est la classe de Todd du fibré tangent de  $X$ . Or on sait que  $\text{ch}$  envoie  $\otimes_{\mathcal{O}_X}^L$  sur le produit et est additif sur les triangles distingués.

Version élémentaire : Si  $A$  est un  $\mathbb{Z}$ -module, on dit qu'une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$  est *polynomiale de degré  $\leq d$*  si, pour tous  $n \geq 1$  et tous  $a_1, \dots, a_n \in A$ , la fonction  $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(c_1, \dots, c_n) \mapsto f(c_1 a_1 + \dots + c_n a_n)$ , est donnée par un polynôme de degré  $\leq d$ . Si  $f$  est polynomiale de degré  $\leq 2$ , alors la fonction  $A^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(a, b) \mapsto f(a+b) - f(a) - f(b) + f(0)$  est biadditive. Grâce à la formule (\*\*), il suffit donc de prouver que  $\chi : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  est polynomiale de degré  $\leq 2$ .<sup>4</sup>

Montrons ce fait. Soient  $a_1, \dots, a_n \in \text{Pic}(X)$ . Quitte à rajouter un élément, on peut supposer que l'un des  $a_i$  est très ample. Après un changement de coordonnées  $\mathbb{Z}$ -linéaire, on peut supposer que tous les  $a_i$  sont très amples. On fixe  $i$  et on note  $\mathcal{L}$  un fibré en droites de classe  $a_i$ . Soit  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  une section globale non nulle. Si  $H = V(s)$ , alors  $\dim(H) \leq 1$ . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \xrightarrow{s} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow 0.$$

Donc, si  $\mathcal{L}'$  est un autre fibré en droites, alors

$$\chi(\mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1}) + \chi(\mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_H) = \chi(\mathcal{L}').$$

On remarque  $\chi(\mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_H)$  est une fonction polynomiale de degré  $\leq 1$  sur  $\text{Pic}(X)$ , car c'est la composée de  $\chi : \text{Pic}(H) \rightarrow \mathbb{Z}$  et du morphisme de groupes  $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(H)$ ,  $\mathcal{L}' \mapsto \mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_H$ .

Par conséquent, la fonction  $x \mapsto \chi(x - a_i) - \chi(x)$  est polynomiale de degré  $\leq 1$  pour tout  $i$ . On voit facilement que ceci implique que  $(c_1, \dots, c_n) \mapsto \chi(c_1 a_1 + \dots + c_n a_n)$  est polynomiale de degré  $\leq 2$ .

---

4. En fait, si  $X$  est projective de dimension  $d$ , alors  $\chi : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  est polynomiale de degré  $\leq d$ , cf. [20]. La preuve est une récurrence sur  $d$ , qui est une généralisation facile du cas  $d = 2$ . Pour une version très générale, voir [21, Tag 0DN4],

□

**Exemple 1.1.4.** Faisons le calcul dans le cas où  $C = D$  est lisse pour nous rassurer.

La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

donne

$$\chi(\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_D) = \chi(\mathcal{O}_D) - \chi(\mathcal{O}_D(-C)).$$

D'après le théorème de Riemann-Roch (pour les courbes), si  $D$  est lisse, ceci est égal à  $\deg(\mathcal{O}_D(C))$ . Donc si  $C = D$  est lisse, alors  $C \cdot C = \deg(\mathcal{O}_C(C))$ . Or  $\mathcal{O}_C(C) = N_{C/X}$  (le fibré normal de  $C$  dans  $X$ ), et donc on retrouve la formule habituelle pour  $C \cdot C$ .

*Remarque 1.1.5.* On considère le cas  $X$  où est une variété projective et lisse de dimension quelconque. Si  $Y$  et  $Z$  sont deux fermés de  $X$ , on définit  $[Y] \cdot [Z] \in \text{CH}^\bullet(X)$  comme l'image par le caractère de Chern de la classe du complexe de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_Z$  dans  $K^0(X)$ . Pour le même de raison (il faut cette fois utiliser le marteau pilon de Grothendieck-Riemann-Roch), ce produit est toujours bi-additif, commutatif et compatible à l'équivalence rationnelle, et donne le résultat attendu si l'intersection est transverse.

Les formules ci-dessus pour  $C \cdot D$  (resp.  $[Y] \cdot [Z]$ ) donnent envie de définir une "intersection dérivée" de  $C$  et  $D$ , qui serait l'espace topologique  $C \cap D$  muni du "faisceaux d'anneaux dérivés"  $\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_D$  (resp...). Problèmes :

- Ce truc n'est pas un schéma en général, il faut élargir le cadre.
- Le produit tensoriel dérivé  $\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_D$  est un complexe de  $\mathcal{O}_X$ -modules, il n'est pas clair comment en faire un "anneau" (dérivé ou pas). En d'autres termes, on ne sait pas ce que cela veut dire de dériver le foncteur  $\otimes_{\mathcal{O}_X}$  lorsqu'on le voit comme un foncteur entre catégories d'anneaux.

## 1.2 Le complexe cotangent

On va en reparler plus tard, donc je dirai le minimum. Cette section n'aura pas beaucoup de sens pour quelqu'un qui n'a jamais vu la définition du complexe cotangent, son but est de donner une motivation pour l'introduction des objets simpliciaux.

Si  $A \longrightarrow B \longrightarrow C$  sont des morphismes d'anneaux commutatifs, on a une suite exacte de  $C$ -modules

$$\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \longrightarrow \Omega_{C/A}^1 \longrightarrow \Omega_{C/B}^1 \longrightarrow 0.$$

Cette suite n'est pas exacte à gauche en général, ce qui suggère qu'on devrait pouvoir définir des foncteurs dérivés (à gauche) de  $\Omega^1$  (dans un sens convenable) pour obtenir une suite exacte longue.

Pour cela, on fixe un morphisme d'anneaux commutatifs  $A \rightarrow B$ , et on considère la catégorie  $\text{Alg}_B^A$  des  $A$ -algèbres (commutatives) au-dessus de  $B$  (i.e. des  $A$ -algèbre  $X$  munies d'un morphisme de  $A$ -algèbres  $X \rightarrow B$ ).

On a un foncteur  $\text{Alg}_B^A \rightarrow \text{Mod}_B$  (la catégorie des  $B$ -modules), donné par  $X \mapsto \Omega_{X/A}^1 \otimes_X B$ .<sup>5</sup> C'est ce foncteur que l'on veut dériver, pour obtenir le foncteur  $X \mapsto \mathbb{L}_{X/A} \otimes_X^L B$ .

L'idée est de remplacer  $X$  par l'analogue d'une résolution projective de  $X$  : Ce doit être un objet simplicial  $X_\bullet$  de  $\text{Alg}_B^A$ , qui a de bonnes propriétés, analogues à celles d'un module projectif : de manière très vague, il est facile de définir des morphismes de source  $X_\bullet$  (ie de compléter des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow & \downarrow \\ X_\bullet & \longrightarrow & B \end{array}$$

de polynomes sur  $A$  (et que les morphismes de dégénérescence préservent les générateurs). Le fait que  $X_\bullet$  soit une résolution de  $X$  signifie que l'on a une augmentation  $X_\bullet \rightarrow X$  telle que  $\pi_0(X_\bullet) \xrightarrow{\sim} X$  et  $\pi_n(X_\bullet) = 0$  si  $n \geq 1$ . On pose alors  $\mathbb{L}_{X/A} = \Omega_{X_\bullet/A}^1 \otimes_{X_\bullet} X$ .

Effectivement cela donne bien un foncteur qui se comporte comme le foncteur dérivé de  $X \mapsto \Omega_{X/A}^1 \otimes_X B$ . Par exemple, on a  $H_0(\mathbb{L}_{X/A}) = \Omega_{X/A}^1$ , et, si  $A \rightarrow B \rightarrow C$ , la suite exacte ci-dessous se prolonge en un triangle distingué

$$\mathbb{L}_{B/A} \otimes_B^L C \rightarrow \mathbb{L}_{C/A} \rightarrow \mathbb{L}_{C/B} \xrightarrow{+1}.$$

## 2 Le théorème de Dold-Kan

Je vais essayer de vous convaincre que, si l'on veut dériver des foncteurs sur catégories non abéliennes, c'est une très bonne idée d'utiliser des objets simpliciaux. Plus tard,<sup>6</sup> nous verrons qu'en fait on peut à peu près tout remplacer par des objets simpliciaux (les espaces topologiques, les catégories...). La définition du complexe cotangent était un indice, le théorème de Dold-Kahn en est un autre.

### 2.1 Objets simpliciaux

**Notation 2.1.1.**  $\text{Ens}$  est la catégorie des ensembles,  $\text{Ab}$  celle des groupes abéliens,  $R\text{-Mod}$  celle des  $R$ -modules à gauche (pour tout anneau  $R$ ).

**Définition 2.1.2.** La *catégorie simpliciale* est la catégorie  $\Delta$  dont les objets sont les  $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et dont les morphismes sont les applications croissantes.

5. C'est un foncteur d'"abélianisation" en un certain sens qu'on verra peut-être plus tard.

6. quand?

*Remarque 2.1.3.* On peut aussi définir  $\Delta$  comme la catégorie des ensembles totalement ordonnés finis non vides. (Cette catégorie est équivalente à celle de la définition ci-dessus.)

**Définition 2.1.4.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. La catégorie  $s\mathcal{C}$  des *objets simpliciaux de  $\mathcal{C}$*  est la catégorie des foncteurs contravariants de  $\Delta$  dans  $\mathcal{C}$ . En d’autres termes, un objet  $X_\bullet$  de  $s\mathcal{C}$  est la donnée :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , d’un objet  $X_n$  de  $\mathcal{C}$  ;
- pour toute application croissante  $f : [n] \longrightarrow [m]$ , d’un morphisme  $X_\bullet(f) = f^* : X_m \longrightarrow X_n$  ;

tels que si on a  $[n] \xrightarrow{f} [m] \xrightarrow{g} [p]$ , alors  $X_\bullet(fg) = X_\bullet(g)X_\bullet(f)$ .

Un morphisme  $u : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$  de  $s\mathcal{C}$  est la donnée, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , d’un morphisme  $u_n : X_n \longrightarrow Y_n$  de  $\mathcal{C}$ , telle que, pour toute application croissante  $f : [n] \longrightarrow [m]$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X_m & \xrightarrow{u_m} & Y_m \\ X_\bullet(f) \downarrow & & \downarrow X_\bullet(f) \\ X_n & \xrightarrow{u_n} & Y_n \end{array}$$

**Exemple 2.1.5.** Si  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}$ , l’objet simplicial constant de valeur  $X$  est l’objet  $X_\bullet$  de  $s\mathcal{C}$  tel que  $X_n = X$  pour tout  $n \geq 0$  et  $X_\bullet(f) = \text{id}_X$  pour toute  $f : [n] \longrightarrow [m]$ .

Si  $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$  (resp.  $\mathbf{Ab}$ , resp.  $R\text{-Mod}\dots$ ) on dit “ensemble simplicial” (resp. “groupe abélien simplicial”, “ $R$ -module simplicial”...) au lieu de “objet simplicial de  $\mathcal{C}$ ”.

*Remarque 2.1.6.* Toutes les limites inductives ou projectives qui existent dans  $\mathcal{C}$  existent aussi dans  $s\mathcal{C}$  et se calculent “étage par étage”. Il s’agit en fait d’un résultat général sur les catégories de préfaisceaux, voir par exemple [21, Tag 00VB]).

Nous allons voir deux exemples très importants d’ensembles simpliciaux : le nerf d’une catégorie et les simplexes standard.

**Définition 2.1.7.** Si  $(I, \leq)$  est un ensemble ordonné, on le voit comme une catégorie (encore notée  $I$ ) de la manière suivante :

- Les objets sont les éléments de  $I$ .
- Pour tous  $i, j \in I$ ,  $\text{Hom}(i, j) = \begin{cases} * & \text{si } i \leq j \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$

Les flèches se composent de la seule manière possible. Une application croissante  $f : I \longrightarrow J$  entre ensembles ordonnés donne de manière évidente un foncteur  $I \longrightarrow J$ , qu’on notera encore  $f$ .

**Définition 2.1.8.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Le *nerf* de  $\mathcal{C}$  est l’ensemble simplicial  $N(\mathcal{C})_\bullet = N(\mathcal{C})$  défini de la manière suivante :

- $N(\mathcal{C})_n = \mathbf{Fonc}([n], \mathcal{C})$ . En d'autres termes,  $N(\mathcal{C})_n$  est l'ensemble  $\{\bullet \xrightarrow{u_1} \bullet \xrightarrow{u_2} \dots \bullet \xrightarrow{u_n} \bullet\}$  des suites de  $n$  flèches composables de  $\mathcal{C}$ .
- Si  $f : [n] \rightarrow [m]$ , l'application  $N(\mathcal{C})_m \rightarrow N(\mathcal{C})_n$  envoie  $F : [m] \rightarrow \mathcal{C}$  sur  $F \circ f$ .

Notons que  $N(\mathcal{C})$  contient toute l'information sur la catégorie  $\mathcal{C}$ . Nous donnerons un sens très précis à cette affirmation plus tard.<sup>7</sup>

**Exemple 2.1.9.** Le nerf de  $[n]$  est  $\Delta[n]$ .

**Exemple 2.1.10.** Soit  $G$  un groupe (discret). On considère la catégorie  $\mathcal{C}$  qui a un seul objet  $\bullet$ , et telle que  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, \bullet) = G$ , avec la composition donnée par la multiplication dans  $G$ . Alors le nerf de  $\mathcal{C}$  est noté  $BG$  et appelé l'*espace classifiant de  $G$* . Concrètement, on a  $BG_n = G^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et, si  $f : [n] \rightarrow [m]$  est une application croissante, alors  $f^* : G^m \rightarrow G^n$  envoie  $(g_1, \dots, g_m)$  sur  $(h_1, \dots, h_n)$  défini par

$$h_i = \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j$$

(avec la convention que le produit vide est l'unité de  $G$ ).

Avant de présenter le deuxième exemple, on commence par rappeler l'énoncé du lemme de Yoneda.

**Définition 2.1.11.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Pour tout  $X \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$ , on note  $h_X : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur  $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ .

La formation de  $h_X$  est fonctorielle en  $X$ , et donne donc un foncteur (covariant)  $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Fonc}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ens})$ .

**Lemme de Yoneda 2.1.12.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Soient  $X \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$  et  $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur. On considère l'application  $F(X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fonc}}(h_X, F)$  qui envoie  $a \in F(X)$  sur le morphisme fonctoriel  $u : h_X \rightarrow F$  tel que, pour tout  $Y \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$  et tout  $f \in h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ ,  $u_Y(f) = F(f)(a) \in F(Y)$ .

Alors cette application est bijective.

En particulier, en prenant  $F = h_Y$ , on voit que l'application  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fonc}}(h_X, h_Y)$  induite par  $h$  est bijective. En d'autres termes, le foncteur  $h$  est pleinement fidèle, donc on peut l'utiliser pour identifier  $\mathcal{C}$  à une sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Fonc}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ens})$  (et quelquefois, on omettra même le “ $h$ ” dans cette identification). Rappelons aussi qu'un foncteur dans l'image essentielle de  $h$  est appelé *représentable*.

Revenons à notre exemple.

---

7. quand ?

**Définition 2.1.13.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le *simplexe standard de dimension  $n$*  est l'ensemble simplicial  $\Delta[n] = h_{[n]} : \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ . En d'autres termes, c'est le nerf de la catégorie associée à l'ensemble ordonné  $[n]$ .

D'après le lemme de Yoneda, pour tous  $n, m \in \mathbb{N}$ , on a une bijection canonique

$$\text{Hom}_{\Delta}([n], [m]) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n], \Delta[m]).$$

Ceci signifie que  $[n] \longrightarrow \Delta[n]$  est un foncteur pleinement fidèle de  $\Delta$  dans  $\mathbf{sEns}$ .<sup>8</sup>

Dans la suite, on utilisera quelques sous-ensembles simpliciaux de  $\Delta[n]$ .

**Définition 2.1.14.** Si  $0 \leq k \leq n$ , le  $k$ -cornet  $\Lambda_k^n$  dans  $\Delta[n]$  est le sous-ensemble simplicial donné par

$$\Lambda_k^n([m]) = \{f \in \text{Hom}_{\Delta}([m], [n]) \mid \text{card}(\text{Im}(f)) \leq n \text{ et } k \in \text{Im}(f)\}.$$

La terminologie vient de la réalisation topologique. Nous verrons plus tard qu'il existe un foncteur "réalisation topologique"  $|\cdot|$  de  $\mathbf{sEns}$  dans la catégorie des espaces topologiques, qui envoie  $\Delta(n)$  sur le simplexe standard  $|\Delta[n]| := \{(x_0, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1\}$ .<sup>9</sup> On note  $a_0, \dots, a_n$  les  $n+1$  points extrêmes de  $|\Delta[n]|$ , numérotés de telle sorte que la seule entrée non nulle de  $a_i$  soit la  $i$ -ième. Alors  $|\Lambda_k^n|$  est l'union des faces de dimension  $n-1$  de  $|\Delta[n]|$  qui contiennent  $a_k$ .

## 2.2 Morphismes de face et de dégénérescence

**Notation 2.2.1.** Si  $X$  est un ensemble, on utilise parfois la notation suivante pour les éléments de  $\text{Hom}_{\mathbf{Ens}}([n], X) : f : [n] \longrightarrow X$  est noté  $f(0) \longrightarrow f(1) \cdots \longrightarrow f(n)$ . (Cf. la définition du nerf d'une catégorie.)

**Définition 2.2.2.** 1. Pour tout  $n \geq 1$ , et tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $\delta^i : [n-1] \longrightarrow [n]$  l'unique application strictement croissante telle que  $i \notin \text{Im}(\delta^i)$ . Avec la notation ci-dessus,  $\delta^i = (0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow i-1 \longrightarrow i+1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n)$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $\sigma^i : [n+1] \longrightarrow [n]$  l'unique application croissante telle que  $\text{card}((\sigma^i)^{-1}(j)) = \begin{cases} 2 & \text{si } j = i \\ 1 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$  Avec la notation ci-dessus,  $\sigma^i = (0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow i-1 \longrightarrow i \longrightarrow i \longrightarrow i+1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n)$ .

**Définition 2.2.3.** Soit  $X_{\bullet} \in \mathbf{sC}$ . On note  $d_i = X_{\bullet}(\delta^i) : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ ; ces flèches sont appelées les *morphismes de face*. On note  $s_i = X_{\bullet}(\sigma^i) : X_n \longrightarrow X_{n+1}$ ; ces flèches sont appelées les *morphismes de dégénérescence*.

8. Donc en particulier un objet cosimplicial de la catégorie  $\mathbf{sEns}$ , ie un ensemble simplicial cosimplicial.

9. Ce foncteur est uniquement déterminé par ce fait et par la propriété de commuter aux limites inductives.

On a le fait facile suivant :

**Fait 2.2.4.** (Identités simpliciales.) On a :

1.  $d_i d_j = d_{j-1} d_i$  si  $i < j$ .
2.  $d_i s_j = s_{j-1} d_i$  si  $i < j$ .
3.  $d_i s_j = \text{id}$  si  $i = j$  ou  $i = j + 1$ .
4.  $d_i s_j = s_j d_{i-1}$  si  $i > j$ .
5.  $s_i s_j = s_j s_{i-1}$  si  $i > j$ .

(Il faut choisir des  $n$  pour les  $d_i$  et  $s_j$  pour que ces identités ait un sens, mais il y a un seul choix cohérent possible.)

De plus :

**Proposition 2.2.5.** Si on se donne une suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  d'objets de  $\mathcal{C}$  et des flèches  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$  pour tous  $n \geq 1$  et  $0 \leq i \leq n$ , et  $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$  pour tous  $n \geq 0$  et  $0 \leq i \leq n$ , telles que les identités simpliciales ci-dessus soient vérifiées, alors il existe un unique objet simplicial de  $\mathcal{C}$  étendant ces données.

**Exemple 2.2.6.** Calculons les morphismes de face et de dégénérescence de l'espace classifiant d'un groupe  $G$  (voir l'exemple 2.1.10). Soit  $n \geq 1$ . Alors on a

$$d_i(g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} (g_2, \dots, g_n) & \text{si } i = 0 \\ (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ (g_1, \dots, g_{n-1}) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

D'autre part, si  $n \geq 0$ , alors

$$s_i(g_1, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_i, 1, g_{i+1}, \dots, g_n).$$

## 2.3 Théorème de Dold-Kan

Dans toute cette section,  $\mathcal{A}$  est une catégorie abélienne (par exemple  $R\text{-Mod}$  ou  $\mathbf{Ab}$ ). On notera  $C_*(\mathcal{A})$  la catégorie des complexes homologiques d'objets de  $\mathcal{A}$  ("homologiques" signifie que la différentielle diminue le degré), et  $C_{\geq 0}(\mathcal{A})$  la sous-catégorie pleine des complexes nuls en degré  $< 0$ .

**Définition 2.3.1.** On considère les deux foncteurs suivants de  $\mathbf{s}\mathcal{A}$  dans  $C_{\geq 0}(\mathcal{A})$  :

1. **Complexe de Moore non normalisé  $C$**  : Si  $X_\bullet \in \text{Ob}(\mathbf{s}\mathcal{A})$ , alors  $C(X_\bullet)$  est le complexe donné par  $C(X_\bullet)_n = X_n$ , avec la différentielle  $\partial_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$  définie par  $\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ .
2. **Complexe de Moore normalisé  $N$**  : Si  $X_\bullet \in \text{Ob}(\mathbf{s}\mathcal{A})$ , alors  $N(X_\bullet)$  est le sous-complexe de  $C(X_\bullet)$  donné par  $N(X_\bullet)_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Ker}(d_i)$ . La différentielle de  $N(X_\bullet)$  est donc donnée par la formule  $\partial_n = (-1)^n d_n$ .

**Théorème de Dold-Kan 2.3.2.** *Le foncteur  $N : \mathbf{sA} \rightarrow C_{\geq 0}(\mathcal{A})$  est une équivalence de catégories.*

*De plus, pour tout objet  $X_{\bullet}$  de  $\mathbf{sA}$ , l'inclusion  $N(X_{\bullet}) \rightarrow C(X_{\bullet})$  induit un isomorphisme sur les objets d'homologie (ie  $H_k(N(\bullet)) \xrightarrow{\sim} H_k(C(X_{\bullet}))$ ), pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .*

La deuxième partie du théorème est relativement facile à prouver. On définit des sous-objets  $D(X_{\bullet})_0$  de  $C(X_{\bullet})_n$  par  $D(X_{\bullet})_0 = 0$  et, pour  $n \geq 1$ ,

$$D(X_{\bullet})_n = \sum_{i=0}^{n-1} \text{Im}(s_i).$$

On a alors la proposition suivante.

**Proposition 2.3.3.** *Les  $D(X_{\bullet})_n$  forment un sous-complexe de  $C(X_{\bullet})$ , ce complexe est acyclique et on a, pour tout  $n \geq 0$ ,*

$$C(X_{\bullet})_n = N(X_{\bullet})_n \oplus D(X_{\bullet})_n.$$

Ceci implique en particulier que l'inclusion  $N(X_{\bullet}) \subset C(X_{\bullet})$  induit un isomorphisme en homologie.

*Preuve.* On note  $C_n, D_n, N_n$  au lieu de  $C(X_{\bullet})_n, D(X_{\bullet})_n, N(X_{\bullet})_n$ .

Soit  $n \geq 1$ . Pour tout  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ , on voit en utilisant les relations simpliciales que

$$\partial_n s_j = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i s_j = \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i s_{j-1} d_i + \sum_{i=j+2}^n (-1)^i s_j d_i,$$

donc  $\partial_n(D_n) \subset D_{n+1}$ .

Pour montrer que  $C_n = D_n \oplus N_n$ , on va raisonner comme si ces objets de  $\mathcal{A}$  étaient des modules sur un anneau, avec des éléments; on peut toujours se ramener à ce cas grâce au théorème de Freyd-Mitchell, voir [22] theorem 1.6.1. Soit  $n \geq 1$ . Montrons que  $D_n \cap N_n = 0$ . Soit  $x \in D_n \cap N_n$ . Alors  $x \in \sum_{i=0}^{n-1} \text{Im}(s_i)$ . On suppose que  $x \neq 0$ , et on choisit une expressions  $x = \sum_{i=i_0}^{n-1} s_i(x_i)$ , avec les  $x_i$  dans  $C_{n-1}$ ,  $x_{i_0} \neq 0$  et  $i_0$  minimal pour cette propriété. En utilisant le fait que  $x \in N_n$  et les identités simpliciales, on trouve

$$0 = d_{i_0}(x) = x_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} s_{i-1} d_{i_0}(x_i),$$

donc

$$s_{i_0}(x_{i_0}) = - \sum_{i=i_0+1}^{n-1} s_{i_0} s_{i-1} d_{i_0}(x_i) = - \sum_{i=i_0+1}^{n-1} s_i s_{i_0} d_{i_0}(x_i),$$

mais ceci contredit la minimalité de  $i_0$ . Donc  $x = 0$ . Montrons que  $C_n = D_n + N_n$ . Soit  $x \in C_n$ , soit  $j \in \{0, \dots, n\}$  le plus petit entier tel que  $d_j(x) \neq 0$ . On raisonne par récurrence descendante sur  $j$ . Si  $j = n$ , alors  $d_i(x) = 0$  pour  $i \leq n-1$ , donc  $x \in N_n$  et on a fini. Supposons  $j \leq n-1$ . Soit  $x' = x - s_j d_j(x)$ , on a clairement  $x \in x' + D_n$ . De plus,  $d_j(x') = 0$  et, si  $0 \leq i \leq j-1$ ,

$$d_i(x') = d_i(x) - d_i s_j d_j(x) = -s_{j-1} d_i d_j(x) = -s_{j-1} d_{j-1} d_i(x) = 0.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $x'$ , on voit que  $x' \in D_n + N_n$ , donc  $x \in x' + D_n \subset D_n + N_n$ .

Finalement, montrons que le complexe  $D_*$  est acyclique. On considère la filtration croissante  $F_p D_*$  donnée par  $F_0 D_n = 0$ ,  $F_p D_n = D_n$  si  $n \leq p$  et, si  $n > p$ ,

$$F_p D_n = \sum_{i=0}^p \text{Im}(s_i).$$

On voit comme plus haut que chaque  $F_p D_*$  est un sous-complexe de  $D_*$ . De plus, on a une suite spectrale convergente

$$E_{pq}^1 = H_{p+q}(F_p D_*/F_{p-1} D_*) \implies H_{p+q}(D_*)$$

(cf. [22] theorem 5.5.1). Il suffit donc de prouver que tous les complexes  $F_p D_*/F_{p-1} D_*$  sont acycliques. On fixe  $p$  et on note  $A_* = F_p D_*/F_{p-1} D_*$ . On considère les morphismes  $(-1)^p s_p : A_{n-1} \rightarrow A_n$ . Montrons qu'ils donnent une homotopie entre  $\text{id}_{A_*}$  et 0 (cf. la définition 2.3.4), ce qui impliquera que  $A_*$  est acyclique. Notons que tout élément de  $A_n$  est la classe modulo  $F_{p-1} D_n$  d'un élément de la forme  $s_p(x)$ , avec  $x \in C_{n-1}$ . On fixe un tel  $x$ . Alors

$$\partial_n s_p(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i s_p(x) = \sum_{i=p+2}^n (-1)^i s_p d_{i-1}(x) \pmod{F_{p-1} D_n},$$

donc

$$\partial_{n+1} s_p^2(x) = \sum_{i=p+2}^{n+1} (-1)^i s_p d_{i-1} s_p(x) = \sum_{i=p+1}^n (-1)^{i-1} s_p d_i s_p(x)$$

et

$$s_p \partial s_p(x) = \sum_{i=p+2}^n (-1)^i s_p s_i s_p(x).$$

Finalement,

$$(\partial_{n+1} s_p + s_p \partial_n)(s_p(x)) = (-1)^p s_p d_{p+1} s_p(x) = s_p(x),$$

ce qui est la relation cherchée. □

Avant de prouver l'équivalence dans le théorème de Dold-Kan, nous allons en donner quelques propriétés.

**Définition 2.3.4.** On dit que deux morphismes  $f, g : A_* \rightarrow B_*$  de  $C_*(\mathcal{A})$  sont *homotopes* s'il existe une famille de morphismes  $h_n : A_n \rightarrow B_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , tels que

$$f_n - g_n = h_{n-1} \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ h_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\partial_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots \\
 & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\
 & & \downarrow g_{n+1} & \nearrow h_n & \downarrow g_n & \nearrow h_{n-1} & \downarrow g_{n-1} & & \\
 \dots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{\partial_n} & B_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots
 \end{array}$$

**Définition 2.3.5.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie qui admet des coproduits finis (par exemple  $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$  ou  $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ ). Si  $Y_\bullet \in \text{Ob}(\mathbf{s}\mathcal{C})$  et  $X_\bullet \in \mathbf{s}\mathbf{Ens}$ , on définit  $X_\bullet \otimes Y_\bullet \in \text{Ob}(\mathbf{s}\mathcal{C})$  par :

- $(X_\bullet \otimes Y_\bullet)_n = \coprod_{i \in X_n} Y_n$  ;
- si  $f : [n] \rightarrow [m]$  est une flèche de  $\Delta$ , alors  $(X_\bullet \otimes Y_\bullet)(f) = \coprod_{i \in X_m} Y_m \rightarrow \coprod_{i \in X_n} Y_n$  envoie l'élément  $y \in Y_m$  indexé par  $i \in X_m$  vers l'élément  $Y_\bullet(f)(u) \in Y_n$  indexé par  $X_\bullet(f)(i) \in X_n$ .

Nous reviendrons plus tard sur cette définition et ses propriétés.<sup>10</sup>

**Définition 2.3.6.** On dit que deux morphismes  $f, g : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  sont *homotopes* s'il existe  $h : \Delta[1] \otimes X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  tel que  $h \circ s_0 = f$  et  $h \circ s_1 = g$ , où  $s_0, s_1 : \Delta[0] \rightarrow \Delta[1]$  sont les flèches induites par  $s_0, s_1 : [0] \rightarrow [1]$ .

$$\begin{array}{ccc}
 X_\bullet & \xrightarrow{s_0} & \Delta[1] \otimes X_\bullet & \xleftarrow{s_1} & X_\bullet \\
 & \searrow f & \downarrow h & \swarrow g & \\
 & & Y_\bullet & & 
 \end{array}$$

**Définition 2.3.7.** (Groupes d'homotopie d'un objet simplicial de  $\mathcal{A}$ .) Soit  $X_\bullet \in \mathbf{s}\mathcal{A}$ . On pose  $Z_0(X_\bullet) = X_0$  et, pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $Z_n(X_\bullet) = \bigcap_{i=0}^n \text{Ker}(d_i)$ . Pour tout  $n \geq 0$ , on pose

$$\pi_n(X_\bullet) = Z_n(X_\bullet) / (Z_n(X_\bullet) \cap \text{Im}(d_n : X_{n+1} \rightarrow X_n)).$$

Nous verrons plus tard comment définir les groupes d'homotopie d'un ensemble simplicial.

On a le supplément suivant au théorème Dold-Kan (dont la preuve est une simple vérification) :

**Théorème 2.3.8.** 1. Si  $f, g : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  sont deux morphismes de  $\mathbf{s}\mathcal{A}$ , alors  $f$  et  $g$  sont homotopes si et seulement si  $N(f)$  et  $N(g)$  sont homotopes.

2. Si  $X_\bullet \in \text{Ob}(\mathbf{s}\mathcal{A})$ , alors on a des isomorphismes canoniques  $\pi_n(X_\bullet) = H_n(N(X_\bullet))$ , pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

---

10. quand?

## 2.4 Preuve du théorème de Dold-Kan

Je vais donner une preuve que j'ai apprise de Charles Rezk sur mathoverflow, et qui me semble expliquer mieux que la preuve classique (cf. par exemple la section 8.4 de [22]) pourquoi le théorème de Dold-Kan est vrai. Mais au fond, les calculs sont les mêmes. Voir aussi [19] pour une présentation très abstraite de la même preuve.

On a d'abord besoin de quelques "rappels" sur les catégories pré-additives. L'idée est que l'on va rajouter de plus en plus de structure à une catégorie (par exemple  $\Delta$ ) sans changer la catégorie des foncteurs vers une catégorie abélienne ; le but est d'obtenir une catégorie source plus souple et plus facile à manipuler.

**Définition 2.4.1.** - Une *catégorie pré-additive* est une catégorie enrichie en groupes abéliens, c'est-à-dire que les  $\text{Hom}$  sont des groupes abéliens et que la composition est additive en chaque variable.

- Si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont des catégories pré-additives, un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est dit *additif* si, pour tous  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , l'application  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$  est un morphisme de groupes abéliens.

Ceci définit une sous-catégorie pleine  $\mathbf{Fonc}_{\text{add}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  de  $\mathbf{Fonc}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ .

- Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie, on définit une catégorie pré-additive  $\mathbb{Z}\mathcal{C}$  de la manière suivante :
  - Les objets de  $\mathbb{Z}\mathcal{C}$  sont en bijection avec les objets de  $\mathcal{C}$ . Pour tout  $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , on note  $\mathbb{Z}c$  l'objet correspondant de  $\mathbb{Z}\mathcal{C}$ .
  - Pour tous  $c, d \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathcal{C}}(\mathbb{Z}c, \mathbb{Z}d)$  est le groupe abélien libre  $\mathbb{Z}[\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)]$  sur l'ensemble  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ .

On a un foncteur évident  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{C}$ .

Le fait suivant est facile.

**Lemme 2.4.2.** Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie et  $\mathcal{D}$  est une catégorie pré-additive, la restriction le long du foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{C}$  induit une équivalence de catégories

$$\mathbf{Fonc}_{\text{add}}(\mathbb{Z}\mathcal{C}, \mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Fonc}(\mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

qui met en correspondance les foncteurs pleinement fidèles.

**Définition 2.4.3.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie pré-additive.

1. Soient  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ . On suppose que  $X \sqcup Y$  et  $X \times Y$  existent, et que le morphisme canonique  $X \sqcup Y \rightarrow X \times Y$  est un isomorphisme.<sup>11</sup> Alors  $X \sqcup Y = X \times Y$  est appelé le *biproduit* de  $X$  et  $Y$ , et noté  $X \oplus Y$ .

---

11. On rappelle que  $X \sqcup Y$  (resp.  $X \times Y$ ), s'il existe, est l'unique (à isomorphisme unique près) objet de  $\mathcal{C}$  qui représente le foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ ,  $Z \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  (resp.  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ ,  $Z \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ ). Donc  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \sqcup Y, X \times Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y)$ , et donc l'élément  $(\text{id}_X, 0, 0, \text{id}_Y)$  de ce produit correspond à un unique morphisme  $X \sqcup Y \rightarrow X \times Y$ .

2. On définit une catégorie  $\mathcal{C}^\oplus$  de la manière suivante :

- Un objet de  $\mathcal{C}^\oplus$  est un  $n$ -uplet  $(X_1, \dots, X_n)$  d'objets de  $\mathcal{C}$ , où  $n \geq 0$  est variable.
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}^\oplus}((X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_m))$  est l'ensemble des matrices  $(f_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ , avec  $f_{ij} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_j, Y_i)$ . La composition est donnée par la multiplication matricielle usuelle.

On a un foncteur pleinement fidèle évident  $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^\oplus$ , que l'on utilise pour identifier  $\mathcal{C}$  à une sous-catégorie de  $\mathcal{C}^\oplus$ .

La catégorie  $\mathcal{C}^\oplus$  est la catégorie que l'on obtient en rajoutant formellement tous les biproduits finis à  $\mathcal{C}$  (y compris le biproduit vide, qui est un objet final et initial). En effet, par définition des Hom dans  $\mathcal{C}^\oplus$ , on a  $(X_1, \dots, X_n) = X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ .

**Exemple 2.4.4.** Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie additive (par exemple abélienne), alors l'existence du biproduit de deux objets quelconques de  $\mathcal{C}$  fait partie des axiomes.

**Lemme 2.4.5.** Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie pré-additive et  $\mathcal{D}$  est une catégorie pré-additive qui admet tous les biproduits finis (par exemple une catégorie abélienne), la restriction le long du foncteur  $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^\oplus$  induit une équivalence de catégories

$$\mathbf{Fonc}_{\text{add}}(\mathcal{C}^\oplus, \mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Fonc}_{\text{add}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

qui met en correspondance les foncteurs pleinement fidèles.

**Définition 2.4.6.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie.

1. On dit qu'un endomorphisme  $p$  de  $\mathcal{C}$  est *idempotent* (ou *une projection*) si  $p^2 = p$ .
2. On note  $\overline{\mathcal{C}}$  la catégorie suivante :
  - Les objets de  $\overline{\mathcal{C}}$  sont les paires  $(X, p)$ , où  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et  $p \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  est idempotent.
  - Si  $(X, p), (Y, q) \in \text{Ob } \overline{\mathcal{C}}$ , alors  $\text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}((X, p), (Y, q))$  est l'ensemble des  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  tels que  $f = qf = fp$ . Autrement dit,

$$\text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}((X, p), (Y, q)) = q \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) p \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

La composition est donnée par la composition des morphismes de  $\mathcal{C}$ .

La catégorie  $\overline{\mathcal{C}}$  est appelée la *complétion idempotente* ou l'*enveloppe Karoubienne* de  $\mathcal{C}$ . C'est la catégorie que l'on obtient en rajoutant formellement toutes les images des projections de  $\mathcal{C}$ .

Notons qu'on a foncteur pleinement fidèle  $\mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}$  qui envoie  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  sur  $(X, \text{id}_X)$ . On l'utilise pour identifier  $\mathcal{C}$  à une sous-catégorie pleine de  $\overline{\mathcal{C}}$ .

**Lemme 2.4.7.** *Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie pré-additive et  $\mathcal{D}$  est une catégorie pré-additive où tous les idempotents ont une image (par exemple une catégorie abélienne), la restriction le long du foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$  induit une équivalence de catégories*

$$\mathbf{Fonc}_{\text{add}}(\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Fonc}_{\text{add}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

qui met en correspondance les foncteurs pleinement fidèles.

Revenons maintenant à la preuve du théorème de Dold-Kan. On fixe donc une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$ , et il s'agit de montrer que  $N : \mathbf{s}\mathcal{A} \rightarrow C_{\geq 0}(\mathcal{A})$  est une équivalence de catégories.

Notons  $\mathcal{D} = (\mathbb{Z}\Delta)^{\oplus}$ . C'est une catégorie pré-additive qui a tous les biproduits finis et où tous les idempotents ont une image, et d'après les lemmes ci-dessus, on a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Fonc}_{\text{add}}(\mathcal{D}^{\text{op}}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{s}\mathcal{A}.$$

On peut voir la catégorie  $\mathcal{D}$  de manière un peu plus concrète. En effet, on a un plongement de Yoneda  $\mathbb{Z}\Delta \rightarrow \mathbf{Fonc}_{\text{add}}(\mathbb{Z}\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Ab}) = \mathbf{Fonc}(\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Ab}) = \mathbf{sAb}$ , et la dernière catégorie est abélienne, donc ce plongement se prolonge en un foncteur pleinement fidèle  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbf{sAb}$ , et on peut identifier  $\mathcal{D}$  à son image essentielle par ce foncteur. Pour des raisons psychologiques, on notera  $\mathbb{Z}\Delta[n]$  au lieu de  $\mathbb{Z}[n]$  l'objet de  $\mathbb{Z}\Delta \subset \mathcal{D}$  correspondant à  $[n] \in \text{Ob } \Delta$ . Plus généralement, si  $X_{\bullet}$  est un ensemble simplicial, on notera  $\mathbb{Z}X_{\bullet}$  le groupe simplicial  $[n] \mapsto \mathbb{Z}[X_n]$ . Notons que ceci définit un foncteur  $\mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{sAb}$ .

Soit  $\mathcal{I}$  la catégorie pré-additive dont les objets sont en bijection avec  $\mathbb{N}$ , et telle que, pour tout  $i, j \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } j \in \{i, i+1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les lois de composition non nulles sont toutes données par  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(a, b) \mapsto ab$ . Il est facile de voir que  $C_{\geq 0}(\mathcal{A})$  s'identifie à  $\mathbf{Fonc}_{\text{add}}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ .

Pour montrer le théorème de Dold-Kan, on construit un foncteur pleinement fidèle  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$  tel que la restriction de long de ce foncteur soit  $N$ . Le foncteur  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$  s'étend alors en un foncteur pleinement fidèle  $\overline{\mathcal{I}}^{\oplus} \rightarrow \mathcal{D}$ . Enfin, on montre que tout objet de  $\mathcal{D}$  est une somme directe finie d'objets de l'image essentielle du foncteur  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ , ce qui implique que  $\overline{\mathcal{I}}^{\oplus} \rightarrow \mathcal{D}$  est une équivalence de catégories.

Le point essentiel est le suivant :

**Proposition 2.4.8.** *Pour tout  $n \geq 0$ , il existe un projecteur  $p_n \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}\Delta[n])$  d'image  $\mathbb{Z}\Lambda_n^n$ .<sup>12</sup>*

---

12. Ce projecteur devrait être unique.

*Preuve.* On rappelle que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}\Delta[n], \mathbb{Z}\Delta[n]) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\Delta}(\mathbb{Z}[n], \mathbb{Z}[n]) = \mathbb{Z}[\mathrm{Hom}_{\Delta}([n], [n])].$$

On définit un élément  $q_n$  de ce groupe par

$$q_n = \sum_{(a_1, \dots, a_n)} \varepsilon_{(a_1, \dots, a_n)}(0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow a_n),$$

où on a utilisé la notation 2.2.1 pour représenter les éléments de  $\mathrm{Hom}_{\Delta}([n], [n])$ , la somme est sur les suites (automatiquement croissantes)  $(a_1, \dots, a_n)$  telles que  $a_i \in \{i-1, i\}$  pour tout  $i$ , et  $\varepsilon_{(a_1, \dots, a_n)} = (-1)^{\mathrm{card}\{i | a_i \neq i\}}$ . On pose  $p_n = 1 - q_n$ . On a

$$p_n = - \sum_{(a_1, \dots, a_n)} \varepsilon_{(a_1, \dots, a_n)}(0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow a_n),$$

où la somme est sur  $(a_1, \dots, a_n)$  comme ci-dessus sauf  $(a_1, \dots, a_n) = (1, \dots, n)$ . En particulier, l'image de  $p_n$  dans la catégorie abélienne  $\mathbf{sAb}$  est contenue dans  $\mathbb{Z}\Lambda_0^n$ . Pour toute suite croissante  $(b_1, \dots, b_n)$  telle que  $\{0, b_1, \dots, b_n\} \subsetneq \{0, \dots, n\}$ , on a

$$q_n \circ (0 \longrightarrow b_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \dots b_n) = 0,$$

donc

$$p_n \circ (0 \longrightarrow b_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow b_n) = (0 \longrightarrow b_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow b_n).$$

En effet, soit  $i_0 \in \{0, \dots, n\} - \{0, b_1, \dots, b_n\}$ . On note  $c = (0 \longrightarrow b_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow b_n)$ .

$$\begin{aligned} q_n \circ c &= \sum_{a_1, \dots, a_n | a_{i_0} = i_0} \varepsilon_{(a_1, \dots, a_n)}(0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow a_n)c \\ &\quad + \sum_{a_1, \dots, a_n | a_{i_0} = i_0 - 1} \varepsilon_{(a_1, \dots, a_n)}(0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow a_n)c. \end{aligned}$$

Si  $a_1, \dots, a_n$  sont tels que  $a_i \in \{i-1, i\}$  pour tout  $i$  et  $a_{i_0} = i_0$ , on définit  $a'_1, \dots, a'_n$  par  $a'_i = a_i$  si  $i \neq i_0$  et  $a'_{i_0} = i_0 - 1$ . Alors

$$\varepsilon_{(a'_1, \dots, a'_n)} = -\varepsilon_{(a_1, \dots, a_n)}$$

et

$$(0 \longrightarrow a'_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow a'_n)c = (0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow a_n)c.$$

Donc, dans formule ci-dessus pour  $q_n \circ c$ , le terme correspondant à  $(a_1, \dots, a_n)$  dans la première somme s'annule avec le terme correspondant à  $(a'_1, \dots, a'_n)$  dans la deuxième somme, et on obtient bien  $q_n \circ c = 0$ .

En particulier,  $p_n$  et  $q_n$  sont idempotents. Comme d'autre part  $\mathbb{Z}\Lambda_0^n = \sum_{i=1}^n \mathrm{Im}(\delta^i)$  et  $p_n \circ \delta^i = \delta^i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on a  $\mathbb{Z}\Lambda_0^n \subset \mathrm{Im}(p_n)$ .

□

On note  $G(n) = \text{Ker}(p_n) = \text{Im}(1 - p_n)$ , c'est un objet de  $\mathcal{D}$ .

Pour  $0 \leq k \leq n$ , on note  $\Delta^k[n]$  le sous-ensemble simplicial de  $\Delta[n]$  défini par

$$\Delta^k[n]([m]) = \{f : [m] \longrightarrow [n] \mid \text{card}(\text{Im}f) \leq k + 1 \text{ et } 0 \in \text{Im}f\}.$$

En particulier,  $\Delta^{n-1}[n] = \Lambda_0^n$ .

Topologiquement,  $\Delta^k[n]$  est l'union des faces de dimension  $k$  de  $\Delta[n]$  qui contiennent le 0-ième sommet.

**Corollaire 2.4.9.** *Pour tout  $k \geq 1$ , on a (dans  $\mathcal{D}$ ) :*

$$\mathbb{Z}\Delta^k[n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\Delta^{k-1}[n] \oplus G(k)^{\oplus \binom{n}{k}}.$$

*Preuve.* On note  $A$  l'ensemble des applications strictement croissantes  $\varphi : [k] \longrightarrow [n]$  tels que  $0 \in \text{Im}(\varphi)$ . Pour tout  $\varphi \in A$ , on note  $s_\varphi : [n] \longrightarrow [k]$  l'application qui envoie  $i \in [n]$  sur  $\max\{j \in [k] \mid \varphi(j) \leq i\}$ . Alors  $s_\varphi$  est croissante et  $s_\varphi \circ \varphi = \text{id}_{[k]}$ . On note

$$\Phi = \sum \varphi : \bigoplus_{\varphi \in A} \mathbb{Z}\Delta[k] \longrightarrow \mathbb{Z}\Delta^k[n]$$

et

$$S = \sum s_{\varphi|_{\Delta^k[n]}} : \mathbb{Z}\Delta[n] \longrightarrow \bigoplus_{\varphi \in A} \mathbb{Z}\Delta[k].$$

Ce sont des morphismes de  $\mathbf{sAb}$ , et on  $\Phi \circ S = \text{id}$ . En particulier,  $S \circ \Phi$  est un projecteur dans  $\mathcal{D}$ , et son image  $\mathbb{Z}\Delta^k[n]$  est un objet de  $\mathcal{D}$ .

De plus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{\varphi \in A} \mathbb{Z}\Delta[k] & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{Z}\Delta^k[n] & \xrightarrow{S} & \bigoplus_{\varphi \in A} \mathbb{Z}\Delta[k] \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \bigoplus_{\varphi \in A} \mathbb{Z}\Lambda_0^k & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{Z}\Delta^{k-1}[n] & \xrightarrow{S} & \bigoplus_{\varphi \in A} \mathbb{Z}\Lambda_0^k \end{array}$$

où les flèches verticales sont les inclusions évidentes. On note  $P$  le projecteur  $\sum_{\varphi \in A} p_k$  sur  $\bigoplus_{\varphi \in A} \mathbb{Z}\Delta[k]$ , et on pose  $p = \Phi \circ P \circ S \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}\Delta^k[n])$ . C'est un projecteur, et on a  $\text{Im}(P) = \mathbb{Z}\Delta^{k-1}[n]$  et

$$\text{Ker}(P) = \bigoplus_{\varphi \in A} \text{Ker}(p_k) = \bigoplus_{\varphi \in A} G(k).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que  $A$  est de cardinal  $\binom{n}{k}$ .

□

Enfin, on calcule les groupes de morphismes entre les objets  $G(n)$  dans  $\mathcal{D}$ .

**Proposition 2.4.10.** Soient  $n, m \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(n), G(m)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m \in \{n, n+1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Preuve.* On note  $a_{n,m}$  le  $\mathbb{Z}$ -rang de  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(n), G(m))$ . On remarque que ce  $\mathbb{Z}$ -module est libre de type fini, car c'est un facteur direct de  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}\Delta[n], \mathbb{Z}\Delta[m])$ . De plus,  $a_{n,n} \geq 1$  (car on a toujours le morphisme identité), et  $a_{n,n+1} \geq 1$  (car  $\delta^{n+1}$  donne un élément non nul de  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(n), G(n+1))$ ), comme on le voit facilement en utilisant la formule  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(n), G(n+1)) = q_{n+1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}\Delta[n], \mathbb{Z}\Delta[n+1])q_n$ .

Par la proposition ci-dessus, on a

$$\mathbb{Z}\Delta[n] \simeq \bigoplus_{k=0}^n G(k)^{\oplus \binom{n}{k}}$$

et

$$\mathbb{Z}\Delta[m] \simeq \bigoplus_{l=0}^m G(l)^{\oplus \binom{m}{l}},$$

donc

$$\mathbb{Z}[\mathrm{Hom}_{\Delta}([n], [m])] = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}\Delta[n], \mathbb{Z}\Delta[m]) = \bigoplus_{k=0}^n \bigoplus_{l=0}^m \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(k), G(l))^{\binom{n}{k} \binom{m}{l}}.$$

En prenant les rangs des deux côtés, on obtient

$$\binom{n+m+1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m a_{k,l} \binom{n}{k} \binom{m}{l}.$$

Or l'identité de Vandermonde

$$\binom{n+m+1}{m+1} = \binom{n+m+1}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{n+1}{k} \binom{m}{k}$$

et la règle de Pascal  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$  donnent

$$\binom{n+m+1}{n+1} = \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \binom{m}{k} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \binom{m}{k+1}.$$

Ceci force  $a_{n,m} = 0$  si  $m \notin \{n, n+1\}$  et  $a_{n,n} = a_{n,n+1} = 1$ .

□

**Corollaire 2.4.11.** *La sous-catégorie pleine de  $\mathcal{D}$  dont les objets sont les  $G(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est équivalente à  $\mathcal{I}$ .*

*Preuve.* Il suffit de calculer les lois de compositions non nulles, mais c'est immédiat, car  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(n), G(n)) = \mathbb{Z}\text{id}_{G(n)}$ .

□

Pour conclure, il suffit de remarquer que, si  $X_{\bullet} \in \text{Ob}(\mathbf{sAb})$ , alors  $X_{\bullet}(G(n))$  s'identifie canoniquement à  $N(X_{\bullet})_n$ . Mais je me demande s'il ne faut pas remplacer  $N(X_{\bullet})_n$  par  $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(d_i)$ . (Ce qui marche aussi.)

## 2.5 Inverse de l'isomorphisme de Dold-Kan

La preuve ci-dessus suggère une formule pour le quasi-inverse  $K : C_{\geq 0}(\mathcal{A}) \rightarrow C_{\geq 0}(\mathcal{A})$  de l'équivalence  $N : \mathbf{sA} \rightarrow C_{\geq 0}(\mathcal{A})$ , que nous allons expliciter.

Soit  $C_*$  un objet de  $C_{\geq 0}(\mathcal{A})$ . On définit un objet simplicial  $K(C_*)$  de  $\mathcal{A}$  de la manière suivante : Pour tout  $n \geq 0$ ,

$$K(C_*)_n = \bigoplus_{p=0}^n \bigoplus_{\varphi: [n] \rightarrow [p]} C_{p,\varphi},$$

où la deuxième somme est sur les  $\varphi : [n] \rightarrow [p]$  croissants surjectifs et  $C_{p,\varphi}$  est une copie de  $C_p$ .

Soit  $f : [m] \rightarrow [n]$  une application croissante, on veut définir  $K(f) : K(C_*)_n \rightarrow K(C_*)_m$ . Soient  $p \in \{0, \dots, n\}$  et  $\varphi : [n] \rightarrow [p]$  surjective croissante, on va définir la composante  $K(f)_{\varphi} : C_{p,\varphi} \rightarrow K(C_*)_m$  de  $K(f)$ . On écrit  $\varphi \circ f = s \circ i$ , où  $s : [m] \rightarrow [q]$  est croissante surjective et  $i : [q] \rightarrow [n]$  est croissante injective (une telle factorisation est unique).

$$\begin{array}{ccc} [m] & \xrightarrow{f} & [n] \\ s \downarrow & & \downarrow \varphi \\ [q] & \xrightarrow{i} & [p] \end{array}$$

Si  $p = q$  (donc  $i = \text{id}_{[p]}$  et  $s = \varphi \circ f$ ), on prend pour  $K(f)_{\varphi}$  l'identification de  $C_{p,\varphi} = C_p$  avec le terme  $C_{p,s}$  de  $K(C_*)_m$ . Si  $p = q + 1$  et  $i = \delta^p$  (donc  $\text{Im}(i) = \text{Im}(\varphi \circ f) = \{0, \dots, p-1\}$ ), on prend pour  $K(f)_{\varphi}$  le composé

$$C_{p,\varphi} = C_p \xrightarrow{d_p} C_{p-1} = C_{q,s} \subset K(C_*)_m.$$

Sinon, on prend  $K(f)_{\varphi} = 0$ . Voici à quoi ressemblent les premiers étages de  $K(C_*)$  :

$$C_0 \rightleftarrows C_0 \oplus C_1 \rightleftarrows C_0 \oplus C_1^2 \oplus C_2 \rightleftarrows C_0 \oplus C_1^3 \oplus C_2^3 \oplus C_3$$

### 3 Rappels sur les catégories dérivées

Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie additive. On note comme avant  $C_*(\mathcal{A})$  la catégorie des complexes (homologiques) d'objets de  $\mathcal{A}$ . On considère aussi ses sous-catégories pleines  $C_+(\mathcal{A})$ ,  $C_-(\mathcal{A})$  et  $C_b(\mathcal{A})$  définies par

$$C_+(\mathcal{A}) = \{C_* \in \text{Ob } C_*(\mathcal{A}) \mid C_n = 0 \text{ pour } n \ll 0\}$$

$$C_-(\mathcal{A}) = \{C_* \in \text{Ob } C_*(\mathcal{A}) \mid C_n = 0 \text{ pour } n \gg 0\}$$

$$C_b(\mathcal{A}) = C_+(\mathcal{A}) \cap C_-(\mathcal{A}).$$

Rappelons que l'on a défini la notion de morphismes de complexes homotopes dans la définition 2.3.4. C'est clairement une relation d'équivalence.

On note  $K_*(\mathcal{A})$  (resp.  $K_+(\mathcal{A})$ ,  $K_-(\mathcal{A})$ ,  $K_b(\mathcal{A})$ ) la catégorie qui a les mêmes objets que  $C_*(\mathcal{A})$  (resp.  $C_+(\mathcal{A})$ ,  $C_-(\mathcal{A})$ ,  $C_b(\mathcal{A})$ ) et dont les morphismes sont les morphismes de  $C_*(\mathcal{A})$  modulo la relation d'homotopie.

Supposons maintenant que la catégorie  $\mathcal{A}$  est abélienne. On dispose alors des foncteurs d'homologie  $H_i : C_*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ . On dit qu'un morphisme  $f$  de  $C(\mathcal{A})$  est un *quasi-isomorphisme* (ou *qis*) si  $H_i(f)$  est un isomorphisme pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . La *catégorie dérivée*  $D(\mathcal{A})$  (resp.  $D_+(\mathcal{A})$ ,  $D_-(\mathcal{A})$ ,  $D_b(\mathcal{A})$ ) est la catégorie obtenue à partir de  $C_*(\mathcal{A})$  (resp.  $C_+(\mathcal{A})$ ,  $C_-(\mathcal{A})$ ,  $C_b(\mathcal{A})$ ) en inversant formellement tous les quasi-isomorphismes.

On a le théorème suivant, qui permet de travailler avec ces catégories :

**Théorème 3.1.** *On note  $\mathcal{I}$  (resp.  $\mathcal{P}$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  des objets injectifs (resp. projectifs).*

1. *Si  $\mathcal{A}$  a assez d'objets injectifs, alors l'inclusion  $C_-(\mathcal{I}) \rightarrow C_-(\mathcal{A})$  induit une équivalence de catégories  $K_-(\mathcal{I}) \xrightarrow{\sim} D_-(\mathcal{A})$ .*
2. *Si  $\mathcal{A}$  a assez d'objets projectifs, alors l'inclusion  $C_+(\mathcal{P}) \rightarrow C_+(\mathcal{A})$  induit une équivalence de catégories  $K_+(\mathcal{P}) \xrightarrow{\sim} D_+(\mathcal{A})$ .*

### 4 Ensembles simpliciaux et espaces topologiques

Le théorème de Dold-Kan dit que les groupes abéliens simpliciaux sont une autre manière de penser aux complexes de groupes abéliens (concentrés en degré  $\geq 0$ ). Nous allons maintenant voir un autre point de vue sur les ensembles simpliciaux. Le but est de généraliser les notions de quasi-isomorphisme, homotopie et homologie (qui sont définies sur les groupes abéliens simpliciaux via Dold-Kan) aux ensembles simpliciaux (et aussi à d'autres catégories, comme celles des anneaux commutatifs simpliciaux), pour pouvoir plus tard parler de foncteurs dérivés dans ce cadre.

## 4.1 Réalisation géométrique d'un ensemble simplicial

Commençons par définir les simplexes topologiques standard.

**Définition 4.1.1.** Pour tout  $n \geq 0$ , le *simplexe topologique standard* de dimension  $n$  est

$$|\Delta[n]| = \{(x_0, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1\}.$$

Si  $f : [n] \rightarrow [m]$  est une application croissante, on définit  $f_* : |\Delta[n]| \rightarrow |\Delta[m]|$  par  $f_*(x_0, \dots, x_n) = (y_0, \dots, y_m)$  où, pour tout  $j \in [m]$ ,  $y_j = \sum_{i \in f^{-1}(j)} x_i$  (avec la convention que la somme vide est 0).

Noter que les  $|\Delta[n]|$  forment un espace topologique cosimplicial, c'est-à-dire qu'on a un foncteur (covariant)  $\Delta \rightarrow \mathbf{Top}$ , où  $\mathbf{Top}$  est la catégorie des espaces topologiques, qui envoie  $[n]$  sur  $|\Delta[n]|$ .

### Description terre-à-terre de la réalisation géométrique

On pense simplement à un ensemble simplicial  $X_\bullet$  comme au plan d'un espace topologique obtenu en recollant des simplexes standard (donc un CW complexe). Chaque élément de  $X_n$  représente un simplexe de dimension  $n$ , et les flèches entre les étages de  $X_\bullet$  disent comment recoller les simplexes. Plus précisément :

**Définition 4.1.2.** Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. La *réalisation géométrique* de  $X_\bullet$  est l'espace topologique

$$|X_\bullet| = \coprod_{n \geq 0} \coprod_{x \in X_n} S_{n,x} / \sim$$

où  $S_{n,x} = |\Delta[n]|$  pour tout  $x \in X_n$  et où  $\sim$  est la relation d'équivalence engendrée par la relation suivante : pour toute application croissante  $f : [n] \rightarrow [m]$  et tout  $x \in X_m$ , on pose  $y = X_\bullet(f)(x) \in X_n$ , on considère le morphisme  $f_* : S_{n,y} = |\Delta[n]| \rightarrow |\Delta[m]| = S_{m,x}$ , et on décrète que tout point de  $S_{n,y}$  est équivalent à son image par  $f_*$ .

En fait, grâce à la proposition 2.2.5, il suffit de considérer les morphismes de face et de dégénérescence dans la définition de  $\sim$ .

Notons que cette définition ne se prête pas tellement aux calculs, mais qu'elle a le grand avantage d'être clairement fonctorielle en  $X$ , c'est-à-dire qu'un morphisme  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  d'ensembles simpliciaux donne de manière évidente une application continue  $|f| : |X_\bullet| \rightarrow |Y_\bullet|$ .

Il est assez clair que l'on a beaucoup d'informations redondantes dans la construction ci-dessus. Pour mieux en parler, introduisons quelques définitions.

**Définition 4.1.3.** Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. Un élément de  $X_n$  est appelé un *simplexe de dimension  $n$  de  $X_\bullet$* . On dit qu'un simplexe dans  $X_n$  est *non dégénéré* s'il n'est dans l'image d'aucun morphisme de dégénérescence  $s_i : X_{n-1} \rightarrow X_n$ ; sinon, on dit qu'il est *dégénéré*. On note  $X_n^{nd}$  l'ensemble des simplexes non dégénérés dans  $X_n$ .

Notons qu'un simplexe  $x \in X_n$  est dégénéré si et seulement si il existe  $m < n$ , une application croissante surjective  $s : [1, n] \rightarrow [1, m]$  et un  $y \in X_m$  tels que  $x = s^*(y)$ . Dans ce cas, on dit que  $x$  est une *dégénérescence* de  $y$ .

De même, si  $x \in X_n$  et si  $d : [m] \rightarrow [n]$  est une application croissante injective avec  $m < n$ , on dit que  $d^*(x) \in X_m$  est une *face* de  $x$ .

**Proposition 4.1.4.** Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. On considère l'espace topologique

$$S = \coprod_{n \geq 0} \coprod_{x \in X_n^{nd}} S_{n,x} / \sim',$$

où on a comme avant  $S_{n,x} = |\Delta[n]|$  si  $x \in X_n$ , et où  $\sim'$  est la relation d'équivalence définie comme plus haut, mais en utilisant uniquement les morphismes de face  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$  et les  $x \in X_n^{nd}$  tels que  $d_i(x) \in X_{n-1}^{nd}$ .

Alors l'application continue évidente  $S \rightarrow |X_\bullet|$  est un homéomorphisme.

La proposition résulte facilement du lemme suivant (lui aussi facile) :

**Lemme 4.1.5.** Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial, et soit  $x \in X_n$  un  $n$ -simplexe dégénéré de  $X_\bullet$ . Alors il existe un unique simplexe non-dégénéré de  $X$  dont  $x$  est une dégénérescence.

**Exemple 4.1.6.** - L'ensemble simplicial  $\Delta[n]$  a un unique simplexe non dégénéré de dimension  $n$ , donné par l'identité de  $[n]$  (et souvent noté  $\iota_n$ ). Plus généralement, les simplexes de dimension  $k$  non dégénérés de  $\Delta[n]$  sont donnés par les applications strictement croissantes  $[k] \rightarrow [n]$ . On voit facilement que  $|\Delta[n]| = |\Delta[n]|$ .<sup>13</sup>

- L'ensemble simplicial  $\partial\Delta[n] \subset \Delta[n]$  a les mêmes simplexes non dégénérés que  $\Delta[n]$  en dimension  $k \neq n$ , mais il n'a pas de simplexe non dégénéré de dimension  $n$ . Sa réalisation géométrique est donc le bord de  $|\Delta[n]|$ .
- Le cornet  $\Lambda_k^n \subset \partial\Delta[n]$  a les mêmes simplexes non dégénérés que  $\partial\Delta[n]$ , moins le simplexe de dimension  $n - 1$  correspondant à  $\delta^k : [n - 1] \rightarrow [n]$ . Sa réalisation géométrique est donc le bord de  $|\Delta[n]|$  moins l'intérieur de la  $k$ -ième face.

Nous allons aussi voir l'exemple du  $n$ -squelette (qui sera encore utile plus loin).

**Définition 4.1.7.** Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial, et soit  $n \geq -1$ . Le  $n$ -squelette  $\text{sq}_n(X_\bullet)$  de  $X_\bullet$  est le plus petit sous-ensemble simplicial de  $X_\bullet$  qui contient tous les simplexes non dégénérés de dimension  $\leq n$  de  $X_\bullet$ .

---

13. Quelle surprise...

Par définition, on a donc  $\text{sq}_{-1} X_\bullet = \emptyset$ .

**Définition 4.1.8.** Pour tout  $n \geq -1$ , on note  $\Delta_{\leq n}$  la sous-catégorie pleine de  $\Delta$  dont les objets sont les  $[r]$  pour  $r \leq n$ . Si  $X_\bullet$  est un objet simplicial d'une catégorie  $\mathcal{C}$ , on note  $\tau_{\leq n} X_\bullet$  sa restriction à  $\Delta_{\leq n}^{\text{op}}$ . Cette construction est clairement fonctorielle en  $X_\bullet$ .

On a le résultat facile suivant :

**Proposition 4.1.9.** Soient  $X_\bullet$  un ensemble simplicial, et  $n \geq -1$ .

1. On a  $\text{sq}_n(X_\bullet)_r = X_r$  si  $r \leq n$  et, si  $r \geq n + 1$ , alors

$$\text{sq}_n(X_\bullet) = \bigcup_{m \leq n} \bigcup_{\substack{f:[r] \rightarrow [m] \\ \text{surjective}}} f^*(X_m).$$

2. Pour tout  $Y_\bullet \in \text{Ob}(\mathbf{sEns})$ , la flèche canonique

$$\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\text{sq}_n X_\bullet, Y_\bullet) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Y_\bullet) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Fonc}(\Delta_{\leq n}^{\text{op}}, \mathbf{Ens})}(\tau_{\leq n} X_\bullet, \tau_{\leq n} Y_\bullet)$$

est bijective.

3. Le morphisme canonique  $\varinjlim_{n \geq -1} \text{sq}_n X_\bullet \longrightarrow X_\bullet$  est un isomorphisme.

4. La réalisation géométrique  $|\text{sq}_n X_\bullet|$  est l'union des simplexes de dimension  $\leq n$  dans  $|X_\bullet|$ .

*Démonstration.* Les premier, troisième et quatrième points résultent immédiatement de la définition. Le deuxième point résulte immédiatement du premier. □

*Remarque 4.1.10.* Le deuxième point du théorème est la définition "correcte" du  $n$ -squelette comme un adjoint à droite, et permet de définir la notion de  $n$ -squelette dans  $\mathbf{s}\mathcal{C}$ , pour toute catégorie  $\mathcal{C}$  (et de montrer son existence si  $\mathcal{C}$  admet des limites inductives). Voir la définition A.1 pour le cas général.

### Description abstraite de la réalisation géométrique

La réalisation géométrique est l'unique foncteur  $\mathbf{sEns} \longrightarrow \mathbf{Top}$  qui commute aux limites inductives et étend le foncteur  $\Delta \longrightarrow \mathbf{Top}, [n] \longmapsto |\Delta[n]|$ .<sup>14</sup> On va expliquer un peu cette phrase.

---

14. C'est-à-dire l'extension de Kan à gauche du foncteur  $\Delta \longrightarrow \mathbf{Top}$  le long du plongement de Yoneda  $\Delta \longrightarrow \mathbf{sEns}$ .

**Définition 4.1.11.** Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. On note  $\Delta/X_\bullet$  la catégorie dont les objets sont les couples  $([n], u)$  avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $u : \Delta[n] \rightarrow X_\bullet$  (ou  $u \in X_n$ , puisque  $X_n = \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n], X_\bullet)$  canoniquement par le lemme de Yoneda) et les morphismes de  $([n], u)$  dans  $([m], v)$  sont les morphismes  $f : [n] \rightarrow [m]$  de  $\Delta$  tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \Delta[n] & \xrightarrow{f} & \Delta[m] \\ & \searrow u & \swarrow v \\ & & X_\bullet \end{array}$$

(i.e.,  $X_\bullet(f) : X_m \rightarrow X_n$  envoie  $v$  sur  $u$ ).

Noter que, si  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est un morphisme d'ensemble simpliciaux, il induit de manière évidente un foncteur  $F_f : \Delta/X_\bullet \rightarrow \Delta/Y_\bullet$  ( $F_f$  envoie  $([n], u) \in \text{Ob}(\Delta/X_\bullet)$  sur  $([n], f \circ u)$ ).

Le théorème suivant est plus ou moins formel.

**Théorème 4.1.12.** Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. On note  $\Phi : \Delta/X_\bullet \rightarrow \mathbf{sEns}$  le foncteur qui envoie  $([n], u)$  sur  $\Delta[n]$ . Par définition de  $\Delta/X_\bullet$ , on a un morphisme fonctoriel de  $\Phi$  vers le foncteur constant de valeur  $X_\bullet$ . Alors le morphisme qu'il induit,

$$\varinjlim_{\Delta/X_\bullet} \Phi \rightarrow X_\bullet,$$

est un isomorphisme d'ensembles simpliciaux.

De plus, si  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est un morphisme d'ensembles simpliciaux, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{\Delta/X_\bullet} \Phi & \longrightarrow & X_\bullet \\ F_f \downarrow & & \downarrow f \\ \varinjlim_{\Delta/Y_\bullet} \Phi & \longrightarrow & Y_\bullet \end{array}$$

*Remarque 4.1.13.* Dans le théorème ci-dessus, on pourrait remplacer  $\Delta$  par n'importe quelle (petite) catégorie et  $\mathbf{Ens}$  par n'importe quelle catégorie admettant des limites inductives.

On a un supplément au théorème, qui ne fait intervenir que les simplexes non dégénérés.

**Définition 4.1.14.** Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. On note  $\Delta^{nd}/X_\bullet$  la sous-catégorie pleine de  $\Delta/X_\bullet$  dont les objets sont les  $([n], u)$  tels que  $u$ , vu comme un élément de  $X_n$ , soit non dégénéré.

**Théorème 4.1.15.** Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. Alors le morphisme évident

$$\varinjlim_{\Delta^{nd}/X_\bullet} \Phi \rightarrow \varinjlim_{\Delta/X_\bullet} \Phi \rightarrow X_\bullet$$

est un isomorphisme d'ensembles simpliciaux.

Comme avant, l'avantage du deuxième isomorphisme est qu'il est clairement fonctoriel en  $X_\bullet$  (contrairement au premier).

Voici la description abstraite de la réalisation géométrique. (Si on écrit la définition de la limite inductive, on voit tout de suite que c'est juste une manière différente d'écrire la définition concrète.)

**Proposition 4.1.16.** *Pour tout  $X_\bullet \in \text{Ob}(\mathbf{sEns})$ , on a des isomorphismes canoniques*

$$\varinjlim_{([n],u) \in \text{Ob } \Delta^{nd}/X_\bullet} |\Delta[n]| \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{([n],u) \in \text{Ob } \Delta/X_\bullet} |\Delta[n]| \xrightarrow{\sim} |X_\bullet|.$$

## 4.2 Réalisation géométrique et produit

Rappelons que, si  $\mathcal{C}$  est une catégorie admet des coproduits finis, on a défini le produit tensoriel d'un ensemble simplicial par un objet simplicial de  $\mathcal{C}$  dans la définition 2.3.5. Si  $\mathcal{C}$  est la catégorie des ensembles, cette définition est particulièrement simple et redonne le produit d'ensembles simpliciaux.

*Remarque 4.2.1.* Soient  $X_\bullet, Y_\bullet$  deux ensembles simpliciaux. Alors on a  $(X_\bullet \otimes Y_\bullet)_n = (X_\bullet \times Y_\bullet)_n = X_n \times Y_n$  pour tout  $n$  et, pour toute application croissante  $f : [n] \rightarrow [m]$ , l'application  $f^* : X_m \times Y_m \rightarrow X_n \times Y_n$  est simplement  $(x, y) \mapsto (f^*(x), f^*(y))$ .

On utilisera la notation  $X_\bullet \times Y_\bullet$  (plutôt que  $X_\bullet \otimes Y_\bullet$ ) quand on fera des produits d'ensembles simpliciaux.

**Exemple 4.2.2.** On note souvent  $*$  l'ensemble simplicial  $\Delta[0]$ . Sa réalisation topologique est un point, et on a  $* \times X_\bullet \simeq X_\bullet$  pour tout ensemble simplicial  $X_\bullet$ .

*Remarque 4.2.3.* Soient  $X_\bullet$  et  $Y_\bullet$  deux ensembles simpliciaux. Alors les deux projections  $X_\bullet \times Y_\bullet$  sur  $X_\bullet$  et  $Y_\bullet$  induisent des applications continues de  $|X_\bullet \times Y_\bullet|$  dans  $|X_\bullet|$  et  $|Y_\bullet|$ , d'où une application continue  $|X_\bullet \times Y_\bullet| \rightarrow |X_\bullet| \times |Y_\bullet|$ .

**Théorème 4.2.4.** *Soient  $n, m \in \mathbb{N}$ . Alors l'application continue  $|\Delta[n] \times \Delta[m]| \rightarrow |\Delta[n]| \times |\Delta[m]|$  définie ci-dessus est un homéomorphisme.*

*Démonstration.* [10] lemme 3.1.8 ou [4] théorème 5.2 (pour avoir des figures) ou section 1.4 [12] (pour comprendre ce qui se passe).

□

On voudrait en déduire que le foncteur de réalisation géométrique envoie les produits d'ensembles simpliciaux sur les produits d'espaces topologiques. Malheureusement, ce n'est pas tout à fait vrai en général, car le produit d'espaces topologiques ne commute pas avec les limites

inductives. Ceci est un problème technique qui n'apparaît que pour des ensembles simpliciaux avec de grosses réalisations topologiques (par exemple, des CW complexes non localement finis), mais on va tout de même donner un énoncé correct.

**Définition 4.2.5.** Soit  $X$  un espace topologique. Un sous-ensemble  $U$  de  $X$  est appelé *compactement ouvert* si, pour tout espace topologique compact  $K$  et toute application continue  $f : K \rightarrow X$ , le sous-ensemble  $f^{-1}(U)$  de  $K$  est ouvert. On dit que  $X$  est *compactement engendré* (ou un *espace de Kelley*) si tout sous-ensemble compactement ouvert de  $X$  est ouvert.

On note  $\mathbf{K}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Top}$  formée des espaces compactement engendrés. L'inclusion  $\mathbf{K} \subset \mathbf{Top}$  admet un adjoint à droite, le foncteur de "k-ification" : Si  $X$  est un ensemble topologique, on lui associe l'ensemble  $X$ , avec comme ouverts tous les sous-ensembles compactement ouverts de  $X$ . En particulier, les produits existent dans la catégorie  $\mathbf{K}$  (on prend le produit dans  $\mathbf{Top}$  et on le k-ifie).

**Corollaire 4.2.6.** *L'image du foncteur de réalisation topologique  $\mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{Top}$  est contenue dans la sous-catégorie  $\mathbf{K}$ , et ce foncteur envoie le produit d'ensembles simpliciaux sur le produit d'espaces compactement engendrés.*

### 4.3 Complexe singulier d'un espace topologique

**Définition 4.3.1.** Soit  $X$  un espace topologique. Son *complexe singulier* est l'ensemble simplicial  $\text{Sing}(X)_\bullet$  donné par :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Sing}(X)_n = \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta[n]|, X)$ .
- Pour toute application croissante  $f : [n] \rightarrow [m]$ ,  $f^* : \text{Sing}(X)_m \rightarrow \text{Sing}(X)_n$  envoie  $u \in \text{Sing}(X)_m = \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta[m]|, X)$  sur  $u \circ f_*$ .

*Remarque 4.3.2.* Pour tout ensemble simplicial  $X_\bullet$ , on note  $\mathbb{Z}[X_\bullet]$  le groupe simplicial abélien libre sur  $X_\bullet$ , c'est-à-dire que  $\mathbb{Z}[X_\bullet]_n$  est le groupe abélien libre de base  $X_n$ , et les morphismes entre les étages sont donnés de manière évidente par les  $f^* : X_m \rightarrow X_n$ . (Le foncteur  $X_\bullet \rightarrow \mathbb{Z}[X_\bullet]$  est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $\mathbf{sAb} \rightarrow \mathbf{sEns}$ ).

Alors, si  $X$  est un espace topologique, le complexe de Moore non normalisé associé à  $\mathbb{Z}[\text{Sing}(X)_\bullet]$  est le complexe des chaînes simpliciales de  $X$ , et son homologie est l'homologie simpliciale de  $X$ .

Le théorème suivant est fondamental, mais presque trivial grâce à la description de la réalisation géométrique dans 4.1.16.

**Théorème 4.3.3.** *Les foncteurs  $(|\cdot|, \text{Sing})$  forment une paire de foncteurs adjoints.*

*Démonstration.* On a vu dans le théorème 4.1.12 que, pour tout ensemble simplicial  $X_\bullet$ , le morphisme canonique  $\varinjlim_{[n] \in \text{Ob } \Delta/X_\bullet} [n] \rightarrow X_\bullet$  est un isomorphisme d'ensembles simpliciaux.

Soient maintenant  $X_\bullet$  un ensemble simplicial et  $Y$  un espace topologique. On a alors des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sE}ns}(X_\bullet, \mathrm{Sing}(Y)_\bullet) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{sE}ns}\left(\varinjlim_{[n] \in \mathrm{Ob} \Delta/X_\bullet} [n], \mathrm{Sing}(Y)_\bullet\right) \\
&= \varprojlim_{[n] \in \mathrm{Ob} \Delta/X_\bullet} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sE}ns}([n], \mathrm{Sing}(Y)_\bullet) \\
&= \varprojlim_{[n] \in \mathrm{Ob} \Delta/X_\bullet} \mathrm{Sing}(Y)_n \\
&= \varprojlim_{[n] \in \mathrm{Ob} \Delta/X_\bullet} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta[n]|, Y) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\varinjlim_{[n] \in \mathrm{Ob} \Delta/X_\bullet} |\Delta[n]|, \mathrm{Sing}(Y)_\bullet\right) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X_\bullet|, Y).
\end{aligned}$$

□

## 4.4 Complexes de Kan

Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. Il paraît naturel de dire que deux éléments  $x, y \in X_0$  sont homotopes (ou dans la même composante connexe) s'il existe  $c \in X_1$  tel que  $d_0(c) = x$  et  $d_1(c) = y$  (ce  $c$  est un chemin reliant  $x$  et  $y$ ). On voudrait définir  $\pi_0(X_\bullet)$  comme le quotient de  $X_0$  par cette relation d'équivalence, comme dans la définition 2.3.7 (qui est valable pour  $X_\bullet$  un groupe abélien simplicial). Il y a un seul problème : la relation définie ci-dessus n'est pas une relation d'équivalence.

**Exemple 4.4.1.** Si  $X_\bullet = \Delta[1]$ , si  $c$  est l'unique simplexe non dégénéré de dimension 1 de  $X_\bullet$  et si  $x = d_0(c)$  et  $y = d_1(c)$ , alors il n'existe pas de simplexe  $c'$  de dimension 1 tel que  $d_0(c') = y$  et  $d_1(c') = x$ . Donc la relation ci-dessus n'est pas réflexive.

Si  $X = \Lambda_1^2$ , alors les sommets 0 et 1 sont homotopes dans  $X_\bullet$ , ainsi que les sommets 1 et 2, mais les sommets 0 et 2 ne sont pas homotopes. Donc la relation ci-dessus n'est pas transitive.

Évidemment, on pourrait simplement considérer la relation d'équivalence sur  $X_0$  engendrée par la relation d'homotopie, mais les choses deviennent vite compliquées quand on regarde des homotopies entre applications depuis un ensemble simplicial plus général. (Le cas ci-dessus est celui des homotopies entre applications  $\Delta[0] = * \rightarrow X_\bullet$ .) On va donc plutôt imposer une condition sur  $X_\bullet$ . Notons que, dans l'exemple ci-dessus, le deuxième problème vient du fait que l'on ne peut pas prolonger l'identité de  $\Lambda_1^2$  en une application  $\Delta[2] \rightarrow \Lambda_1^2$ <sup>15</sup>, et le premier problème vient du fait qu'on ne peut pas prolonger l'application  $\Lambda_0^2 \rightarrow \Delta[1]$  donnée par  $0 \mapsto 0$ ,  $1 \mapsto 1$  et  $2 \mapsto 0$  en une application  $\Delta[2] \rightarrow \Delta[1]$ . Cela suggère donc de

15. C'est-à-dire que  $\Lambda_1^2$  n'est pas un rétracte de  $\Delta[2]$ , contrairement à ce qui se passe pour les espaces topologiques.

demander ce genre de propriété de relèvement pour  $X_\bullet$  (et aussi pour les cornets de dimension supérieure, pour faire marcher la définition de  $\pi_n$ ).

**Définition 4.4.2.** Un ensemble simplicial  $X_\bullet$  est un *complexe de Kan* (ou un *ensemble simplicial fibrant*) si, pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $k \in [n]$ , tout morphisme  $\Lambda_k^n \rightarrow X_\bullet$  s'étend en un morphisme  $\Delta[n] \rightarrow X_\bullet$ .

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & X_\bullet \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta[n] & & \end{array}$$

*Remarque 4.4.3.* En reprenant l'exemple ci-dessus, on vérifie facilement que l'homotopie est une relation d'équivalence sur  $X_0$  si  $X_\bullet$  est un complexe de Kan.

*Remarque 4.4.4.* Notons que la donnée d'un morphisme  $\Lambda_k^n \rightarrow X_\bullet$  revient à celle de  $n$  simplexes de dimension  $n-1$  de  $X_\bullet$ , disons  $x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n \in X_{n-1}$ , tels que  $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i)$  si  $i < j$  et  $i, j \neq k$ . La condition que ce morphisme s'étende à  $\Delta[n]$  revient à dire qu'il existe  $x \in X_n$  tel que  $d_i(x) = x$  pour tout  $i \neq k$ .

Avant de donner des propriétés des complexes de Kan, voyons quelques exemples.

**Exemple 4.4.5.** Le point  $\Delta[0]$  est un complexe de Kan, mais, si  $n \geq 1$ , alors  $\Delta[n]$  n'est pas un complexe de Kan. Par exemple, le morphisme  $\Lambda_0^2 \rightarrow \Delta[n]$  donné par  $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1$  et  $2 \mapsto 0$  ne se prolonge pas à  $\Delta[2]$ .

Le premier exemple important de complexe de Kan est le suivant.

**Proposition 4.4.6.** Si  $X$  est un espace topologique, alors  $\text{Sing}(X)_\bullet$  est un complexe de Kan.

*Preuve.* Par le théorème 4.3.3, on a  $\text{Hom}_{\mathbf{sEEns}}(\Lambda_k^n, \text{Sing}(X)_\bullet) = \text{Hom}_{\mathbf{TOP}}(|\Lambda_k^n|, X)$  et  $\text{Hom}_{\mathbf{sEEns}}(\Delta[n], \text{Sing}(X)_\bullet) = \text{Hom}_{\mathbf{TOP}}(|\Delta[n]|, X)$ . Il suffit donc d'utiliser le fait que  $|\Lambda_k^n|$  est un rétracte de  $|\Delta[n]|$ .

□

D'une certaine manière, les complexes de Kan sont les espaces simpliciaux qui (du moins du point de vue de l'homotopie) se comportent comme des espaces topologiques. Voyons d'autres exemples.

On a vu dans la preuve du théorème de Dold-Kan (plus précisément, dans la proposition 2.4.8) que, si on linéarise un peu la catégorie  $\Delta$ , alors  $\Lambda_0^n$  devient un rétracte de  $\Delta[n]$ . On pourrait en déduire que tout groupe abélien simplicial est un complexe de Kan, mais on a en fait le résultat plus général suivant :

**Proposition 4.4.7.** *Tout groupe simplicial est un complexe de Kan.*

*Démonstration.* Soit  $G_\bullet$  un groupe simplicial, soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout sous-ensemble  $S$  de  $[n]$ , on note  $\Delta\langle S \rangle \subset \partial\Delta[n]$  l'union des faces  $d_{i\iota_n}$ ,  $i \in S$  (c'est-à-dire des faces données par les applications  $\delta^i[n-1] \rightarrow [n]$ , pour  $i \in S$ ). Il suffit de montrer que, si  $\text{card}(S) \leq n-1$ , alors le morphisme de restriction  $\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n], G_\bullet) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta\langle S \rangle, G_\bullet)$  est surjectif. On raisonne par récurrence sur le cardinal de  $S$ .

- Si  $S = \emptyset$ , alors  $\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta\langle S \rangle, G_\bullet)$  est un singleton, donc il suffit de montrer que  $\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n], G_\bullet)$  est non vide. Mais ce dernier ensemble contient le morphisme constant d'image 1 (c'est-à-dire qui envoie tous les simplexes de dimension  $m$  de  $\Delta[n]$  sur  $1 \in G_m$ , pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ).
- Supposons  $S$  non vide. Soit  $j \in S$  tel que  $j-1 \notin S$  ou  $j+1 \notin S$ . (C'est possible car  $S \neq [n]$ .) Soit  $\theta : \Delta\langle S \rangle \rightarrow G_\bullet$  tel que  $\theta_i := \theta(d_{i\iota_n}) = 1$  si  $i \in S - \{j\}$ . Montrons qu'il existe  $x \in G_n$  tel que  $d_j(x) = \theta_j := \theta(d_{j\iota_n})$  et  $d_i(x) = 1$  si  $i \in S - \{j\}$ . Il suffit de prendre  $x = s_j\theta_j$  si  $j+1 \notin S$ , et  $y = s_{j-1}\theta_j$  si  $j-1 \notin S$ . Ceci finit en particulier la preuve dans le cas où  $S$  est de cardinal 1.
- En général, on suppose que  $S$  est non vide et que l'on connaît le résultat pour tous les  $S'$  de cardinal strictement plus petit. Soit  $\sigma : \Delta\langle S \rangle \rightarrow G_\bullet$ , soit comme plus haut  $j \in S$  tel que  $j-1 \notin S$  ou  $j+1 \notin S$ . On note  $\sigma'$  le composé de  $\sigma$  et de l'inclusion  $\Delta\langle S - \{j\} \rangle \subset \Delta\langle S \rangle$ . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe  $x \in G_n$  tel que  $d_i(x) = \sigma(d_{i\iota_n})$  pour tout  $i \in S - \{j\}$ . Notons  $\sigma' = \sigma x_S^{-1}$ , où  $x_S$  est la restriction à  $\Delta\langle S \rangle$  de  $x : \Delta[n] \rightarrow X_\bullet$ . Alors  $\sigma'(\delta_{i\iota_n}) = 1$  pour tout  $i \in S - \{j\}$ , donc, d'après le point précédent, il existe  $x' \in G_n = \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n], G_\bullet)$  qui prolonge  $\sigma'$ . Finalement,  $x'x$  prolonge  $\sigma$ .

□

On remarque que, si  $G$  est un groupe, alors son espace classifiant  $BG$  (voir l'exemple 2.1.10) n'est pas un groupe simplicial (sauf si  $G$  est commutatif), donc le résultat précédent ne s'applique pas à lui. Cependant, l'ensemble simplicial  $BG$  est aussi un complexe de Kan, grâce au résultat suivant :

**Proposition 4.4.8.** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Rappelons que le nerf  $N(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$  est défini en 2.1.8.*

1. *Si  $(n, k) \notin \{(2, 0), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\}$ , alors tout morphisme  $\Lambda_k^n \rightarrow N(\mathcal{C})$  s'étend à  $\Delta[n]$ .*
2. *Le nerf  $N(\mathcal{C})$  est un complexe de Kan si et seulement si  $\mathcal{C}$  est un groupoïde.*

Rappelons qu'un groupoïde est une catégorie où toutes les flèches sont inversibles. On retrouve en particulier le fait que  $\Delta[n] = N([n])$  n'est pas un complexe de Kan si  $n \geq 1$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $\Delta_{\leq 2}$  la sous-catégorie pleine de  $\Delta$  dont les objets sont  $[0]$ ,  $[1]$  et  $[2]$ . Pour tout ensemble simplicial  $X_\bullet$ , on note  $\text{sq}_2 X_\bullet$  la restriction de  $X_\bullet$  à  $\Delta_{\leq 2}^{\text{op}}$ . Il résulte

directement de la définition du nerf que, pour tout ensemble simplicial  $X_\bullet$ , la restriction  $\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, N(\mathcal{C})) \rightarrow \text{Hom}(\text{sq}_2 X_\bullet, \text{sq}_2 N(\mathcal{C}))$  (où le deuxième  $\text{Hom}$  est pris dans la catégorie des foncteurs  $\Delta_{\leq 2}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ ) est bijective.<sup>16</sup> Si  $n \geq 4$  et  $k \in [n]$ , alors l'inclusion  $\Lambda_k^n \subset \Delta[n]$  induit un isomorphisme  $\text{sq}_2 \Lambda_k^n \xrightarrow{\sim} \text{sq}_2 \Delta[n]$ , d'où la propriété de prolongement dans ce cas.

Les cas  $n = 0$  et  $n = 1$  sont faciles (pour  $n = 1$ , on utilise l'existence des identités dans  $\mathcal{C}$ ).

Un morphisme  $\Lambda_1^2 \rightarrow N(\mathcal{C})$  équivaut à la donnée de trois objets  $c_0, c_1, c_2$  de  $\mathcal{C}$  (les images des sommets 0, 1, 2) et de deux flèches  $f : c_0 \rightarrow c_1$  et  $g : c_1 \rightarrow c_2$  (les images des faces reliant 0 à 1 et 1 à 2). Trouver un prolongement de ce morphisme à  $\Delta[2]$  revient à trouver une flèche  $h : c_0 \rightarrow c_2$  telle que  $h = g \circ f$ , mais une telle flèche existe toujours (et elle est unique).

Soit  $r \in [3]$ . Un morphisme de  $\text{sq}_1 \Lambda_r^3 = \text{sq}_1 \Delta[3] \rightarrow \text{sq}_1 N(\mathcal{C})$  revient à la donnée de quatre objets  $c_0, c_1, c_2, c_3$  de  $\mathcal{C}$  et de flèche  $f_{ij} : c_i \rightarrow c_j$ , pour tous  $i < j$ . Ce morphisme s'étend à la face (de dimension 2) de sommets  $i < j < k$  si et seulement si  $f_{ki} = f_{kj} \circ f_{ji}$ . Si par exemple  $r = 1$ , alors un morphisme  $\Lambda_1^3 \rightarrow N(\mathcal{C})$  est la donnée de  $c_i$  et  $f_{ij}$  comme ci-dessus, tels que  $f_{13} = f_{23} \circ f_{12}$ ,  $f_{02} = f_{12} \circ f_{01}$  et  $f_{03} = f_{13} \circ f_{01}$ . Prolonger ce morphisme à  $\Delta[3]$  revient à montrer que  $f_{03} = f_{23} \circ f_{02}$ , ce qui résulte bien des relations connues. Le cas  $r = 2$  est similaire.

2. Un morphisme  $\Lambda_0^2 \rightarrow N(\mathcal{C})$  équivaut à la donnée de trois objets  $c_0, c_1, c_2$  de  $\mathcal{C}$  (les images des sommets 0, 1, 2) et de deux flèches  $f : c_0 \rightarrow c_1$  et  $h : c_0 \rightarrow c_2$  (les images des faces reliant 0 à 1 et 0 à 2). Trouver un prolongement de ce morphisme à  $\Delta[2]$  revient à trouver une flèche  $g : c_1 \rightarrow c_2$  telle que  $h = g \circ f$ . Donc le fait que tout morphisme  $\Lambda_0^2 \rightarrow N(\mathcal{C})$  se prolonge à  $\Delta[2]$  est équivalent au fait que toute flèche de  $\mathcal{C}$  admet un inverse à gauche. De même, le fait que tout morphisme  $\Lambda_2^2 \rightarrow N(\mathcal{C})$  se prolonge à  $\Delta[2]$  est équivalent au fait que toute flèche de  $\mathcal{C}$  admet un inverse à droite. En particulier, si  $N(\mathcal{C})$  est un complexe de Kan, alors  $\mathcal{C}$  est un groupoïde.

On suppose maintenant que  $\mathcal{C}$  est un groupoïde, et on finit la preuve que  $N(\mathcal{C})$  est un complexe de Kan. Comme ci-dessus, un morphisme  $\Lambda_0^3 \rightarrow N(\mathcal{C})$  revient à la donnée de quatre objets  $c_0, c_1, c_2, c_3$  de  $\mathcal{C}$  et de flèche  $f_{ij} : c_i \rightarrow c_j$ , pour tous  $i < j$  telles que  $f_{30} = f_{32} \circ f_{20} = f_{31} \circ f_{10}$  et  $f_{20} = f_{21} \circ f_{10}$ . Pour prolonger ce morphisme à  $\Delta[3]$ , il suffit de montrer que  $f_{31} = f_{32} \circ f_{21}$ . Or  $f_{31} \circ f_{10} = f_{30} = f_{32} \circ f_{20} = f_{32} \circ f_{21} \circ f_{10}$ , d'où l'égalité cherchée en simplifiant  $f_{10}$ . Le cas des morphismes  $\Lambda_3^3 \rightarrow N(\mathcal{C})$  est similaire. □

*Remarque 4.4.9.* On vérifie facilement<sup>17</sup> qu'un ensemble simplicial  $X_\bullet$  est le nerf d'une catégorie si et seulement si tout morphisme  $\Lambda_k^n \rightarrow X_\bullet$ , avec  $0 < k < n$ , admet un unique prolongement à  $\Delta[n]$ . C'est le nerf d'un groupoïde si et seulement si c'est un complexe de Kan pour lequel les prolongements à  $\Delta[n]$  de tous les morphismes  $\Lambda_k^n \rightarrow X_\bullet$  sont uniques. De plus,

16. On dit que  $N(\mathcal{C})$  est un 2-cosquelette.

17. Preuve ou ref.

le foncteur nerf de la catégorie des catégorie vers celle des ensembles simpliciaux est pleinement fidèle.

## 4.5 Complexes de Kan et homotopies

**Notation 4.5.1.** On note parfois  $*$  le “point” simplicial, c’est-à-dire un objet isomorphe à  $\Delta[0]$ .

On a deux morphismes  $\delta^0 = \delta_*^0, \delta^1 = \delta_*^1 : \Delta[0] \longrightarrow \Delta[1]$  (qui envoient le point sur les deux extrémités du “segment”  $\Delta[1]$ ).

En général, si  $\mathcal{C}$  est une catégorie qui a un objet final  $*$ , on utilise aussi la notation  $*$  pour l’objet final de  $s\mathcal{C}$  (qui est simplement l’objet simplicial constant de valeur  $*$ ).

Par exemple, dans la catégorie des groupes (abéliens ou non),  $*$  est le groupe trivial. Dans la catégorie des anneaux (commutatifs ou non),  $*$  est l’anneau nul.

**Définition 4.5.2.** Un *ensemble simplicial pointé* est un couple  $(X_\bullet, v)$ , où  $X_\bullet$  est un ensemble simplicial et  $v \subset X_\bullet$  est un sous-ensemble simplicial isomorphe à  $\Delta[0]$ . On notera souvent  $v$  l’élément correspondant dans un  $X_n$ .

Si  $(X_\bullet, v)$  est un ensemble simplicial pointé et  $Y_\bullet \supset Z_\bullet$  sont des ensembles simpliciaux, un morphisme  $u : (Y_\bullet, Z_\bullet) \longrightarrow (X_\bullet, v)$  est un morphisme d’ensembles simpliciaux  $u : Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet$  tel que  $u(Z_\bullet) = v$ .

Ces définitions gardent un sens dans la catégorie  $s\mathcal{C}$ , si  $\mathcal{C}$  a un objet final. Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie abélienne, la catégorie des groupes ou celle des anneaux (commutatifs ou non), alors l’objet final est aussi initial, donc tout objet simplicial est canoniquement pointé par  $*$  (et tout morphisme préserve ces points).<sup>18</sup>

**Définition 4.5.3.** Soient  $X_\bullet$  et  $Y_\bullet$  deux ensembles simpliciaux.

- (1) Deux morphismes  $f, g : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$  sont dits *homotopes* s’il existe un morphisme  $h : \Delta[1] \times X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$  tel que  $h \circ \delta^0 = f$  et  $h \circ \delta^1 = g$ . On dit que  $h$  est une *homotopie* de  $f$  à  $g$ .
- (2) Soient  $Z_\bullet \subset X_\bullet$  un sous-ensemble simplicial et  $* \in Y_\bullet$  un point. Deux morphismes  $f, g : (X_\bullet, Z_\bullet) \longrightarrow (Y_\bullet, *)$  sont dits *homotopes* (relativement à  $Z_\bullet$ ) s’il existe un morphisme  $h : \Delta[1] \times X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$  tel que  $h \circ \delta^0 = f$  et  $h \circ \delta^1 = g$ , et que  $h(\Delta[1] \times Z_\bullet) = *$ .

**Remarque 4.5.4.** Si  $f, g : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$  sont homotopes, alors leurs réalisations topologiques  $|f|, |g| : |X_\bullet| \longrightarrow |Y_\bullet|$  sont homotopes au sens habituel. De même avec des points.

Pour des ensembles simpliciaux quelconques  $X_\bullet$  et  $Y_\bullet$ , l’homotopie n’est pas une relation d’équivalence sur  $\text{Hom}(X_\bullet, Y_\bullet)$ . (Contrairement à ce qui se passe pour les espaces topologiques.) On a vu un exemple de ce phénomène au début de la section 4.4 (noter que  $X_0 = \text{Hom}(\Delta[0], X_\bullet)$ ,

18. Et je doute fortement qu’on utilise un autre point dans ce cas.

et la relation appelée “homotopie” sur  $X_0$  est un cas particulier de la définition 4.5.3.) Cependant, on a le résultat agréable suivant, qui généralise la remarque 4.4.3.

**Théorème 4.5.5.** *Si  $Y_\bullet$  est un complexe de Kan, alors l’homotopie est une relation d’équivalence sur  $\text{Hom}(X_\bullet, Y_\bullet)$ . On a un résultat similaire pour l’homotopie relativement à un sous-ensemble simplicial de  $X_\bullet$ .*

Nous verrons plus tard comment déduire ce résultat de la remarque 4.4.3 et de résultats généraux sur les fibrations de Kan.<sup>19</sup>

Le théorème ci-dessus permet de faire la définition suivante.

**Définition 4.5.6.** Soit  $(X_\bullet, v)$  un complexe de Kan pointé. On note  $\pi_n(X_\bullet, v)$  l’ensemble des classes d’homotopie des morphismes  $(\Delta[n], \partial\Delta[n]) \rightarrow (X_\bullet, v)$ .

Notons que cet ensemble est pointé par la classe d’homotopie du morphisme constant  $\Delta[n] \rightarrow * \subset X_\bullet$ , et qu’il résulte facilement de la définition que le foncteur  $\pi_n$  est compatible aux produits (directs).

*Remarque 4.5.7.* - Cette définition est formellement analogue à la définition habituelle pour les espaces topologiques. En fait, comme  $|\Delta[n]|$  est homéomorphe à la boule fermée de dimension  $n$  d’une manière qui identifie  $|\partial\Delta[n]|$  et la sphère, la remarque 4.5.4 implique qu’on a une application canonique  $\pi_n(X_\bullet, v) \rightarrow \pi_n(|X_\bullet|, |v|)$  pour tout  $n$ .

- Si  $X_\bullet$  est un groupe abélien simplicial (donc automatiquement fibrant), pointé par 0, on retrouve la définition 2.3.7.

*Remarque 4.5.8.* Vu l’analogie avec les espaces topologiques, on s’attend fortement à ce que les  $\pi_n(X_\bullet, v)$  soient des groupes pour  $n \geq 1$ , abéliens si  $n \geq 2$ . Ceci est vrai, et il y a au moins trois moyens de le prouver :

- Un calcul direct (un peu pénible mais faisable). Voir les sections I.3 et I.4 du livre de May ([17]).
- Un calcul direct pour montrer que les  $\pi_n$  sont des groupes si  $n \geq 1$ , puis l’utilisation de l’espace des lacets. Voir [8] I.7.1 et I.7.2 pour la définition du produit et le fait que  $\pi_n$  est un groupe, et le corollaire 4.9.8 pour l’utilisation de l’espace des lacets.

*Remarque 4.5.9.* Une difficulté si l’on veut comprendre les preuves du livre [17] de May et que l’on utilise dans ces notes le langage plus moderne de [8], qui est plus compact et se généralise mieux mais se prête moins aux calculs directs. Par exemple, la preuve des propriétés de  $\pi_n$  dans [8] I.7 utilise déjà la théorie des extensions anodines. (Un des buts de cette remarque est de vendre les extensions anodines au lecteur. Nous l’invitons à lire les preuves plus classiques de [17] et à les comparer avec celles plus modernes de [8].)

Supposons que l’on essaie de lire la preuve plus élémentaire de [17] I.3-I.4. La principale difficulté est que May n’utilise la même notion d’homotopie pour des  $n$ -simplexes d’un complexe de Kan.

En effet, si  $f, g : Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$  sont deux morphismes d’ensembles simpliciaux, il existe deux définitions de la notion d’homotopie de  $f$  à  $g$  :

- (1) Celle de la définition 4.5.3, qui est formellement analogue à la définition pour les espaces topologiques (et s’adapte aux catégories de modèles plus générales, cf [10] définition 1.2.4).
- (2) La définition plus traditionnelle, plus combinatoire et plus proche de la définition pour les complexes de groupes abéliens : une homotopie de  $f$  à  $g$  est la donnée, pour tout  $n \geq 0$ , d’une famille  $(h_i = h_i^n)_{0 \leq i \leq n+1}$  d’applications  $Y_n \rightarrow X_{n+1}$ , vérifiant les conditions suivantes :

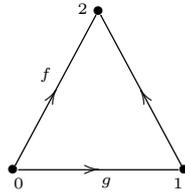
---

19. Voir l’exemple 4.9.3.

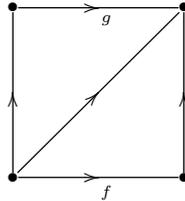
- (a)  $d_0 h_0 = f, d_{n+1} h_n = g;$
- (b)  $d_i h_j = h_{j-1} d_i$  si  $i < j$   
 $d_{j+1} h_{j+1} = d_{j+1} h_j$   
 $d_i h_j = h_j d_{i-1}$  si  $i > j + 1;$
- (c)  $s_i h_j = h_{j+1} s_i$  si  $i \leq j$   
 $s_i h_j = h_j s_{i-1}.$

L'équivalence entre les deux définitions est prouvée dans la proposition 6.2 de [17], et n'utilise pas le fait que  $X_\bullet$  est un complexe de Kan. Elle est expliquée dans la section 8.2 de [4]. L'idée est que, si  $Y_\bullet$  est un simplexe standard  $\Delta[m]$ , alors  $\Delta[1] \times \Delta[m]$  est une union de  $m + 1$  simplexes  $\Delta[m + 1]$  tels que les simplexes numéros  $i$  et  $i + 1$  sont attachés par une face de dimension  $m$  (voir la discussion dans la section 5 de [4]). On passe ainsi de la donnée d'un morphisme  $\Delta[1] \times \Delta[m] \rightarrow X_\bullet$  à celle des  $h_i^m$ .

Supposons que ce point soit acquis, il faut encore comparer la notion d'homotopie qui en résulte pour les  $n$ -simplexes de  $X_\bullet$  avec celle de la définition 3.1 de [17], ce qui est fait dans le lemme 5.5 de [17]. Cette fois, il est important de supposer que  $X_\bullet$  est un complexe de Kan. Par exemple, considérons des simplexes de dimension 1, c'est-à-dire des éléments de  $X_1$ . Alors  $f, g \in X_1$  sont homotopes au sens de la définition 3.1 de [17] s'ils ont la même source et le même but et s'il existe un morphisme  $\Delta[2] \rightarrow X_\bullet$  qui envoie la face  $(0 \rightarrow 2)$  sur  $f$  et la face  $(0 \rightarrow 1)$  sur  $g$  (et le sommet sur 0 sur l'origine commune de  $f$  et  $g$ , et les sommets 1 et 2 sur la destination commune de  $f$  et  $g$ ) :



D'autre part,  $f$  et  $g$  sont homotopes au sens de la définition 4.5.3 si on peut tracer le diagramme suivant dans  $X_\bullet$  :



Même si on se restreint aux lacets de source et but un point fixé  $v$  de  $X_\bullet$  (et que l'on utilise la définition de l'homotopie relative dans la définition 3.3 de [17], ce qui revient à supposer que tous les points des deux diagrammes, la face  $(1 \rightarrow 2)$  du premier diagramme et les segments verticaux du deuxième diagramme s'envoient tous sur  $v$ ), les deux notions ne coïncident pas a priori. Cependant, si  $X_\bullet$  est un complexe de Kan, on peut montrer qu'elles sont équivalentes (sans trop de difficulté dans ce cas, avec un peu plus d'efforts en général).

Une fois que l'on a fait tout cela, la preuve que l'homotopie est une relation d'équivalence est la proposition 3.4 de [17] (dont dépend en fait ce qui précède), et la preuve du fait que  $\pi_n$  est un groupe si  $n \geq 1$ , abélien si  $n \geq 2$ , occupe toute la section 4 de [17].

**Théorème 4.5.10.** *Soit  $(X_\bullet, v)$  un complexe de Kan pointé. Alors, pour tout  $n$ , l'application canonique  $\pi_n(X_\bullet, v) \rightarrow \pi_n(|X_\bullet|, |v|)$  est bijective.*

On peut déduire ce théorème de l'isomorphisme des  $\pi_0$  (qui est très facile à montrer directement), des propriétés de l'espace des lacets et de résultats plus difficiles sur la réalisation géométrique des fibrations. Voir le corollaire 4.10.2.

**Exemple 4.5.11.** (1) On a déjà vu (théorème 2.3.8 et proposition 2.3.3) que, si  $X_\bullet$  est un groupe abélien simplicial, alors on a des isomorphismes canoniques

$$\pi_n(X_\bullet, 0) \simeq H_n(N(X_\bullet)) \simeq H_n(C(X_\bullet)).$$

Ceci donne un moyen systématique de construire des  $K(A, n)$ , si  $A$  est un groupe abélien et  $n \geq 1$ .<sup>20</sup> Il suffit de prendre le complexe de groupes abéliens  $C_*$  donné par  $C_n = A$  et  $C_k = 0$  si  $k \neq n$ , et de lui appliquer l'inverse de l'équivalence de Dold-Kan puis le foncteur de réalisation géométrique. (Évidemment, le résultat n'est pas très facile à visualiser.)

- (2) Soit  $G$  un groupe abstrait. Alors il est très facile de voir que  $\pi_n(BG, 1) = *$  si  $n \neq 1$  et  $\pi_1(BG, 1) = G$ . En particulier,  $|BG|$  est un  $K(G, 1)$ .
- (3) Soit  $(X, v)$  un espace topologique pointé. On a vu dans la proposition 4.4.6 que  $\text{Sing}(X)_\bullet$  est un complexe de Kan. On voit facilement que  $\text{Sing}(v)_\bullet = *$ , et il résulte immédiatement de la définition de  $\text{Sing}$  et de  $\pi_n$  que  $\pi_n(\text{Sing}(X)_\bullet, *) = \pi_n(X, v)$ .<sup>21</sup>

## 4.6 Fibrations de Kan

Pour aller plus loin, on aura besoin de la version relative des complexes de Kan.

**Définition 4.6.1.** On considère deux morphismes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : X \rightarrow Y$  dans une catégorie  $\mathcal{C}$ . On dit que  $f$  a la propriété de relèvement à droite par rapport à  $g$ , ou que  $g$  a la propriété de relèvement à gauche par rapport à  $f$ <sup>22</sup> si, pour tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ g \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

il existe une flèche diagonale (en pointillés) faisant commuter le diagramme.

**Définition 4.6.2.** On dit qu'un morphisme d'espaces simpliciaux  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est une *fibration de Kan* (ou simplement une *fibration*) s'il a la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les inclusions  $\Lambda_k^n \subset \Delta[n]$ , c'est-à-dire si, pour tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & X_\bullet \\ \downarrow & \nearrow g & \downarrow f \\ \Delta[n] & \longrightarrow & Y_\bullet \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est l'inclusion, il existe une flèche diagonale  $g : \Delta[n] \rightarrow X_\bullet$  faisant commuter les deux triangles.

**Remarque 4.6.3.** - La classe des fibrations est clairement stable par tout changement de base.

20. Un  $K(A, n)$ , ou espace d'Eilenberg-MacLane de type  $K(A, n)$ , est un espace topologique connexe dont le  $\pi_n$  est isomorphe à  $A$  et les autres  $\pi_k$  sont triviaux.

21. Attention, la réalisation topologique de  $\text{Sing}(X)_\bullet$  n'est pas  $X$ , donc il ne s'agit pas immédiatement de l'isomorphisme du théorème 4.5.10. En fait, l'application continue  $|\text{Sing}(X)_\bullet| \rightarrow X$  (donnée par la co-unité de l'adjonction  $(|\cdot|, \text{Sing})$ ) est une équivalence d'homotopie faible, i.e. induit des isomorphismes sur tous les  $\pi_n$ , ce qui redonne l'identification ci-dessus.

22. Ces deux expressions sont synonymes.

- Un ensemble simplicial  $X_\bullet$  est un complexe de Kan si et seulement si l'unique morphisme  $X_\bullet \rightarrow *$  est une fibration de Kan.
- Si  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est une fibration de Kan, alors ses fibres (c'est-à-dire les produits fibrés  $* \times_{Y_\bullet} X_\bullet$ , pour tout morphisme  $* \rightarrow Y_\bullet$ ) sont des complexes de Kan.
- L'analogue en topologie d'une fibration de Kan est une *fibration de Serre* (même définition, mais avec les réalisations topologiques du simplexe et du cornet). Il est vrai mais pas du tout trivial que la réalisation géométrique d'une fibration de Kan est une fibration de Serre. Voir le théorème 4.10.1.

Un des intérêts des fibrations est qu'elles donnent lieu à des suites exactes longues de groupes d'homotopie (d'ensembles pointés en degré 0).

Soit  $p : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  une fibration. On se donne un point  $*$   $\in X_\bullet$ , on note  $*$  son image dans  $Y_\bullet$  et  $F_\bullet$  la fibre de  $p$  au-dessus de  $*$ . C'est un complexe de Kan, et il est naturellement pointé (car il contient le point fixé de  $X_\bullet$ ). On suppose maintenant que  $Y_\bullet$  est aussi fibrant (ce qui implique que  $X_\bullet$  est fibrant). Soit  $g \in \pi_n(Y_\bullet, *)$ , avec  $n \geq 1$ , et soit  $u : \Delta[n] \rightarrow Y_\bullet$  un morphisme représentant  $g$ . On considère le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_0^n & \longrightarrow & X_\bullet \\ \downarrow & \nearrow v & \downarrow p \\ \Delta[n] & \xrightarrow{u} & Y_\bullet \end{array}$$

où le morphisme  $\Lambda_0^n \rightarrow X_\bullet$  est le morphisme constant d'image  $*$  (le diagramme commute car  $u(\partial\Delta[n]) = *$ ). Comme  $p$  est une fibration, il existe  $v : \Delta[n] \rightarrow X_\bullet$  qui fait commuter le diagramme. Comme  $u(\partial\Delta[n]) = *$ , l'image de  $v \circ \delta_*^0 : \Delta[n-1] \rightarrow X_\bullet$  est contenue dans  $p^{-1}(*) = F_\bullet$ . Comme la restriction de  $v$  à  $\Lambda_0^n$  est le morphisme constant d'image  $*$  et que  $\delta_*^0(\partial\Delta[n-1]) \subset \Lambda_0^n$ , le morphisme  $v \circ \delta_*^0 : \Delta[n-1] \rightarrow F_\bullet$  envoie  $\delta\Delta[n-1]$  dans  $*$ . Finalement,  $v \circ \delta_*^0$  définit une classe dans  $\pi_{n-1}(F_\bullet, *)$ .

Le théorème suivant n'est pas très difficile à montrer (mais un peu pénible). Voir [8] lemme I.7.3.

**Théorème 4.6.4.** *La construction ci-dessus ne dépend pas des choix et définit une application d'ensembles pointés  $\partial : \pi_n(Y_\bullet, *) \rightarrow \pi_{n-1}(F_\bullet, *)$ , qui est un morphisme de groupes si  $n \geq 2$ . De plus, la suite*

$$\dots \rightarrow \pi_n(F_\bullet, *) \rightarrow \pi_n(X_\bullet, *) \rightarrow \pi_n(Y_\bullet, *) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F_\bullet, *) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow \pi_1(F_\bullet, *) \rightarrow \pi_1(X_\bullet, *) \rightarrow \pi_1(Y_\bullet, *) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F_\bullet, *) \rightarrow \pi_0(X_\bullet, *) \rightarrow \pi_0(Y_\bullet, *)$$

(où toutes les flèches sauf les  $\partial$  sont des morphismes de fonctorialité) est exacte, et on a une action du groupe  $\pi_1(Y_\bullet, *)$  sur l'ensemble  $\pi_0(F_\bullet, *)$  telle que deux éléments de  $\pi_0(F_\bullet, *)$  ont la même image dans  $\pi_0(X_\bullet, *)$  si et seulement s'ils sont dans la même orbite pour cette action.

À ce point, le seul moyen dont on dispose pour construire une fibration dont le but n'est pas \* est d'appliquer le foncteur  $\text{Sing}$  à une fibration de Serre, à condition d'avoir une fibration de Serre intéressante sous la main. La théorie des extensions anodines de Gabriel-Zisman permet de donner une définition plus souple des fibrations et de construire plus d'exemples. Les exemples en question feront intervenir des  $\text{Hom}$  internes d'ensembles simpliciaux. On introduit ces deux notions dans les deux sections suivantes.

## 4.7 Hom interne

En termes techniques, on va montrer que la catégorie  $\mathbf{sEns}$  est enrichie en elle-même, c'est-à-dire qu'on va construire un bifoncteur (le  $\text{Hom}$  interne)

$$\begin{aligned} \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}} : (\mathbf{sEns})^{\text{op}} \times \mathbf{sEns} &\longrightarrow \mathbf{sEns} \\ (X_{\bullet}, Y_{\bullet}) &\longmapsto \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, Y_{\bullet}) \end{aligned} ,$$

des morphismes d'évaluation

$$X_{\bullet} \times \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, Y_{\bullet}) \longrightarrow Y_{\bullet}$$

et des morphismes de composition associatifs

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, Y_{\bullet}) \times \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(Y_{\bullet}, Z_{\bullet}) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, Z_{\bullet}).$$

De plus, on a  $\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, Y_{\bullet}) = \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, Y_{\bullet})$  et, si  $Y_{\bullet}$  est un complexe de Kan, alors  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, Y_{\bullet})$  est un complexe de Kan et  $\pi_0(\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, Y_{\bullet}))$  est l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes  $X_{\bullet} \longrightarrow Y_{\bullet}$ .

Ceci n'est pas très étonnant, si utilise la philosophie générale que les ensembles simpliciaux (ou au moins les complexes de Kan) se comportent comme les espaces topologiques. En effet, si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces topologiques, l'ensemble des applications continues de  $X$  dans  $Y$  est effectivement un espace topologique (avec la topologie compacte-ouverte), et les analogues des propriétés ci-dessus sont vrais si on se restreint aux espaces compactement engendrés.

**Définition 4.7.1.** Soient  $X_{\bullet}, Y_{\bullet} \in \text{Ob}(\mathbf{sEns})$ . On définit un ensemble simplicial  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, Y_{\bullet})$  de la manière suivante :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, Y_{\bullet})_n = \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta(n) \times X_{\bullet}, Y_{\bullet}).$$

- Pour toute application croissante  $f : [n] \longrightarrow [m]$ ,

$$f^* : \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, Y_{\bullet})_m \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, Y_{\bullet})_n$$

envoie  $u : \Delta[m] \times X_{\bullet} \longrightarrow Y_{\bullet}$  vers  $u \circ (f_* \times \text{id}_{X_{\bullet}}) : \Delta[n] \times X_{\bullet} \longrightarrow Y_{\bullet}$ .

L'idée est que, pour tous  $X_\bullet$  et  $Z_\bullet$  dans  $\mathbf{sEns}$ , le foncteur  $Y_\bullet \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet)$  doit être l'adjoint à droite du foncteur  $Y_\bullet \mapsto X_\bullet \times Y_\bullet$ , i.e. on doit avoir un isomorphisme canonique (fonctoriel en toutes les variables)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet \times Y_\bullet, Z_\bullet).$$

Si on prend  $X_\bullet = \Delta[n]$  (et qu'on se souvient que  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n], T_\bullet) = T_n$  par le lemme de Yoneda), ceci donne la formule de la définition.

**Définition 4.7.2.** Soient  $X_\bullet, Y_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sEns})$ . On définit le morphisme d'évaluation

$$\mathrm{ev} : X_\bullet \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Y_\bullet) \longrightarrow Y_\bullet$$

de la manière suivante : pour tous  $x \in X_n$  et  $f : \Delta[n] \times X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ , on pose  $\mathrm{ev}(x, f) = f_n(x, \iota_n) \in Y_n$ .<sup>23</sup>

La proposition suivante est une vérification facile.

**Proposition 4.7.3.** Soient  $X_\bullet, Y_\bullet, Z_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sEns})$ . Alors l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet \times Y_\bullet, Z_\bullet),$$

qui envoie  $g : X_\bullet \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet)$  sur le composé

$$X_\bullet \times Y_\bullet \xrightarrow{g \times \mathrm{id}_{Y_\bullet}} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet) \times Y_\bullet \xrightarrow{\mathrm{ev}} Z_\bullet,$$

est fonctorielle en chaque variable et bijective.

Donnons la définition des morphismes de "composition".

**Définition 4.7.4.** Soient  $X_\bullet, Y_\bullet, Z_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sEns})$ . On définit une flèche

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Y_\bullet) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Z_\bullet)$$

de la manière suivante : Si  $f \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Y_\bullet)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n] \times X_\bullet, Y_\bullet)$  et  $g \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n] \times Y_\bullet, Z_\bullet)$ , alors  $g \circ f \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Z_\bullet)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n] \times X_\bullet, Z_\bullet)$  est le composé

$$\Delta[n] \times X_\bullet \xrightarrow{i \times \mathrm{id}_{X_\bullet}} \Delta[n] \times \Delta[n] \times X_\bullet \xrightarrow{\mathrm{id}_{\Delta[n]} \times f} \Delta[n] \times Y_\bullet \xrightarrow{g} Z_\bullet,$$

où  $i : \Delta[n] \longrightarrow \Delta[n] \times \Delta[n]$  est le morphisme diagonal.

On vérifie facilement les propriétés de ces morphismes (associativité, compatibilité avec la composition habituelle en degré 0).

---

23. On rappelle que  $\iota_n \in \Delta[n]_n$  est l'unique simplexe non dégénérée, qui correspond à l'identité de  $[n]$ .

## 4.8 Extensions anodines

Référence : [8] section I.4 ou [12] sections 3.1 et 3.2.

**Résumé** : Les extensions anodines sont la plus grande classe d'inclusions d'ensembles simpliciaux par rapport auxquelles toutes les fibrations ont la propriété de relèvement à droite (et réciproquement, une inclusion est anodine si et seulement si elle a la propriété de relèvement à gauche pour toutes les fibrations). Elle contient tous les  $\Lambda_k^n \subset \Delta[n]$  (et est en un sens convenable engendrée par ces inclusions). De plus, si  $X_\bullet \subset Y_\bullet$  est une extension anodine et  $Z_\bullet \subset T_\bullet$  est une inclusion quelconque, alors  $(X_\bullet \times T_\bullet) \coprod (Y_\bullet \times Z_\bullet) \subset Y_\bullet \times T_\bullet$  est une extension anodine.

Les extensions anodines sont aussi appelées *cofibrations triviales*. (Dans ce contexte, les *cofibrations* sont simplement les morphismes injectifs.)

Voici la version plus détaillée.

**Définition 4.8.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On dit qu'un morphisme  $g : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  est un *rétracte* d'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A \\ g \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & B \end{array}$$

où les composés  $A \rightarrow X \rightarrow A$  et  $B \rightarrow Y \rightarrow B$  des flèches horizontales sont  $\text{id}_A$  et  $\text{id}_B$  respectivement.

**Définition 4.8.2.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On dit qu'une classe  $M$  de morphismes dans  $\mathcal{C}$  est *saturée* si elle vérifie les quatre propriétés suivantes :

- (A) Tous les isomorphismes sont dans  $M$ .
- (B) On considère un diagramme cocartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ i_1 \downarrow & & \downarrow i_2 \\ Z & \longrightarrow & Z \coprod_X Y \end{array}$$

( $Z \coprod_X Y$  est le coproduit dans la catégorie  $\mathcal{C}$ ). Si  $i_1$  est dans  $M$ , alors  $i_2$  est aussi dans  $M$ . (Autrement dit,  $M$  est stable par pushout.)

- (C)  $M$  est stable par rétraction (i.e. tout rétracte d'un élément de  $M$  est dans  $M$ ).
- (D)  $M$  est stable par composition dénombrable et unions disjointes arbitraires, c'est-à-dire que :
  - (D1) Si on a une suite de morphismes  $A_1 \xrightarrow{i_1} A_2 \xrightarrow{i_2} A_3 \rightarrow \dots$  avec tous les  $i_r$  dans  $M$ , alors le morphisme canonique  $A_1 \rightarrow \varinjlim_r A_r$  est aussi dans  $M$ .

(D2) Si on a une famille de morphismes  $(i_j : A_j \longrightarrow B_j)_{j \in J}$  qui sont tous dans  $M$ , alors le morphisme induit  $\coprod_{j \in J} A_j \longrightarrow \coprod_{j \in J} B_j$  est dans  $M$ .

**Notation 4.8.3.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ . On note  $RD(f)$  (resp.  $RG(f)$ ) la classe de toutes les surjections (resp. injections) qui ont la propriété de relèvement à droite (resp. à gauche) par rapport à  $f$ . Si  $C$  est une classe de morphismes, on note aussi  $RG(C) = \bigcap_{f \in C} RG(f)$  et  $RD(C) = \bigcap_{f \in C} RD(f)$ .

Le fait suivant est très facile.

**Fait 4.8.4.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ . Alors la classe  $RG(f)$  est saturée.

**Définition 4.8.5.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $C$  une classe de morphismes de  $\mathcal{C}$ . La *saturation*  $C$ , aussi appelée *classe saturée engendrée* par  $C$ , est la plus petite classe saturée d'inclusions contenant  $C$ .

Si  $\mathcal{C} = \mathbf{sEns}$  et  $C$  est l'ensemble des inclusions  $\Lambda_k^n \subset \Delta[n]$ , sa saturation est appelée l'ensemble des *extensions anodines* et notée  $\mathcal{A}$ .

Il résulte du fait ci-dessus que les fibrations sont les morphismes qui ont la propriété de relèvement à droite pour toutes les extensions anodines.

Commençons par calculer la saturation de l'ensemble des morphismes  $\partial\Delta[n] \subset \Delta[n]$ .

**Proposition 4.8.6.** La saturation de l'ensemble des morphismes  $\partial\Delta[n] \subset \Delta[n]$  est la classe de toutes les injections d'ensembles simpliciaux.

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{C}$  la saturation en question. Soit  $A_\bullet \longrightarrow X_\bullet$  une injection. D'après le lemme ci-dessus et la propriété (B) d'une classe saturée, l'inclusion  $\mathrm{sq}_{n-1}(X_\bullet) \cup A_\bullet \longrightarrow \mathrm{sq}_n(X_\bullet) \cup A_\bullet$  est dans  $\mathcal{C}$ . pour tout  $n \geq 0$ . D'après la proposition 4.1.9, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{n \geq -1} (\mathrm{sq}_n(X_\bullet) \cup A_\bullet) \longrightarrow X_\bullet$$

est un isomorphisme. Donc, d'après la propriété (D) des classes saturées, l'inclusion  $\mathrm{sq}_{-1}(X_\bullet) \cup A_\bullet \longrightarrow X_\bullet$  est dans  $\mathcal{C}$ . Or  $\mathrm{sq}_{-1}(X_\bullet) \cup A_\bullet = A_\bullet$ , donc  $A_\bullet \longrightarrow X_\bullet$  est dans  $\mathcal{C}$ . □

**Lemme 4.8.7.** Soit  $A_\bullet \longrightarrow X_\bullet$  une injection d'ensembles simpliciaux. Soit  $e_n \subset X_n$  l'ensemble des simplexes non dégénérés qui ne sont pas dans l'image de  $i$ . On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{e_n} \partial\Delta[n] & \longrightarrow & \coprod_{e_n} \Delta[n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{sq}_{n-1}(X_\bullet) \cup A_\bullet & \longrightarrow & \mathrm{sq}_n(X_\bullet) \cup A_\bullet \end{array}$$

où les unions sont prises dans  $X_\bullet$ , les flèches horizontales sont les inclusions évidentes, le morphisme vertical de droite envoie le  $\Delta[n]$  correspondant à  $x \in e_n$  dans  $X_\bullet$  via le morphisme  $\Delta[n] \rightarrow X_\bullet$  correspondant à  $x$  et le morphisme vertical de gauche est sa restriction.

Alors ce diagramme est cocartésien (c'est-à-dire que  $\text{sq}_n(X_\bullet) \cup A_\bullet$  est isomorphe au coproduit des deux flèches partant de  $\coprod_{e_n} \partial\Delta[n]$ ).

**Définition 4.8.8.** Un morphisme  $X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est appelé une *fibration triviale* s'il a la propriété de relèvement à droite par rapport aux inclusions  $\partial\Delta[n] \subset \Delta[n]$  (ou, ce qui revient au même par la proposition ci-dessus, par rapport à toutes les inclusions).

Noter qu'une fibration triviale est en particulier une fibration.

Les propositions suivantes résultent facilement de la définition.

**Proposition 4.8.9.** Si  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est une fibration triviale, alors, pour tout  $x \in X_\bullet$  et tout  $n \geq 0$ , le morphisme  $\pi_n(X_\bullet, v) \rightarrow \pi_n(Y_\bullet, f(v))$  est un isomorphisme.

**Proposition 4.8.10.** Si  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est une fibration triviale et que l'on choisit des points  $*$  de  $X_\bullet$  et  $Y_\bullet$  avec  $f(*) = *$ , alors il existe  $s : (Y_\bullet, *) \rightarrow (X_\bullet, *)$  tel que  $f \circ s = \text{id}_{Y_\bullet}$ .

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser la propriété de relèvement dans le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & X_\bullet \\ \downarrow & \nearrow s & \downarrow \\ Y_\bullet & \longrightarrow & Y_\bullet \end{array}$$

□

Le théorème suivant est très utile pour comprendre la catégorie homotopique de  $\mathbf{sEns}$  et construire des limites homotopiques. (Voir le théorème 4.10.6 et la section 5.)

**Théorème 4.8.11.** ([12] théorème 3.1.1 et 3.1.2) Soit  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  un morphisme dans  $\mathbf{sEns}$ .

1. Il existe une factorisation  $X_\bullet \xrightarrow{i} E_\bullet \xrightarrow{p} Y_\bullet$  de  $f$ , fonctorielle en  $f$ , telle que  $i$  est une extension anodine et  $p$  est une fibration.
2. Il existe une factorisation  $X_\bullet \xrightarrow{i} E_\bullet \xrightarrow{p} Y_\bullet$  de  $f$ , fonctorielle en  $f$ , telle que  $i$  est une injection et  $p$  est une fibration triviale.

Ce théorème résulte immédiatement du théorème abstrait suivant (et de la proposition 4.8.6), appliqué aux ensembles d'inclusions  $\Lambda_k^n \subset \Delta[n]$ ,  $0 \leq k \leq n$ , et  $\partial\Delta[n] \subset \Delta[n]$ ,  $n \geq 0$ . L'hypothèse de ce théorème est vérifiée car, si  $X_\bullet$  est un ensemble simplicial qui n'a qu'un nombre fini de simplexes non dégénérés (par exemple  $\Lambda_k^n$  ou  $\partial\Delta[n]$ ), alors le foncteur  $\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, \cdot)$  commute aux limites inductives indexées par  $\mathbb{N}$ .

**Théorème 4.8.12.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie qui a toutes les petites limites inductives,  $C$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ ,  $M$  la saturation de  $C$  et  $N = RD(C) = RD(M)$ . On suppose que, pour tout morphisme  $A \rightarrow B$  de  $C$ , le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \cdot) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  commute aux limites inductives indexées par  $\mathbb{N}$ .

Alors tout morphisme  $f$  de  $\mathcal{C}$  admet une factorisation fonctorielle  $f = p \circ i$ , avec  $p \in N$  and  $i \in M$ . En fait, on peut même prendre  $i$  dans la plus petite classe de morphismes  $M'$  contenant  $C$  qui vérifie les propriétés (A), (B) et (D) de la définition 4.8.2.

*Démonstration.* Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ . On considère l'ensemble  $L$  des carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

avec  $A \rightarrow B$  dans l'ensemble  $C$ . En prenant le coproduit sur tous ces carrés, on obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \coprod_L A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i^{-1} & & \downarrow f \\ \coprod_L B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

où le morphisme  $i^{-1}$  est dans  $M'$ . On considère le coproduit de  $i^{-1}$  et  $\coprod_L A \rightarrow X$  :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_L A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i^{-1} & & \downarrow i^0 \\ \coprod_L B & \longrightarrow & X^1 \end{array}$$

Alors le morphisme  $i^0$  est dans  $M'$ , et il existe  $f^1 : X^1 \rightarrow Y$  tel que  $f = f^1 \circ i^0$ . En répétant ce processus (et en posant  $f^0 = f$ ), on construit par récurrence des suites de morphismes  $i^n : X^n \rightarrow X^{n+1}$  et  $f^n : X^n \rightarrow Y$  pour  $n \geq 0$ , tels que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $f^n = f^{n+1} \circ i^n$  et  $i^n$  est dans  $M'$ .

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i^0} & X^0 & \xrightarrow{i^1} & X^1 & \xrightarrow{i^2} & X^2 \longrightarrow \dots \\ \downarrow f & \nearrow f^1 & \nearrow f^2 & \nearrow f^3 & & & \\ Y & & & & & & \end{array}$$

On pose  $E = \varinjlim_{n \geq 0} X^n$ . On a des morphismes canoniques  $i : X \rightarrow E$  (induit par les  $i^n$ ) et  $p : E \rightarrow Y$  (induit par les  $f^n$ ) tels que  $p \circ i = f$ . De plus, d'après la propriété (D1) de la définition 4.8.2, le morphisme  $i$  est dans  $M'$ . Il reste donc à montrer que  $p$  a la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes de  $C$ . On considère un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

avec  $A \rightarrow B$  dans  $C$ . Comme  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \cdot)$  commute aux limites inductives indexées par  $\mathbb{N}$ , le morphisme canonique

$$\varinjlim_n \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X^n) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \varinjlim_n X^n) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, E)$$

est un isomorphisme, et donc le morphisme  $A \rightarrow E$  se factorise par  $X^m$  pour  $m$  assez grand. Le carré ci-dessus vient donc d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X^m \\ \downarrow & & \downarrow f^m \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Alors, par définition de  $X^{m+1}$ , ce carré se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & X^m & \xrightarrow{i^{m+1}} & X^{m+1} \\ \downarrow & & \downarrow f^m & \nearrow & \downarrow \\ B & \longrightarrow & Y & \xleftarrow{f^{m+1}} & X^{m+1} \end{array}$$

En composant  $B \rightarrow X^{m+1}$  avec l'inclusion évidente  $X^{m+1} \rightarrow E$ , on obtient une flèche diagonale qui fait commuter le premier carré.

□

**Corollaire 4.8.13.** *Une inclusion d'ensembles simpliciaux est anodine si et seulement si elle a la propriété de relèvement à gauche pour toutes les fibrations.*

*Démonstration.* Le "seulement si" est déjà connu. Réciproquement, supposons que l'inclusion  $j : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$  ait la propriété de relèvement à gauche pour toutes les fibrations. Grâce au théorème 4.8.11, le morphisme  $j$  se factorise en  $X_{\bullet} \xrightarrow{i} E_{\bullet} \xrightarrow{p} Y_{\bullet}$ , avec  $i$  une extension anodine et  $p$  une fibration. En utilisant la propriété de relèvement de  $j$  et le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} X_{\bullet} & \xrightarrow{i} & E_{\bullet} \\ j \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ Y_{\bullet} & \xlongequal{\quad} & Y_{\bullet} \end{array}$$

on trouve un morphisme  $h : Y_{\bullet} \rightarrow E_{\bullet}$  tel que  $p \circ h = \text{id}_{Y_{\bullet}}$  et  $h \circ j = i$ . Donc  $j$  est un rétracte de  $i$ , et c'est une extension anodine.

□

**Théorème 4.8.14.** ([12] théorème 3.2.3) *On considère les trois classes d'inclusions suivantes :*

- $C_1$  est l'ensemble des inclusions  $\Lambda_k^n \subset \Delta[n]$ .

- $C_2$  est l'ensemble des inclusions  $(\Delta[1] \times \partial\Delta[n]) \cup (\{v\} \times \Delta[n]) \subset (\Delta[1] \times \Delta[n])$ , où  $v$  est le point 0 ou 1 de  $\Delta[1]$ .
- $C_3$  est la classe des inclusions  $(\Delta[1] \times X_\bullet) \cup (\{v\} \times Y_\bullet) \subset (\Delta[1] \times Y_\bullet)$ , où  $X_\bullet \subset Y_\bullet$  est une inclusion quelconque et  $v$  est le point 0 ou 1 de  $\Delta[1]$ .

Alors ces trois classes ont la même saturation (qui est la classe  $\mathcal{A}$  des extensions anodines).

*Démonstration.* On donne juste l'idée de la preuve.

Pour montrer que  $C_2 \subset \mathcal{A}$ , on remarque que l'on peut passer de  $(\Delta[1] \times \partial\Delta[n]) \cup (\{v\} \times \Delta[n])$  à  $\Delta[1] \times \Delta[n]$  en remplissant des cornets  $\Lambda_k^{n+1}$  (pour  $k$  variable). Cela résulte de la décomposition de  $\Delta[1] \times \Delta[n]$  en  $n+1$  morceaux isomorphes à  $\Delta[n+1]$ , voir par exemple la section 5 de [4].<sup>24</sup>

On montre ensuite que  $C_3 \subset \mathcal{A}$ . Par le corollaire 4.8.13, il suffit qu'un morphisme de  $C_3$  a la propriété de relèvement à gauche pour toute fibration. Soient donc  $X_\bullet \subset Y_\bullet$  une inclusion,  $v = 0$  ou 1 et  $A_\bullet \rightarrow B_\bullet$  une fibration, on considère un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\Delta[1] \times X_\bullet) \cup (\{v\} \times Y_\bullet) & \longrightarrow & A_\bullet \\ \downarrow & \nearrow \text{---} & \downarrow \\ \Delta[1] \times Y_\bullet & \longrightarrow & B_\bullet \end{array}$$

Par la magie des adjonctions, trouver une flèche diagonale dans ce carré revient à trouver une flèche diagonale dans le carré suivant, où les flèches horizontales viennent des isomorphismes d'adjonction (proposition 4.7.3) et la flèche verticale de droite de la functorialité de  $\underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}$  :

$$\begin{array}{ccc} X_\bullet & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(\Delta[1], A_\bullet) \\ \downarrow & \nearrow \text{---} & \downarrow \\ Y_\bullet & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(\{v\}, A_\bullet) \times_{\underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(\{v\}, B_\bullet)} \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(\Delta[1], B_\bullet) \end{array}$$

Or on a vu dans le paragraphe ci-dessus qu'on peut compléter ce deuxième carré si  $X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est une inclusion  $\partial\Delta[n] \subset \Delta[n]$ . De plus, la classe des inclusions  $X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  pour lesquelles on peut compléter le deuxième carré est saturée (c'est la classe des inclusions qui ont la propriété de relèvement à gauche pour la flèche verticale de droite du carré), donc elle contient la saturation de l'ensemble des inclusions  $\partial\Delta[n] \subset \Delta[n]$ . D'après la proposition 4.8.6, c'est donc la classe de toutes les inclusions.

Enfin, il reste à montrer que toute inclusion  $\Lambda_k^n \subset \Delta[n]$  est dans la classe saturée engendrée par  $C_3$ . Ceci résulte du fait que  $\Lambda_k^n \subset \Delta[n]$  est un rétracte de  $(\Delta[1] \times \partial\Delta[n]) \cup (\{0\} \times \Delta[n]) \subset (\Delta[1] \times \Delta[n])$  si  $0 \leq k < n$ , et de  $(\Delta[1] \times \partial\Delta[n]) \cup (\{1\} \times \Delta[n]) \subset (\Delta[1] \times \Delta[n])$  si  $0 < k \leq n$ . Par exemple, dans le premier cas, le morphisme  $\Delta[n] \rightarrow \Delta[1] \times \Delta[n]$  est donné par  $f : [n] \times [1] \times [n], i \mapsto (1, i)$ ,

---

24. Essayer de rajouter des dessins.

et le morphisme  $\Delta[1] \times \Delta[n] \rightarrow \Delta[n]$  est donné par  $g : [1] \times [n] \rightarrow [n]$ ,  $(1, i) \mapsto i$ ,  $(0, i) \mapsto \begin{cases} i & \text{si } i \leq k \\ k & \text{si } i \geq k \end{cases}$ .

□

**Corollaire 4.8.15.** ([12] théorème 3.2.2) Si  $X_\bullet \subset Y_\bullet$  est une extension anodine et  $Z_\bullet \subset T_\bullet$  est une inclusion quelconque, alors  $(X_\bullet \times T_\bullet) \cup (Y_\bullet \times Z_\bullet) \subset Y_\bullet \times T_\bullet$  est une extension anodine.

En particulier, en prenant  $Z_\bullet = \emptyset$ , on voit que  $X_\bullet \times T_\bullet \subset Y_\bullet \times T_\bullet$  est une extension anodine.

*Démonstration.* On fixe l'inclusion  $Z_\bullet \subset T_\bullet$ . Comme dans la preuve du théorème ci-dessus, on voit que la classe des inclusions  $X_\bullet \subset Y_\bullet$  telles que  $(X_\bullet \times T_\bullet) \cup (Y_\bullet \times Z_\bullet) \subset Y_\bullet \times T_\bullet$  soit anodine est saturée. Or elle contient tous les éléments de  $C_3$  (car si  $X_\bullet \subset Y_\bullet$  est dans  $C_3$ , on voit facilement que  $(X_\bullet \times T_\bullet) \cup (Y_\bullet \times Z_\bullet) \subset Y_\bullet \times T_\bullet$  est aussi dans  $C_3$ ). Elle contient donc toutes les extensions anodines.

□

## 4.9 Application des extensions anodines

Le théorème suivant, qui résulte facilement de la théorie des extensions anodines, permet de construire beaucoup de fibrations.

**Théorème 4.9.1.** Soient  $i : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  une injection d'ensembles simpliciaux et  $p : Z_\bullet \rightarrow T_\bullet$  une fibration. Par functorialité des  $\underline{\text{Hom}}$ , on obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(Y_\bullet, T_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(X_\bullet, Z_\bullet) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(X_\bullet, T_\bullet) \end{array}$$

qui induit un morphisme

$$\alpha : \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(X_\bullet, Z_\bullet) \times_{\underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(X_\bullet, T_\bullet)} \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(Y_\bullet, T_\bullet).$$

Alors ce morphisme est une fibration. Si de plus  $i : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est anodine ou  $p : Z_\bullet \rightarrow T_\bullet$  est une fibration triviale, le morphisme  $\alpha$  est une fibration triviale.

*Démonstration.* On considère un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{u} & \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \Delta[n] & \xrightarrow{v} & \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(X_\bullet, Z_\bullet) \times_{\underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(X_\bullet, T_\bullet)} \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(Y_\bullet, T_\bullet) \end{array}$$

Il induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (\Lambda_k^n \times Y_\bullet) \amalg_{(\Lambda_k^n \times X_\bullet)} (\Delta[n] \times X_\bullet) & \xrightarrow{a} & Z_\bullet \\
 \downarrow j & & \downarrow p \\
 \Delta[n] \times Y_\bullet & \xrightarrow{b} & T_\bullet
 \end{array}$$

où

- $j$  est induit par  $\Lambda_k^n \subset \Delta[n]$  et par  $i : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ ;
- $a$  est obtenu en recollant le morphisme de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Lambda_k^n \times Y_\bullet, Z_\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Lambda_k^n, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet))$$

correspondant à  $u$  et le morphisme de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n] \times X_\bullet, Z_\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n], \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Z_\bullet))$$

correspondant à la première coordonnée de  $v$  (ces morphismes sont égaux sur  $\Lambda_k^n \times X_\bullet$  grâce à la commutativité du premier diagramme);

- Soit  $(x, y) \in \Delta[n]_n \times Y_n$ . Alors la deuxième coordonnée de  $v(x)$  est un élément  $v_2$  de  $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, T_\bullet)_n$ , et on peut donc former  $\mathrm{ev}(y, v_2) \in T_n$ . On pose  $b(x, y) = \mathrm{ev}(y, v_2)$ .

D'après le théorème 4.8.14 (et les propriétés des classes saturées),  $j$  est une extension anodine. Comme  $p$  est une fibration, il existe donc un morphisme  $c : \Delta[n] \times Y_\bullet \rightarrow Z_\bullet$  qui fait commuter le deuxième diagramme ci-dessus. D'après la proposition 4.7.3, ce morphisme correspond à un morphisme  $h : \Delta[n] \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet)$ , et il est facile de vérifier que ce morphisme fait commuter le premier diagramme.

Pour montrer la deuxième partie du théorème, on refait le même raisonnement en partant d'un carré commutatif où la flèche verticale de gauche est une inclusion  $\partial\Delta[n] \subset \Delta[n]$ . Si  $p$  est une fibration triviale, on a immédiatement un relèvement dans le deuxième carré. Si  $i$  est anodine, alors la flèche verticale de droite dans le deuxième carré (l'analogue de  $j$ ) est une extension anodine, donc on a aussi un relèvement.

□

En prenant  $X_\bullet = \emptyset$  resp.  $T_\bullet = *$  dans le théorème ci-dessus, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 4.9.2.** *Soit  $i : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  une injection et  $p : Z_\bullet \rightarrow T_\bullet$  une fibration.*

1. *Le morphisme  $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Z_\bullet) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, T_\bullet)$  est une fibration, qui est triviale si  $p : Z_\bullet \rightarrow T_\bullet$  est triviale.*
2. *Si  $Z_\bullet$  est fibrant, alors le morphisme  $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Z_\bullet)$  est une fibration, qui est triviale si  $i : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est anodine.*

**Exemple 4.9.3.** Soient  $X_\bullet$  et  $Y_\bullet$  deux ensembles simpliciaux, avec  $Y_\bullet$  un complexe de Kan. D'après le théorème 4.9.1,  $\underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(X_\bullet, Y_\bullet)$  est un complexe de Kan. Or la relation d'homotopie sur  $\text{Hom}_{\text{sEns}}(X_\bullet, Y_\bullet) = \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(X_\bullet, Y_\bullet)_0$  est celle définie au début de la section 4.4. On a vu (remarque 4.4.3) que c'est une relation d'équivalence, car  $\underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(X_\bullet, Y_\bullet)$  est un complexe de Kan. Ceci prouve la première partie du théorème 4.5.5.

Pour les homotopies relatives, le raisonnement est similaire. Soient  $Z_\bullet \subset X_\bullet$  un sous-ensemble simplicial et  $* \in Y_\bullet$  un point. En appliquant le théorème 4.9.1 à l'injection  $Z_\bullet \subset X_\bullet$  et à la fibration  $Y_\bullet \rightarrow *$ , on trouve que le morphisme canonique (de restriction)

$$\underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(X_\bullet, Y_\bullet) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(Z_\bullet, Y_\bullet) \times_{\underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(Z_\bullet, *)} \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(X_\bullet, *) = \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(Z_\bullet, Y_\bullet)$$

est une fibration, donc sa fibre  $K_\bullet$  au-dessus du point  $* \in \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(Z_\bullet, Y_\bullet)$  (qui est le morphisme constant  $\Delta[n] \times Z_\bullet \rightarrow *$  en degré  $n$ ) est un complexe de Kan. Or  $K_0$  est l'ensemble des morphismes  $(X_\bullet, Z_\bullet) \rightarrow (Y_\bullet, *)$ , et la relation d'homotopie sur  $K_0$  est la relation d'homotopie relative sur ces morphismes. Ceci prouve la deuxième partie du théorème 4.5.5.

**Définition 4.9.4.** Soit  $(X_\bullet, *)$  un complexe de Kan pointé. L'espace des chemins (de source  $*$ )  $PX_\bullet$  de  $X_\bullet$  est le produit fibré du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} PX_\bullet & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(\Delta[1], X_\bullet) \\ \downarrow & \square & \downarrow (\delta^0)^* \\ \Delta[0] & \xrightarrow{*} & \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(\Delta[0], X_\bullet) \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche vient par functorialité du morphisme  $\delta^0 : \Delta[0] \rightarrow \Delta[1]$  et la flèche du bas envoie le point  $\Delta[0]$  sur le morphisme constant en tout degré.

Pour tout  $n \geq 0$ ,  $(PX_\bullet)_n$  est simplement l'ensemble des morphismes  $\Delta[n] \times \Delta[1] \rightarrow X_\bullet$  qui envoient l'image de  $\text{id}_{\Delta[n]} \times \delta^0$  sur  $*$ .

En composant le morphisme canonique  $PX_\bullet \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(\Delta[1], X_\bullet)$  avec  $(\delta^1)^* : \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(\Delta[1], X_\bullet) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(\Delta[0], X_\bullet) = X_\bullet$ , on obtient un morphisme  $\pi : PX_\bullet \rightarrow X_\bullet$  (la destination du chemin).

**Proposition 4.9.5.** L'ensemble simplicial  $PX_\bullet$  est fibrant, le morphisme  $\pi : PX_\bullet \rightarrow X_\bullet$  est une fibration, et on a  $\pi_n(PX_\bullet, *) = 0$  pour tout  $n \geq 0$ . En fait, le morphisme  $PX_\bullet$  a la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les inclusions d'ensembles simpliciaux, c'est-à-dire que c'est une fibration triviale.

*Preuve.* Par le théorème 4.9.1,  $(\delta^i)^* : \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(\Delta[1], X_\bullet) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{sEns}}(\Delta[0], X_\bullet)$  est une fibration pour  $i = 0, 1$ . En particulier,  $PX_\bullet$  est fibrant.

De plus, comme  $\delta^i : \Delta[0] \rightarrow \Delta[1]$  est une extension anodine, le corollaire 4.9.2 dit que  $(\delta^i)^*$  a la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les injections d'ensembles simpliciaux. II

en est donc de même de  $PX_\bullet \rightarrow *$ . D'après la proposition 4.8.9, ceci implique que  $\pi_n(PX_\bullet, *)$  est trivial pour tout  $n \geq 0$ .

Enfin, on sait que le morphisme  $i^* : \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE}ns}(\Delta[1], X_\bullet) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE}ns}(\partial\Delta[1], X_\bullet)$  induit par l'inclusion  $i : \partial\Delta[1] \subset \Delta[1]$  est une fibration, grâce au théorème 4.9.1. Comme  $\partial\Delta[1] \simeq \Delta[0] \sqcup \Delta[0]$ , on a  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE}ns}(\partial\Delta[1], X_\bullet) \simeq X_\bullet \times X_\bullet$ , et le morphisme  $\pi : PX_\bullet \rightarrow X_\bullet$  est par définition le changement de base de  $i^*$  par le morphisme  $* \times \text{id}_{X_\bullet} : X_\bullet \rightarrow X_\bullet \times X_\bullet$ . C'est donc une fibration.

□

**Définition 4.9.6.** L'espace des lacets de  $X_\bullet$  (basés en  $*$ ) est la fibre  $\Omega X_\bullet$  du morphisme  $\pi : PX_\bullet \rightarrow X_\bullet$  au-dessus de  $* \in X_\bullet$ .

*Remarque 4.9.7.* Pour tout  $n \geq 0$ ,  $(\Omega X_\bullet)_n$  est l'ensemble des morphismes  $f : \Delta[n] \times \Delta[1] \rightarrow X_\bullet$  qui envoient  $\Delta[n] \times \partial\Delta[1]$  dans  $*$ .

En combinant la proposition ci-dessus avec la suite exacte longue d'une fibration (théorème 4.6.4), on obtient :

**Corollaire 4.9.8.** L'ensemble simplicial  $\Omega X_\bullet$  est fibrant, et on a des isomorphismes canoniques  $\pi_{n+1}(X_\bullet, *) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\Omega X_\bullet, *)$  pour tout  $n \geq 0$ .

La structure de "groupeoïde à homotopie près"<sup>25</sup> sur  $\Omega X_\bullet$  (venant du facteur  $\Delta[1]$ ) définit une deuxième multiplication  $\star$  sur  $\pi_n(\Omega X_\bullet, *)$  (pour tout  $n \geq 0$ ) telle qu'on ait, si  $n \geq 1$ , pour tous  $a, b, c, d \in \pi_n(\Omega X_\bullet, *)$ ,

$$(a \star b)(c \star d) = (ab) \star (cd).$$

Ceci implique  $\pi_n(\Omega X_\bullet, *)$  est un groupe commutatif (avec les deux multiplications égales) si  $n \geq 1$ , et donc que le groupe  $\pi_n(X_\bullet, *)$  est commutatif si  $n \geq 2$ . Voir [8] lemme 7.6 (qui ne donne pas beaucoup plus de détails), ou les sections 4.2-4.3 de [12].

Voici un moyen de construire la "multiplication à homotopie près" sur  $\Omega X_\bullet$ . On considère les inclusions  $\Delta[1] \xrightarrow{\delta^1} \Delta[2] \supset \Lambda_1^2$  (telles que la réunion de leurs images est  $\partial\Delta[2]$ ). Elles donnent la première ligne du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE}ns}(\Delta[1], X_\bullet) & \longleftarrow & \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE}ns}(\Delta[2], X_\bullet) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE}ns}(\Lambda_1^2, X_\bullet) \\ \downarrow (\delta^0)^* \times (\delta^1)^* & & \downarrow (\delta^0)^* \times (\delta^1)^* \times (\delta^2)^* & & \downarrow \\ X_\bullet \times X_\bullet & \xleftarrow{p_{02}} & X_\bullet \times X_\bullet \times X_\bullet & \xlongequal{\quad} & X_\bullet \times X_\bullet \times X_\bullet \end{array}$$

où  $p_{02}(x_0, x_1, x_2) = (x_0, x_2)$ . Comme  $\Lambda_1^2 \subset \Delta[2]$ , le corollaire 4.9.2 dit que  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE}ns}(\Delta[2], X_\bullet) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE}ns}(\Lambda_1^2, X_\bullet)$  est une fibration triviale (c'est-à-dire a la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les inclusions d'ensembles simpliciaux). On voit facilement qu'une fibration triviale induit des isomorphismes sur les  $\pi_n$  (avec n'importe quel point base).

D'autre part, si on considère les morphismes de  $*$  dans  $X_\bullet^2$  et  $X_\bullet^3$  qui envoient  $*$  sur le point base fixé de  $X_\bullet$  (dans tous les facteurs), alors, par définition

$$\Omega X_\bullet = \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE}ns}(\Delta[1], X_\bullet) \times_{X_\bullet \times X_\bullet} *$$

---

25. En langage technique,  $\Omega X_\bullet$  est un " $H$ -espace", et même un " $A_\infty$ -espace". Voir par exemple la définition dans le nLab : [18, A-infinity-space].

et

$$\Omega X_{\bullet} \times \Omega X_{\bullet} = \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE ns}}(\Lambda_1^2, X_{\bullet}) \times_{X_{\bullet} \times X_{\bullet} \times X_{\bullet}} *$$

Si on note<sup>26</sup>

$$\Omega_2 X_{\bullet} = \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE ns}}(\Delta[2], X_{\bullet}) \times_{X_{\bullet} \times X_{\bullet} \times X_{\bullet}} *$$

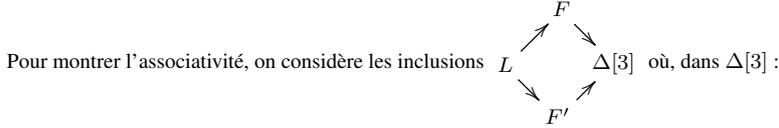
alors le diagramme ci-dessus donne des morphismes

$$\Omega X_{\bullet} \longleftarrow \Omega_2 X_{\bullet} \longrightarrow \Omega X_{\bullet} \times \Omega X_{\bullet},$$

dont le deuxième est une fibration triviale. En particulier, on obtient pour tout  $n$  des morphismes

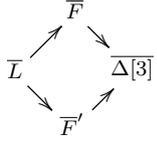
$$\pi_n(\Omega X_{\bullet}, *) \longleftarrow \pi_n(\Omega_2 X_{\bullet}, *) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\Omega X_{\bullet} \times \Omega X_{\bullet}, *) = \pi_n(\Omega X_{\bullet}, *) \times \pi_n(\Omega X_{\bullet}, *)$$

qui sont des morphismes de groupes si  $n \geq 1$  (puisque'ils viennent par functorialité de morphismes d'ensembles simpliciaux), d'où une loi de composition  $\star$  sur  $\pi_n(\Omega X_{\bullet}, *)$ . On note que  $\star$  redonne la multiplication habituelle sur  $\pi_1(X_{\bullet}, *) = \pi_0(\Omega X_{\bullet}, *)$ .

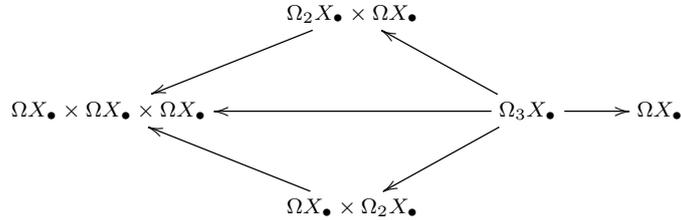


- $L$  est l'union des trois faces de dimension 1 joignant les points 0 et 1, les points 1 et 2, et les points 2 et 3;
- $F$  est l'union de la face de dimension 2 de sommets 0, 1, 2 et de la face de dimension 1 joignant les points 2 et 3;
- $F'$  est l'union de la face de dimension 1 joignant les points 0 et 1 et de la face de dimension 2 de sommets 1, 2, 3.

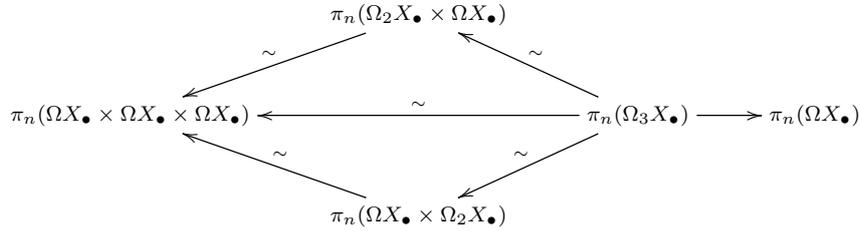
On voit facilement que toutes ces extensions sont anodines. En identifiant tous les sommets de  $\Delta[3]$ , on obtient un autre diagramme d'inclusions



puis les fibres au-dessus de  $*$  des morphismes canoniques  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE ns}}(\cdot, X_{\bullet}) \rightarrow X_{\bullet}$  (donnés par la restriction au point base), et en notant  $\Omega_3 X_{\bullet}$  le résultat de cette opération pour  $\overline{\Delta[3]}$ , on obtient le losange de gauche du diagramme commutatif suivant



où toutes les flèches sauf  $\Omega_3 X_{\bullet} \rightarrow \Omega X_{\bullet}$  sont des fibrations triviales, et où  $\Omega_3 X_{\bullet} \rightarrow \Omega X_{\bullet}$  est donnée par l'inclusion de la face de dimension 1 reliant 0 à 3 dans  $\Delta[3]$ . En prenant les  $\pi_n$  (et en omettant les points bases pour alléger la notation), on trouve un diagramme commutatif



L'application  $\pi_n(\Omega X_{\bullet})^3 \rightarrow \pi_n(\Omega X_{\bullet})$  que l'on obtient en suivant le haut du diagramme est (par définition de la loi de composition  $\star$ )  $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha \star \beta) \star \gamma$ , et celle que l'on obtient en passant en bas est  $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha \star (\beta \star \gamma)$ . Ces deux applications sont donc égales.

Évidemment, on pourrait s'amuser à jouer au même jeu avec des simplexes de dimension supérieure, pour construire de manière plus conceptuelle (mais moins élémentaire) la multiplication sur  $\pi_n(X_{\bullet}, *)$  et montrer qu'elle est associative.

26. Notation tirée du chapeau et non standard.

**Exemple 4.9.9.** (Retour sur la suite exacte longue d'une fibration.) En utilisant l'espace des lacets, on va donner une construction plus canonique de la suite exacte longue d'une fibration (voir le théorème 4.6.4).

On considère donc une fibration  $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$ , avec  $Y_{\bullet}$  fibrant, et on fixe des points  $*$  dans  $X_{\bullet}$  et  $Y_{\bullet}$  tels que  $f(*) = *$ . On note  $F_{\bullet}$  la fibre de  $f$  au-dessus de  $*$  dans  $Y_{\bullet}$ . On veut construire un morphisme  $\Omega Y_{\bullet} \rightarrow F_{\bullet}$  qui induira (via l'isomorphisme  $\pi_n(\Omega Y_{\bullet}, *) \simeq \pi_{n+1}(Y_{\bullet}, *)$ ) toutes les applications  $\pi_{n+1}(Y_{\bullet}, *) \rightarrow \pi_n(F_{\bullet}, *)$  introduites au-dessus du théorème 4.6.4.<sup>27</sup>

L'idée est assez simple. Rappelons que  $(\Omega Y_{\bullet})_n$  est l'ensemble des  $u : \Delta[n] \times \Delta[1] \rightarrow Y_{\bullet}$  qui envoient  $\Delta[n] \times \partial\Delta[1]$  sur  $*$ . Pour une telle  $u$ , on considère le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \Delta[n] \times \Delta[0] & \xrightarrow{*} & X_{\bullet} \\ \text{id}_{\Delta[n]} \times (\delta^0)^* \downarrow & \nearrow v & \downarrow f \\ \Delta[n] \times \Delta[1] & \xrightarrow{u} & Y_{\bullet} \end{array}$$

Comme l'inclusion à droite est anodine, il existe un morphisme diagonal  $v$  faisant commuter le diagramme. Comme  $f \circ v = u$  envoie  $\Delta[n] \times \partial\Delta[1]$  sur  $*$ , le morphisme  $v$  lui-même envoie  $\Delta[n] \times \partial\Delta[1]$  dans  $F_{\bullet}$ , donc on a  $v \circ (\delta^1)^* : \Delta[n] \rightarrow F_{\bullet}$ , correspondant à un élément de  $F_n$ . Le problème est que cet élément dépend du choix de  $v$ , et qu'il faut montrer que l'on peut faire tous les choix de manière cohérente. Il vaut donc mieux procéder de la manière suivante.

On définit  $T_{\bullet}$  par le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} T_{\bullet} & \longrightarrow & X_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[1], Y_{\bullet}) & \xrightarrow{(\delta^0)^*} & Y_{\bullet} \end{array}$$

Moralement,  $T_{\bullet}$  est l'espace des chemins tracés sur  $Y_{\bullet}$ , de source  $*$ , munis d'un relèvement de la source dans  $X_{\bullet}$  (donc d'un point de  $F_{\bullet}$ ). Comme  $(\delta^0)^* : \Delta[0] \rightarrow \Delta[1]$  est anodine, le théorème 4.9.1 implique que le morphisme canonique  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[1], X_{\bullet}) \rightarrow T_{\bullet}$  (qui envoie un chemin sur  $X_{\bullet}$  sur le couple formé de son image dans  $Y_{\bullet}$  et de son origine dans  $X_{\bullet}$ ) est une fibration triviale. En utilisant l'inclusion  $\Omega Y_{\bullet} \subset \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[1], Y_{\bullet})$  et le morphisme constant  $*$  :  $\Omega Y_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet}$ , on obtient un morphisme  $\Omega Y_{\bullet} \rightarrow T_{\bullet}$  (qui envoie un lacet sur lui-même, muni du relèvement de son origine donné par  $*$  dans  $X_{\bullet}$ ). On définit  $P'_{\bullet}$  par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} P'_{\bullet} & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[1], X_{\bullet}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega Y_{\bullet} & \longrightarrow & T_{\bullet} \end{array}$$

27. Comme la preuve de l'isomorphisme  $\pi_n(\Omega Y_{\bullet}, *) \simeq \pi_{n+1}(Y_{\bullet}, *)$  que j'ai donnée utilise la suite exacte longue d'homotopie, on a l'impression de tourner en rond, mais en fait on peut (et ce serait mieux) montrer cet isomorphisme directement, voir la section 4.2 de [12].

Comme la flèche verticale de droite est une fibration triviale, il en est de même de  $P'_\bullet \rightarrow \Omega Y_\bullet$ . Moralement,  $P'_\bullet$  est l'espace des chemins tracés sur  $X_\bullet$ , de source  $*$  et dont l'image dans  $Y_\bullet$  est un lacet; le but d'un tel chemin est donc dans  $F_\bullet$ . En termes précis, ceci signifie que le morphisme  $(\delta^1)^* : \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE}ns}(\Delta[1], X_\bullet) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE}ns}(\Delta[0], X_\bullet) = X_\bullet$  envoie  $P'_\bullet$  dans  $F_\bullet$ . En composant cette flèche avec une section de la fibration triviale  $P'_\bullet \rightarrow \Omega Y_\bullet$  (qui existe par la proposition 4.8.10), on obtient la flèche  $\Omega Y_\bullet \rightarrow F_\bullet$  cherchée. Cette flèche n'est pas unique, mais elle l'est modulo homotopie.<sup>28</sup>

On peut continuer le processus ci-dessus et obtenir une suite de morphismes

$$\cdots \rightarrow \Omega^2 Y_\bullet \rightarrow \Omega F_\bullet \rightarrow \Omega X_\bullet \rightarrow \Omega Y_\bullet \rightarrow F_\bullet \rightarrow X_\bullet \rightarrow Y_\bullet.$$

On obtient la suite exacte longue d'homotopie en appliquant le foncteur  $\pi_0$  à la suite ci-dessus. Bien sûr, il faut encore vérifier que c'est bien une suite exacte; voir par exemple le théorème 4.4.1 de [12].<sup>29</sup>

## 4.10 Quelques résultats difficiles

Il y a au moins deux manières de prouver les propriétés fondamentales de la catégorie  $\mathbf{sE}ns$  : on peut passer par la réalisation topologique (c'est le point de vue utilisé dans [10] et [8]) ou tout faire avec des ensembles simpliciaux (comme dans [12]). Dans les deux cas, l'intuition vient de la topologie, et il faut encore travailler beaucoup plus qu'on ne l'a fait jusqu'ici. Je vais donner des résultats venant des deux approches, avec des références mais sans preuves.

**Théorème 4.10.1.** (Quillen, voir [8] théorème I.10.10) Soit  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  une fibration de Kan dans  $\mathbf{sE}ns$ . Alors  $|f| : |X_\bullet| \rightarrow |Y_\bullet|$  est une fibration de Serre.

**Corollaire 4.10.2.** (théorème de Milnor, cf. par exemple [8] proposition I.11.1) Pour tout complexe de Kan  $X_\bullet$  et tout point  $* \in X_\bullet$ , le morphisme canonique  $X_\bullet \rightarrow \text{Sing}(|X_\bullet|)$  induit des isomorphismes  $\pi_n(X_\bullet, *) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\text{Sing}(|X_\bullet|), *)$ .

*Preuve.* On raisonne par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 0$ , il est facile de prouver le résultat directement. On suppose maintenant que  $n \geq 0$  et que l'on connaît le résultat pour tous les complexes de Kan pointés et tous les  $i \leq n$ . Soit  $*$  un point de  $X_\bullet$ , on considère la fibration  $PX_\bullet \rightarrow X_\bullet$  et sa fibre  $\Omega X_\bullet$  au-dessus de  $*$  comme dans la section précédente. On a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{n+1}(PX_\bullet, *) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(X_\bullet, *) & \longrightarrow & \pi_n(\Omega X_\bullet, *) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{n+1}(\text{Sing}(|PX_\bullet|), *) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(\text{Sing}(|X_\bullet|), *) & \longrightarrow & \pi_n(\text{Sing}(|\Omega X_\bullet|), *) \end{array}$$

28. Expliquer ?

29. problème de signe dans  $\Omega X_\bullet \rightarrow \Omega Y_\bullet$  ?

D'après l'hypothèse de récurrence, la dernière flèche verticale est un isomorphisme. On sait aussi que  $\pi_{n+1}(PX_{\bullet}, *)$  est trivial. Il suffit donc de montrer qu'il en est de même de  $\pi_{n+1}(\text{Sing}(|PX_{\bullet}|), *)$ . Si on sait montrer que l'identité de  $PX_{\bullet}$  et le morphisme  $PX_{\bullet} \rightarrow * \subset PX_{\bullet}$  sont homotopes, alors on a une propriété similaire pour leurs réalisations géométriques, donc  $|PX_{\bullet}|$  se contracte sur un point, donc  $\pi_{n+1}(\text{Sing}(|PX_{\bullet}|), *) = \pi_{n+1}(|PX_{\bullet}|, *) = 0$ . Or on sait que  $PX_{\bullet} \rightarrow *$  est une fibration triviale par la proposition 4.9.5, donc on en déduit l'existence d'un morphisme diagonal  $h$  faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 (\Delta[0] \times \Delta[1]) \amalg (PX_{\bullet} \times \partial\Delta[1]) & \xrightarrow{* \sqcup (\text{id}_{PX_{\bullet}}, *)} & PX_{\bullet} \\
 \downarrow & \searrow h & \downarrow * \\
 PX_{\bullet} \times \Delta[1] & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \Delta[0]
 \end{array}$$

Ce morphisme  $h$  est l'homotopie cherchée. □

En utilisant ce corollaire et le point (3) de l'exemple 4.5.11, on obtient les isomorphismes  $\pi_n(X_{\bullet}, *) \xrightarrow{\sim} \pi_n(|X_{\bullet}|, *)$  du théorème 4.5.10.

Grâce à ce résultat, on peut définir les groupes d'homotopie pour tous les ensembles simpliciaux de manière cohérente avec la définition précédente pour les complexes de Kan.

**Définition 4.10.3.** Soit  $(X_{\bullet}, *)$  un ensemble simplicial pointé. Pour tout  $n \geq 0$ , on pose

$$\pi_n(X_{\bullet}, *) = \pi_n(|X_{\bullet}|, *).$$

**Définition 4.10.4.** 1. Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme dans **Top**. On dit que  $f$  est une *équivalence faible* si  $f$  induit une bijection  $\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y)$  et si, pour tout point  $x \in X$  et tout  $n \geq 1$ , le morphisme de groupes  $\pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$  induit par  $f$  est un isomorphisme.

2. Soit  $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$  un morphisme dans **sEns**. On dit que  $f$  est une *équivalence faible* si  $f$  induit une bijection  $\pi_0(X_{\bullet}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y_{\bullet})$  et si, pour tout point  $x \in X_{\bullet}$  et tout  $n \geq 1$ , le morphisme de groupes  $\pi_n(X_{\bullet}, x) \rightarrow \pi_n(Y_{\bullet}, f(x))$  induit par  $f$  est un isomorphisme.

On note  $\text{Ho}(\mathbf{Top})$  (resp.  $\text{Ho}(\mathbf{sEns})$ ) la localisation de la catégorie **Top** (resp.  $\sim \mathbf{Ens}$ ) par rapport à la classe des équivalences faibles (c'est-à-dire la catégorie que l'on obtient en inversant formellement toutes les équivalences faibles). Noter l'analogie avec la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne.

**Théorème 4.10.5.** (Quillen, voir [8] théorème I.11.4) Les foncteurs  $|\cdot| : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{Top}$  et  $\text{Sing} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sEns}$  induisent des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre  $\text{Ho}(\mathbf{sEns}) \rightarrow \text{Ho}(\mathbf{Top})$  et  $\text{Ho}(\mathbf{Top}) \rightarrow \text{Ho}(\mathbf{sEns})$ .

Dans la pratique, il n'est pas très pratique de travailler avec une catégorie localisée comme  $\text{Ho}(\mathbf{sEns})$ ,  $\text{Ho}(\mathbf{Top})$  (ou une catégorie dérivée). Heureusement, on a le théorème suivant (voir 3.1 pour l'analogie de ce théorème pour une catégorie dérivée).

**Théorème 4.10.6.** 1. Soit  $\mathbf{Kan}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{sEns}$  dont les objets sont les complexes de Kan. Alors l'inclusion  $\mathbf{Kan} \subset \mathbf{sEns}$  induit une équivalence de catégories  $\mathbf{Kan}/\sim \xrightarrow{\sim} \text{Ho}(\mathbf{sEns})$ , où  $\mathbf{Kan}/\sim$  est la catégorie qui a les mêmes objets que  $\mathbf{Kan}$  et dont les Hom sont les Hom dans  $\mathbf{Kan}$  modulo la relation d'homotopie.

2. Soit  $\mathbf{CW}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Top}$  dont les objets sont les CW-complexes. Alors l'inclusion  $\mathbf{CW} \subset \mathbf{Top}$  induit une équivalence de catégories  $\mathbf{CW}/\sim \xrightarrow{\sim} \text{Ho}(\mathbf{Top})$ , où  $\mathbf{CW}/\sim$  est la catégorie qui a les mêmes objets que  $\mathbf{CW}$  et dont les Hom sont les Hom dans  $\mathbf{CW}$  modulo la relation d'homotopie.

Un morphisme  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  entre complexes de Kan est appelé une *équivalence d'homotopie* s'il existe  $g : Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$  tel que  $f \circ g$  soit homotope à  $\text{id}_{Y_\bullet}$  et que  $g \circ f$  soit homotope à  $\text{id}_{X_\bullet}$ . Le théorème ci-dessus contient en particulier le résultat que toute équivalence faible entre complexes de Kan est une équivalence d'homotopie. Voici quelques autres propriétés non triviales des notions introduites jusqu'ici :

1. Une fibration est triviale si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie.
2. Une cofibration (= injection) est triviale (=anodine) si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie.
3. Un morphisme d'ensembles simpliciaux est injectif si et seulement s'il a la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations.
4. Un morphisme  $X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est une équivalence faible si et seulement si, pour tout complexe de Kan  $Z_\bullet$ , le morphisme canonique  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, Z_\bullet) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Z_\bullet)$  est une équivalence d'homotopie. (On peut ainsi définir les équivalences faibles sans utiliser la réalisation géométrique.)

## 5 Foncteurs dérivés

### 5.1 Définition et exemples

**Définition 5.1.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Une *classe d'équivalences faibles* dans  $\mathcal{C}$  est une classe  $W$  de morphismes de  $\mathcal{C}$  telle que :

- Tous les isomorphismes sont dans  $W$ .
- La classe  $W$  est stable par passage à tout rétracte.
- Si  $f$  et  $g$  sont des morphismes composables de  $\mathcal{C}$  et si deux des éléments de  $\{f, g, g \circ f\}$  sont dans  $W$ , alors il en est de même du troisième.

On note alors  $\text{Ho}(\mathcal{C})$  ou  $\text{Ho}(\mathcal{C}, W)$  la catégorie localisée de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $W$ , et on l'appelle la *catégorie homotopique* de  $\mathcal{C}$ . Elle est munie d'un foncteur  $Q_C : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$  et a la propriété universelle suivante : pour toute catégorie  $\mathcal{D}$ , la restriction  $\mathbf{Fonc}(\text{Ho}(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Fonc}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  le long de  $Q_C$  induit une équivalence de  $\mathbf{Fonc}(\text{Ho}(\mathcal{C}), \mathcal{D})$  avec la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Fonc}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  dont les objets sont les foncteurs  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  qui envoient tous les éléments de  $W$  sur des isomorphismes dans  $\mathcal{D}$ .

On suppose toujours qu'on a une catégorie  $\mathcal{C}$  munie d'une classe d'équivalences faibles  $W$ , et on considère un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .

Si  $F(W)$  est composé d'isomorphismes dans  $\mathcal{D}$ , alors la propriété universelle de  $\text{Ho}(\mathcal{C})$  implique qu'on a un foncteur  $\text{Ho}(F) : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$  (unique à isomorphisme unique près) qui fait commuter le diagramme suivant (à isomorphisme fonctoriel près)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \downarrow & \nearrow \text{Ho}(F) & \\ \text{Ho}(\mathcal{C}) & & \end{array}$$

On appelle ce  $\text{Ho}(F)$  le *foncteur dérivé* de  $F$ .

En général, on définit les foncteurs dérivés à gauche et à droite de  $F$  de la manière suivante.<sup>30</sup>

- Définition 5.1.2.** 1. Le *foncteur dérivé (total) de  $F$  à gauche* (s'il existe) est l'extension de Kan à droite de  $F$  le long de  $Q_C$ , c'est-à-dire que c'est un foncteur  $LF : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$  muni d'un morphisme fonctoriel  $\varepsilon_F : LF \circ Q_C \rightarrow F$  tel que, pour tout foncteur  $G : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$  et tout morphisme fonctoriel  $\varphi : G \circ Q_C \rightarrow F$ , il existe un unique morphisme fonctoriel  $u : G \rightarrow LF$  tel que  $\varphi = \varepsilon_F \circ (uQ_C)$ .
2. Le *foncteur dérivé (total) de  $F$  à droite* (s'il existe) est l'extension de Kan à gauche de  $F$  le long de  $Q_C$ , c'est-à-dire que c'est un foncteur  $RF : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$  muni d'un morphisme fonctoriel  $\eta_F : F \rightarrow RF \circ Q_C$  tel que, pour tout foncteur  $G : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$  et tout morphisme fonctoriel  $\varphi : F \rightarrow G \circ Q_C$ , il existe un unique morphisme fonctoriel  $u : RF \rightarrow G$  tel que  $\varphi = (uQ_C) \circ \eta_F$ .

En pratique, la catégorie  $\mathcal{D}$  est souvent munie elle aussi d'une classe d'équivalences faibles, et on applique la définition ci-dessus au foncteur  $Q_D \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{D})$ , pour obtenir des foncteurs dérivés  $\text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{D})$ .

À ce niveau de généralité, le foncteur  $F$  n'a pas de raison particulière d'avoir un foncteur dérivé à droite ou à gauche. Voici un truc pour savoir de quel côté chercher à dériver en pratique : Si  $F$  commute aux limites projectives (par exemple si  $F$  est un adjoint à droite), alors il aura plutôt tendance à avoir un foncteur dérivé à droite. Dualement, si  $F$  commute aux limites inductives (par exemple si c'est un adjoint à gauche), alors il aura plutôt tendance à avoir un foncteur dérivé à gauche.

30. Il y a plusieurs définitions possibles des foncteurs dérivés. J'ai choisi celle qui m'arrange le plus.

**Exemple 5.1.3.** Soit  $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  un foncteur exact à gauche entre catégories abéliennes. On suppose que  $\mathcal{A}$  a assez d'injectifs. Il définit de manière évidente un foncteur  $F^* : C^-(\mathcal{A}) \longrightarrow C^-(\mathcal{B}) \longrightarrow D^-(\mathcal{B})$  (on envoie un complexe  $C^*$  sur le complexe  $F(C^*)$ ; le  $-$  signifie qu'on utilise des complexes bornés inférieurement). Ce foncteur a un foncteur dérivé à droite, qui est donné par la formule habituelle : si  $C^* \in \text{Ob}(C^-(\mathcal{A}))$ , on choisit un quasi-isomorphisme  $C^* \longrightarrow D^*$  avec  $D^*$  un complexe d'objets injectifs, et on pose  $RF(C^*) = F^*(D^*)$ . À quasi-isomorphisme près, ceci ne dépend pas du choix de  $D^*$ .

Une autre manière de dire la même chose est que l'on utilise l'équivalence de catégories  $D^-(\mathcal{A}) \simeq C^-(\mathcal{I})/\sim$ , où  $\mathcal{I}$  est la sous-catégorie pleine des objets injectifs de  $\mathcal{A}$  et  $\sim$  est la relation d'homotopie sur les morphismes de  $C(\mathcal{A})$ . Le foncteur  $RF : C^-(\mathcal{I})/\sim \longrightarrow D^-(\mathcal{B})$  est alors simplement donné par la restriction de  $F^*$  à  $C^-(\mathcal{I})$ .

Si  $A$  est un objet de  $\mathcal{A}$  (vu comme un complexe concentré en degré 0), alors on peut trouver un quasi-isomorphisme  $A \longrightarrow I^\bullet$  avec  $I^\bullet$  un complexe d'objets injectifs concentré en degré  $\leq 0$  (un tel quasi-isomorphisme est simplement une résolution injective de  $A$ ). En utilisant la formule  $RF(A) = F(I^\bullet)$  et le fait que  $F$  est exact à gauche, on voit que  $H^0 RF(A) = F(A)$ , comme on s'y attend.

**Exemple 5.1.4.** Le cas d'un foncteur exact à droite entre catégorie abéliennes (ayant assez d'objets projectifs) est similaire. Le foncteur induit sur les catégories  $D^+$  a un foncteur dérivé total à gauche, qui est défini en utilisant le fait que, si  $\mathcal{A}$  est une catégorie qui a assez d'objets projectifs, alors  $D^+(\mathcal{A}) \simeq C^+(\mathcal{P})/\sim$ , où  $\mathcal{P}$  est la sous-catégorie pleine des objets projectifs de  $\mathcal{A}$  et  $\sim$  est la relation d'homotopie sur les morphismes de  $C(\mathcal{A})$ .

**Exemple 5.1.5.** 1. Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. Le foncteur  $F = \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, \cdot) : \mathbf{sEns} \longrightarrow \mathbf{Ens}$  commute aux limites projectives, donc on va essayer de le dériver à droite. Pour cela, il est utile de se souvenir de l'équivalence de catégories  $\mathbf{Kan}/\sim \simeq \text{Ho}(\mathbf{sEns})$  du théorème 4.10.6. On définit  $RF : \mathbf{Kan}/\sim \longrightarrow \mathbf{Ens}$  par  $RF(Y_\bullet) = \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Y_\bullet)/\sim$ , où  $\sim$  est la relation d'homotopie (qui est une relation d'équivalence car  $Y_\bullet$  est fibrant). Le morphisme fonctoriel  $F \longrightarrow RF \circ Q_{\sim \mathbf{Ens}}$  est simplement donné par l'application de passage au quotient  $\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Y_\bullet) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Y_\bullet)/\sim$ .

En pratique, si on veut calculer  $RF(Y_\bullet)$  pour  $Y_\bullet$  pas forcément fibrant, on remplace  $Y_\bullet$  par un complexe de Kan faiblement équivalent à  $Y_\bullet$ , par exemple  $\text{Sing}(|Y_\bullet|)$ .

2. Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. Le foncteur  $G = \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\cdot, X_\bullet) : (\mathbf{sEns})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Ens}$  commute aux limites projectives, donc on va essayer de le dériver à droite. On voudrait poser  $RG(Y_\bullet) = \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, X_\bullet)/\sim$  comme dans l'exemple précédent, mais cela ne marche pas car  $X_\bullet$  n'est pas forcément fibrant. On considère donc le morphisme canonique  $\alpha : X_\bullet \longrightarrow \text{Sing}(|X_\bullet|)$ , et on définit  $RF$  par  $RF(Y_\bullet) = \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(Y_\bullet, \text{Sing}(|X_\bullet|))/\sim$ . Le morphisme fonctoriel  $F \longrightarrow RF \circ Q_{\mathbf{sEns}}$  est donné par composition par  $\alpha$  puis passage au quotient. On peut voir que  $RF$  donne bien un foncteur sur  $\text{Ho}(\mathbf{sEns})$  directement ou en utilisant l'équivalence de catégories  $\mathbf{Kan}/\sim \simeq \text{Ho}(\mathbf{sEns})$  du théorème 4.10.6.

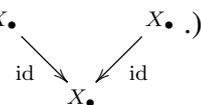
**Exemple 5.1.6.** On considère la catégorie  $\mathcal{C}$  des diagrammes d'ensembles

simpliciaux  $C_\bullet \rightarrow A_\bullet \leftarrow B_\bullet$ , où les morphismes sont les triplets de flèches



$(A_\bullet \rightarrow A'_\bullet, B_\bullet \rightarrow B'_\bullet, C_\bullet \rightarrow C'_\bullet)$  faisant commuter le diagramme évident, et les équivalences faibles sont les triplets dont les trois entrées sont des équivalences faibles. On veut dériver à droite le foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{sEns}$  qui envoie un diagramme sur son produit fibré, ou plutôt le composé de  $F$  et de  $Q : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{sEns})$ . (Noter que  $F$  est l'adjoint à droite du

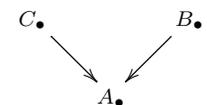
foncteur  $\mathbf{sEns} \rightarrow \mathcal{C}$  qui envoie  $X_\bullet$  sur le diagramme  $X_\bullet \rightarrow X_\bullet \leftarrow X_\bullet$ .)



Le foncteur  $RF = R(Q \circ F)$  s'appelle le *produit fibré homotopique*, on note souvent  $B_\bullet \times_{A_\bullet}^h C_\bullet$  sa valeur sur un diagramme comme ci-dessus. Attention, ce n'est pas le produit fibré dans la catégorie homotopique,<sup>31</sup> et en fait il n'est pas facile de donner une propriété universelle caractérisant  $B_\bullet \times_{A_\bullet}^h C_\bullet$ . (En tout cas sans parler de  $\infty$ -catégories ou au moins de catégories de modèles simpliciales.)

Voici comment calculer le produit fibré homotopique. On définit d'abord une résolution

fonctorielle  $d \rightarrow R(d)$  d'un objet  $d$  de  $\mathcal{C}$  : Si  $d = C_\bullet \rightarrow A_\bullet \leftarrow B_\bullet$ , on pose



$A_\bullet \xrightarrow{i} A'_\bullet = \text{Sing}(|A_\bullet|)$ , on note  $B_\bullet \xrightarrow{i_1} B'_\bullet \xrightarrow{p_1} A'_\bullet$  la factorisation fonctorielle de  $B_\bullet \rightarrow A_\bullet \rightarrow A'_\bullet$  du premier point du théorème 4.8.11 (donc  $i_1$  est anodine et  $p_1$  est une fibration), et on note  $C_\bullet \xrightarrow{i_2} C'_\bullet \xrightarrow{p_2} A'_\bullet$  la factorisation fonctorielle de  $C_\bullet \rightarrow A_\bullet \rightarrow A'_\bullet$  donnée par le même résultat. On pose

$$R(d) = \begin{array}{ccc} C'_\bullet & & B'_\bullet \\ & \searrow p_2 & \swarrow p_1 \\ & A'_\bullet & \end{array}$$

et on prend pour  $d \rightarrow R(d)$  le morphisme donné par  $(i, i_1, i_2)$ . Noter que ce morphisme est une équivalence faible. On pose alors

$$RF(d) = B_\bullet \times_{A_\bullet}^h C_\bullet = B'_\bullet \times_{A'_\bullet} C'_\bullet = (Q \circ F)(R(d)).$$

31. D'abord, cette assertion n'a pas de sens, car il s'agit de foncteurs définis sur des catégories différentes (la catégorie homotopique des diagrammes et la catégorie des diagrammes dans la catégorie homotopique), et en plus il n'y a pas de raison a priori que les produits fibrés existent dans la catégorie homotopique. En général, on a juste une flèche du produit fibré homotopique vers le produit fibré dans la catégorie homotopique (s'il existe), donnée par la propriété universelle du produit fibré.

Il y a trois choses à vérifier :

- (1) Ceci définit bien un foncteur sur  $\text{Ho}(\mathcal{C})$ , c'est-à-dire que  $RF$  envoie les équivalences faibles de  $\mathcal{C}$  sur des équivalences faibles de  $\mathbf{sEns}$ . (Ce qui est faux pour  $F$ .) Cela résulte du fait que le produit fibré d'une équivalence faible entre objets fibrants et d'une fibration est une équivalence faible.<sup>32</sup>
- (2) On a un morphisme fonctoriel  $\eta : F \longrightarrow RF \circ Q$  : ceci vient du morphisme  $\text{id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow R$ .
- (3) Si  $G : \text{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ho}(\mathbf{sEns})$  est un foncteur, tout morphisme fonctoriel  $\varphi : F \longrightarrow G \circ Q$  vient d'un unique morphisme fonctoriel  $u : RF \longrightarrow G$ . En effet, si  $d$  est un objet de  $\text{Ho}(\mathcal{C})$  (c'est-à-dire de  $\mathcal{C}$ ), le morphisme  $d \longrightarrow R(d)$  dans  $\mathcal{C}$  devient un isomorphisme dans  $\text{Ho}(\mathcal{C})$ , d'où des morphismes, fonctoriels en  $d$ ,

$$G(d) \xrightarrow{\sim} G(R(d)) \xrightarrow{\varphi} (Q \circ F)(R(d)) = RF(d).$$

Ceci donne le morphisme fonctoriel  $u$ .

*Remarque 5.1.7.* En fait, on peut utiliser une résolution plus simple pour construire le produit fibré homotopique (il suffit de prendre une factorisation fonctorielle  $B_{\bullet} \xrightarrow{i'} B'_{\bullet} \xrightarrow{p'} A_{\bullet}$  avec  $i'$  anodine et  $p'$  une fibration, et de remplacer  $B_{\bullet} \longrightarrow A_{\bullet}$  par  $p' : B'_{\bullet} \longrightarrow A_{\bullet}$ . Ceci va suffire car  $\mathbf{sEns}$  a une propriété spéciale (précisément, celle d'être propre à droite comme catégorie de modèles, c'est-à-dire que le produit fibré d'une équivalence faible générale et d'une fibration est une équivalence faible ; mais cette propriété est non triviale.)<sup>33</sup>

**Exemple 5.1.8.** Si  $f : X_{\bullet} \longrightarrow Y_{\bullet}$  est un morphisme de  $\mathbf{sEns}$  et  $*$  est un point de  $Y_{\bullet}$ , la *fibre homotopique*  $F_{\bullet}$  de  $f$  au-dessus de  $*$  est par définition le produit fibré homotopique  $* \times_{Y_{\bullet}}^h X_{\bullet}$ . Elle est isomorphe à la fibre ordinaire (dans  $\text{Ho}(\mathbf{sEns})$ ) si  $f$  est une fibration.

Notons encore  $\Omega : \text{Ho}(\mathbf{sEns}) \longrightarrow \text{Ho}(\mathbf{sEns})$  le foncteur  $X_{\bullet} \longrightarrow \Omega(\text{Sing}(|X_{\bullet}|))$ . (Pour un complexe de Kan, l'espace des lacets  $\Omega$  est défini dans 4.9.6.)

Si  $f : X_{\bullet} \longrightarrow Y_{\bullet}$ ,  $* \longrightarrow Y_{\bullet}$  et  $F_{\bullet}$  sont comme plus haut, et  $* \longrightarrow X_{\bullet}$  est un relèvement de  $* \longrightarrow Y_{\bullet}$ , alors on a un morphisme  $\Omega Y_{\bullet} \longrightarrow F_{\bullet}$ , fonctoriel en  $f$ , qui donne lieu à une suite exacte longue généralisant celle vue dans l'exemple 4.9.9 pour une fibration entre complexes de Kan.

Il suffit de construire le morphisme  $\Omega Y_{\bullet} \longrightarrow F_{\bullet}$  dans le cas où  $X_{\bullet} = *$ . (On va voir que c'est un isomorphisme dans ce cas.) On commence par remplacer  $Y_{\bullet}$  par un complexe de Kan faiblement équivalent (par exemple  $\text{Sing}(|Y_{\bullet}|)$ ). On peut donc supposer que  $Y_{\bullet}$  est fibrant. Pour calculer le produit fibré homotopique  $* \times_{Y_{\bullet}}^h *$ , on choisit une factorisation de l'une des flèches  $* \longrightarrow Y_{\bullet}$  en une fibration suivie d'une cofibration triviale. Une telle factorisation est donnée par la proposition 4.9.5, c'est la suite  $* \longrightarrow PY_{\bullet} \xrightarrow{\pi} Y_{\bullet}$ . On a donc  $* \times_{Y_{\bullet}}^h * = * \times_{Y_{\bullet}} PY_{\bullet}$ , et ce dernier ensemble simplicial est égal à  $\Omega Y_{\bullet}$  par définition.

32. C'est très facile si on admet le fait qu'une équivalence faible entre objets fibrants est automatiquement une équivalence d'homotopie.

33. Cf la section 5.6.

**Exemple 5.1.9.** On définit de même les sommes amalgamées homotopiques  $\coprod^h$ . (Dans  $\mathbf{sEns}$ , il suffit de remplacer l'une des flèches par une cofibration pour faire le calcul, car les équivalences faibles sont stables par pushout par les cofibrations.) La *cofibre homotopique* (ou le *cône*) d'un morphisme  $X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est par définition  $* \coprod_{X_\bullet}^h Y_\bullet$ . Si j'avais défini le foncteur de suspension  $\Sigma$ , on aurait un morphisme de cette cofibre vers  $\Sigma X_\bullet$ .

*Remarque 5.1.10.* Les deux exemples ci-dessus sont des cas particuliers de limites projectives et inductives homotopiques. La définition dans le cas général est la même, mais il n'est clair que les foncteurs dérivés existent (ni comment les calculer). Nous verrons plus tard que ces limites homotopiques existent toujours dans le cas de  $\mathbf{sEns}$ .<sup>34</sup>

## 5.2 Catégories de modèles

Comme on l'a vu dans les exemples de la section précédente, pour faire des calculs dans la catégorie homotopique d'une catégorie (avec équivalences faibles)  $\mathcal{C}$ , et en particulier pour calculer des foncteurs dérivés, il est utile d'avoir plus de structure de  $\mathcal{C}$ . C'est l'intérêt des structures de modèles.

**Définition 5.2.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie munie d'une classe d'équivalences faibles  $W$ . On suppose que  $\mathcal{C}$  a toutes les (petites) limites inductives et projectives.

Une *structure de modèles* sur  $(\mathcal{C}, W)$  est la donnée de deux classes de morphismes de  $\mathcal{C}$ , appelées les classes des *fibrations* et des *cofibrations*, telles que les propriétés suivantes soient vérifiées :

- (1) Les (co)fibrations sont stables par rétractes.
- (2) On considère un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

où  $i$  est une cofibration et  $p$  est une fibration. Alors, si  $i$  ou  $p$  est une équivalence faible, il existe un morphisme diagonal  $h$  faisant commuter le diagramme.

- (3) Pour toute flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$ , il existe deux factorisations  $f = p_1 \circ i_1 = p_2 \circ i_2$  qui sont fonctorielles en  $f$ <sup>35</sup> et telles que :
  - (a)  $p_1$  est une fibration et une équivalence faible, et  $i_1$  est une cofibration ;
  - (b)  $p_2$  est une fibration, et  $i_2$  est une cofibration et une équivalence faible.

---

34. ref?

35. Certains auteurs, en particulier Quillen, ne demandent pas que les factorisations soient fonctorielles en  $f$ . Nous suivons ici les conventions de Hovey dans [10].

La catégorie  $\mathcal{C}$  munie de la classe  $W$  et d'une structure de modèles est appelée une *catégorie de modèles*. Noter que les factorisations de (3) ne font pas partie de la structure de modèles (on demande juste qu'elles existent).

Un morphisme qui est à la fois une (co)fibration et une équivalence faible est appelé une *(co)fibration triviale* (ou *acyclique*). On note  $*$  (resp.  $\emptyset$ ) l'objet final (resp. initial) de  $\mathcal{C}$ , qui existe car toutes les limites existent dans  $\mathcal{C}$ . Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Si l'unique morphisme  $X \rightarrow *$  (resp.  $\emptyset \rightarrow X$ ) est une fibration (resp. une cofibration), on dit que  $X$  est un objet *fibrant* (resp. *cofibrant*).

*Remarque 5.2.2.* La condition (2) dit que les fibrations ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales, et que les cofibrations ont la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales. En fait, on a plus : un morphisme de  $\mathcal{C}$  est une fibration (resp. cofibration) si et seulement s'il a la propriété de relèvement à droite (resp. gauche) par rapport à toutes les cofibrations (resp. fibrations) triviales.

Montrons-le par exemple pour les cofibrations. Soit  $i : A \rightarrow B$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ , supposons qu'il ait la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations triviales. En utilisant la première factorisation de la propriété (3), on obtient  $i = p_1 \circ i_1$ , avec  $p_1 : B' \rightarrow B$  une fibration triviale et  $i_1 : A \rightarrow B'$  une cofibration. On considère le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_1} & B' \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p_1 \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

L'hypothèse sur  $i$  implique qu'il existe une flèche diagonale  $h : B \rightarrow B'$  faisant commuter le diagramme, et donc que  $i$  est un rétracte de  $i_1$ . Par la propriété (1), le morphisme  $i$  est donc une cofibration.

Cette remarque implique que la classe des fibrations (resp. cofibrations) est automatiquement stable par composition et par changement de base (resp. par composition et par pushout). Ceci implique qu'on ne l'ait pas explicitement mis dans les axiomes. Elle implique aussi que la classe des fibrations détermine celle des cofibrations, et vice-versa (si on connaît la classe des équivalences faibles).

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de modèles, et soient  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\mathcal{C}$ . On peut définir de manière abstraites des relations d'homotopie à droite et d'homotopie à gauche sur  $\text{Hom}(X, Y)$  (cf la définition 1.2.4 de [10]), qui coïncident et sont des relations d'équivalence si  $X$  est cofibrant et  $Y$  est fibrant (corollaire 1.2.6 de [10]). Nous ne donnerons pas la définition abstraite de ces relations ici, car elles ont une définition naturelle dans tous les exemples qui nous intéressent. (Cf la proposition 5.4.9.)

Le théorème suivant, qui généralise les théorèmes 3.1 et 4.10.6 (comme on le verra dans les exemples ci-dessous), donne la relation entre la structure de modèles et la catégorie homotopique.

**Théorème 5.2.3.** (cf le théorème 1.2.10 de [10].) Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de modèles. On note  $\mathcal{C}_{cf}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  formée des objets à la fois fibrants et cofibrants. Alors l'inclusion  $\mathcal{C}_{cf}$  induit une équivalence de catégories  $\mathcal{C}_{cf}/ \sim \xrightarrow{\sim} \text{Ho}(\mathcal{C})$ , où  $\sim$  est la relation d'homotopie.

*Remarque 5.2.4.* Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ . En utilisant les factorisations fonctorielles de la propriété (3) de la définition 5.2.1, on obtient des factorisations  $\emptyset \longrightarrow R_c(X) \longrightarrow X$  et  $X \longrightarrow R_f(X) \longrightarrow *$ , où :

- $R_c(X)$  est cofibrant et  $R_c(X) \longrightarrow X$  est une fibration triviale (en particulier une équivalence faible) ;
- $R_f(X)$  est fibrant et  $X \longrightarrow R_f(X)$  est une cofibration triviale (en particulier une équivalence faible).

Les foncteurs  $R_c$  et  $R_f$  (qui viennent munis de morphismes fonctoriels  $R_c \longrightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  et  $\text{id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow R_f$  dont l'évaluation sur tout objet de  $\mathcal{C}$  est une équivalence faible) sont appelés foncteurs de *remplacement cofibrant* resp. *fibrant*. Noter que leur existence est assurée par la structure de modèles, mais ils ne sont pas uniquement déterminés.

Le foncteur  $\mathcal{C} \xrightarrow{Q_{\mathcal{C}}} \text{Ho}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}_{cf}/ \sim$  est isomorphe au foncteur induit par  $R_c \circ R_f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{cf}$  (ou  $R_f \circ R_c : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{cf}$ ).

Voici quelques exemples de catégories de modèles.

**Exemple 5.2.5.** (1) La structure de modèles classique sur les ensembles simpliciaux (voir par exemple le chapitre 3 de [10]) :  $\mathcal{C} = \mathbf{sEns}$ ,  $W$  est la classe des équivalences faibles (cf la définition 4.10.4), les fibrations sont les fibrations de Kan et les cofibrations sont les morphismes injectifs (à tous les étages). Une cofibration est triviale si et seulement si c'est une extension anodine, tous les objets sont cofibrants et les objets fibrants sont les complexes de Kan.

La propriété (1) de la définition 5.2.1 est facile, on a montré les propriétés de relèvement dans la section 4.8 et l'existence des factorisations fonctorielles de la propriété (3) dans le théorème 4.8.11. Noter cependant que l'on a admis le fait qu'une (co)fibration est triviale si et seulement si c'est une équivalence faible, ce qui est loin d'être évident.

- (2) Structure de modèles classique sur la catégorie des espaces topologiques (voir par exemple la section 2.5 de [10]) :  $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ ,  $W$  est la classe des équivalences faibles (cf la définition 4.10.4), les fibrations sont les fibrations de Serre (cf la remarque 4.6.3), les cofibrations sont les rétractes des "cell complexes"<sup>36</sup> relatifs. Tous les objets sont fibrants.
- (3) Il existe au moins deux autres structures de modèles intéressantes sur  $\mathbf{Top}$  (voir [18, Model structure on topological spaces]) :

---

36. Je ne connais pas le nom français. En tout cas, la version absolue est définie comme un CW complexe, mais on ne suppose pas que l'on attache les cellules par ordre croissant de dimension. Voir la référence pour la version relative.

- La structure de modèles de Hurewicz, pour laquelle les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopie et les fibrations sont les fibrations de Hurewicz.<sup>37</sup> Tout objet est fibrant.
- La structure de modèles mixte, pour laquelle les équivalences faibles sont celles de la définition 4.10.4 et les fibrations sont les fibrations de Hurewicz. Tout objet est fibrant, et les objets cofibrants sont les espaces qui sont homotopes à un CW complexe.

Noter que l'on a donné deux structures de modèles sur  $\mathbf{Top}$  qui ont les mêmes équivalences faibles (la structure classique et la structure mixte).

- (4) Structure de modèle injective sur une catégorie de complexes (voir par exemple la section 2.3 de [10]) : Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne avec assez d'objets injectifs, et soit  $\mathcal{C} = C^+(\mathcal{A})$  la catégorie des complexes bornés inférieurement d'objets de  $\mathcal{A}$ . On a une structure de modèles sur  $\mathcal{C}$  pour laquelle les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes, les cofibrations sont les morphismes qui sont injectifs en chaque degré, et les fibrations sont les morphismes qui en chaque degré sont surjectifs et de noyau un objet injectif de  $\mathcal{A}$ . Tous les objets sont cofibrants, et les objets fibrants sont exactement les complexes d'objets injectifs.

Si  $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$  (ou plus généralement si  $\mathcal{A}$  est une catégorie de Grothendieck)<sup>38</sup>, alors cette structure de modèles se prolonge à la catégorie  $C(\mathcal{A})$  de tous les complexes d'objets de  $\mathcal{A}$ . Sur cette catégorie plus grande, les équivalences faibles sont toujours les quasi-isomorphismes, les cofibrations sont toujours les morphismes injectifs et chaque degré, et les fibrations sont surjectives de noyau injectif en chaque degré, mais la réciproque n'est pas vraie.

- (5) Structure de modèle projective sur une catégorie de complexes (voir par exemple la section 2.3 de [10]) : Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne avec assez d'objets projectifs, et soit  $\mathcal{C} = C^-(\mathcal{A})$  la catégorie des complexes bornés inférieurement d'objets de  $\mathcal{A}$ . On a une structure de modèles sur  $\mathcal{C}$  pour laquelle les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes, les fibrations sont les morphismes qui sont surjectifs en chaque degré, et les cofibrations sont les morphismes qui en chaque degré sont injectifs et de conoyau un objet projectif de  $\mathcal{A}$ . Tous les objets sont fibrants, et les objets cofibrants sont exactement les complexes d'objets projectifs.

Comme dans l'exemple précédent, si  $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ , alors cette structure de modèles se prolonge à la catégorie  $C(\mathcal{A})$  de tous les complexes d'objets de  $\mathcal{A}$ . Sur cette catégorie plus grande, les équivalences faibles sont toujours les quasi-isomorphismes, les fibrations sont toujours les morphismes surjectifs et chaque degré, et les cofibrations sont injectives de conoyau projectif en chaque degré, mais la réciproque n'est pas vraie.

En particulier, si  $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ , alors on a deux structures de modèles sur  $C(\mathcal{A})$  avec les mêmes équivalences faibles. La structure injective est plus pratique pour calculer des foncteurs dérivés à droite, et la structure projective est plus pratique pour calculer des foncteurs dérivés à gauche.

---

37. C'est-à-dire les morphismes qui ont la propriété de relèvement à droite pour toutes les inclusions de la forme  $X \rightarrow X \times [0, 1]$ .

38. Voir la proposition 1.3.5.3 de [16] pour ce cas.

- (6) Structure de modèles classique sur la catégorie des catégories (voir [18, Canonical model structure on Cat]) :<sup>39</sup>  $\mathcal{C}$  est la catégorie des catégories (vue comme une 1-catégorie, c'est-à-dire que l'on ignore les morphismes entre foncteurs), les équivalences faibles sont les équivalences de catégories, les cofibrations sont les foncteurs qui sont injectifs sur les objets (appelé *isocofibrations*) et les fibrations sont les *isofibrations*, c'est-à-dire les foncteurs  $F : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$  tels que pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{D}_2$  et tout isomorphisme  $\varphi : F(X) \xrightarrow{\sim} Y$ , il existe un isomorphisme  $\psi : X \xrightarrow{\sim} X'$  dans  $\mathcal{D}_1$  tel que  $F(\psi) = \varphi$ . Toutes les catégories sont cofibrantes pour cette structure.

### 5.3 Construction de structures de modèles

Dans cette section, nous allons voir comment “transporter” une structure de modèles d'une catégorie de modèles connue (typiquement  $\mathbf{sEns}$ ) à une autre catégorie.

Dans la version la plus simple de cette construction, on se donne une catégorie  $\mathcal{D}$  et un foncteur  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{sEns}$ . On suppose que  $G$  admet un adjoint à gauche  $F : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathcal{D}$ .

**Exemple 5.3.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie d'ensembles munis d'une certaine structure algébrique, telle que le foncteur d'oubli  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  ait un adjoint à gauche  $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathcal{C}$ , le foncteur “objet libre sur un ensemble”. Alors on peut prendre  $\mathcal{D} = \mathbf{s}\mathcal{C}$ , les foncteurs  $G : \mathbf{s}\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{sEns}$  et  $F : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{s}\mathcal{C}$  qui se déduisent immédiatement de  $G$  et  $F$ .

Par exemple,  $\mathcal{C}$  peut être la catégorie des groupes (abéliens ou non), celle des  $R$ -modules, celle des algèbres (associatives/commutatives/ unitaires ou non) sur un anneau commutatif, celle des algèbres de Lie sur un anneau commutatif...

**Définition 5.3.2.** On dit qu'un morphisme de  $\mathcal{D}$  est une *équivalence faible* (resp. une *fibration*, resp. une *fibration triviale*) si son image par  $G$  est une équivalence faible (resp. une fibration de Kan, resp. une fibration de Kan triviale) dans  $\mathbf{sEns}$ . On dit qu'un morphisme de  $\mathcal{D}$  est une *cofibration* s'il a la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations triviales.

*Remarque 5.3.3.* On considère un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \longrightarrow & X \\ F(i) \downarrow & & \downarrow p \\ F(B) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

dans  $\mathcal{D}$ . Alors il existe un morphisme diagonal qui fait commuter le diagramme ci-dessus si et seulement s'il existe un tel morphisme diagonal dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & G(X) \\ i \downarrow & & \downarrow G(p) \\ B & \longrightarrow & G(Y) \end{array}$$

39. ref? relation (via le nerf) avec la structure de modèles projective sur les ensembles bisimpliciaux ?

de  $\mathbf{sEns}$  qui se déduit du premier carré par adjonction.

En particulier :

- (a) Le foncteur  $F : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathcal{D}$  préserve les cofibrations. (Noter que le foncteur  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{sEns}$  préserve les équivalences faibles et les fibrations par définition.)
- (b) Un morphisme de  $\mathcal{D}$  est une fibration (resp. une fibration triviale) si et seulement s'il a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les  $F(\Lambda_k^n) \rightarrow F(\Delta[n])$  (resp.  $F(\partial\Delta[n]) \rightarrow F(\Delta[n])$ ).

Le théorème suivant est le théorème II.4.1 de [8].

**Théorème 5.3.4.** *On suppose que :*

- (1) *La catégorie  $\mathcal{D}$  a toutes les (petites) limites inductives et projectives.*
- (2) *Le foncteur  $G$  commute aux limites inductives filtrantes.*
- (3) *Un morphisme de  $\mathcal{D}$  qui a la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations est une équivalence faible.*

*Alors la catégorie  $\mathcal{D}$ , avec les classes d'équivalences faibles, fibrations et cofibrations définies ci-dessus, est une catégorie de modèles.*

Nous verrons ci-dessous comment vérifier la condition (3) pour les exemples qui nous intéressent.

*Démonstration.* Donnons une idée de la preuve du théorème. La propriété (1) de la définition 5.2.1 est facile à vérifier, le point central est de construire les factorisations de la propriété (3) et de vérifier les propriétés de relèvement de la propriété (2).

Notons provisoirement  $CFT$  la classe des morphismes de  $\mathcal{D}$  qui ont la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations. Cette classe contient les isomorphismes, et elle est saturée (au sens de la définition 4.8.2). Noter aussi que par l'hypothèse (3), tout élément de  $CFT$  est une équivalence faible et une cofibration, et, par la remarque 5.3, si  $i$  est une extension anodine, alors  $F(i)$  est dans  $CFT$ .

On montre d'abord que tout morphisme  $f$  de  $\mathcal{D}$  a une factorisation fonctorielle  $f = p \circ i$ , où  $p$  est une fibration et  $i$  est dans  $CFT$ . Cela résulte du théorème 4.8.12, appliqué à l'ensemble de morphismes  $F(\Lambda_k^n) \rightarrow F(\Delta[n])$ ,  $0 \leq k \leq n$ . En effet, ces morphismes sont dans  $CFT$  (voir la remarque), et, grâce à l'hypothèse (2), les foncteurs  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\Lambda_k^n), \cdot) = \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Lambda_k^n, G(\cdot))$  commutent aux limites inductives indexées par  $\mathbb{N}$ .

On montre de même que tout morphisme  $f$  de  $\mathcal{D}$  a une factorisation fonctorielle  $f = p \circ i$ , où  $p$  est une fibration triviale et  $i$  est une cofibration.

Il reste à montrer que toute fibration a la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales, c'est-à-dire que toute cofibration triviale est dans  $CFT$  (et donc que  $CFT$  est exactement la classe des cofibrations triviales). Soit donc  $i : A \rightarrow B$  une cofibration triviale.

On vient de voir que l'on peut factoriser  $i$  en  $A \xrightarrow{j} A' \xrightarrow{q} B$ , où  $q$  est une fibration et  $j$  est dans  $CFT$ . Par l'hypothèse (3), le morphisme  $j$  est une équivalence faible, donc il en est de même de  $q$ , c'est-à-dire que  $q$  est une fibration triviale. Par définition des cofibrations dans  $\mathcal{D}$ , on peut donc trouver un morphisme diagonal  $h$  faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & A' \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow q \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

et donc  $i$  est un rétracte de  $j$ . Comme  $j$  est dans  $CFT$ , ceci implique que  $i$  est dans  $CFT$ . □

Expliquons maintenant comment on peut vérifier l'hypothèse (3) du théorème.

**Proposition 5.3.5.** (cf le lemme II.5.1 de [8]) *Supposons qu'il existe un endofoncteur  $R_f$  de  $\mathcal{D}$  et un morphisme  $\varepsilon : \text{id}_{\mathcal{D}} \rightarrow R_f$  tels que, pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{D}$ ,  $R_f(X)$  est fibrant et  $\varepsilon_X : X \rightarrow R_f(X)$  est une équivalence faible.*

*Alors l'hypothèse (3) du théorème 5.3.4 est vraie.*

*Démonstration.* Nous ne traiterons que le cas où  $\mathcal{D}$  est l'une des catégories de l'exemple 5.3.1 (c'est-à-dire  $s\mathcal{C}$  où  $\mathcal{C}$  est la catégorie des groupes (abéliens ou non), celle des  $R$ -modules, celle des algèbres (associatives/commutatives/ unitaires ou non) sur un anneau commutatif, ou celle des algèbres de Lie sur un anneau commutatif) et  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est le foncteur d'oubli. Dans ce cas, par la proposition 4.4.7, tout objet de  $s\mathcal{C}$  est fibrant, et on supposera aussi que  $R_f = \text{id}_{s\mathcal{C}}$  et que  $\varepsilon$  est l'identité.

On remarque que, pour tout ensemble simplicial  $A_\bullet$  et tout objet  $X_\bullet$  de  $s\mathcal{C}$ , le Hom interne  $\underline{\text{Hom}}_{s\mathbf{Ens}}(A_\bullet, G(X_\bullet))$  est naturellement un objet de  $s\mathcal{C}$  (en d'autres termes, il est dans l'image du foncteur  $G : s\mathbf{Ens} \rightarrow s\mathcal{C}$ ). On notera  $\underline{\text{hom}}_{s\mathcal{C}}(A_\bullet, X_\bullet)$  l'objet de  $s\mathcal{C}$  ainsi obtenu, pour le distinguer de l'ensemble simplicial  $\underline{\text{Hom}}_{s\mathbf{Ens}}(A_\bullet, G(X_\bullet))$  et suivre la notation de [8].<sup>40</sup> Il est clairement fonctoriel en  $A_\bullet$  et en  $X_\bullet$ .

Prouvons maintenant l'hypothèse (3) du théorème 5.3.4. Soit donc  $j : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  un morphisme de  $s\mathcal{C}$  qui a la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations, il s'agit de montrer que  $j$  est une équivalence faible. Comme  $X_\bullet$  est fibrant, il existe un morphisme  $u : Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$  tel que  $uj = \text{id}_{X_\bullet}$ .

$$\begin{array}{ccc} X_\bullet & \xrightarrow{\text{id}_{X_\bullet}} & X_\bullet \\ j \downarrow & \nearrow u & \downarrow \\ Y_\bullet & \longrightarrow & * \end{array}$$

---

40. Attention, cet objet n'est pas le Hom interne dans la catégorie  $s\mathcal{C}$ , qui sera introduit plus tard.

On considère le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X_{\bullet} & \xrightarrow{f} & \underline{\text{hom}}_{\mathcal{S}\mathcal{C}}(\Delta[1], Y_{\bullet}) \\
 j \downarrow & \nearrow h & \downarrow q \\
 Y_{\bullet} & \xrightarrow{g} & \underline{\text{hom}}_{\mathcal{S}\mathcal{C}}(\partial\Delta[1], Y_{\bullet})
 \end{array}$$

où

- $f$  est le composé de  $j : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet} = \underline{\text{hom}}_{\mathbf{sEns}}(*, Y_{\bullet})$  et du morphisme de functorialité  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{S}\mathcal{C}}(*, Y_{\bullet}) \rightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[1], Y_{\bullet})$ ;
- $q$  vient (par functorialité de  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{S}\mathcal{C}}$ ) de l'inclusion  $\partial\Delta[1] \subset \Delta[1]$ ;
- $g$  est le composé de  $(\text{id}_{Y_{\bullet}}, j \circ u) : Y_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet} \times Y_{\bullet}$  et de l'isomorphisme  $Y_{\bullet} \times Y_{\bullet} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{hom}}_{\mathcal{S}\mathcal{C}}(\partial\Delta[1], Y_{\bullet})$  (induit par  $\partial\Delta[1] \simeq * \sqcup *$ ). Comme  $G(q)$  est une fibration (par le théorème 4.9.1), le morphisme  $q$  est lui aussi une fibration. Par l'hypothèse sur  $j$ , il existe donc un morphisme  $h : Y_{\bullet} \rightarrow \underline{\text{hom}}_{\mathcal{S}\mathcal{C}}(\Delta[1], Y_{\bullet})$  qui fait commuter le diagramme ci-dessus. Alors  $G(h)$  est une homotopie de  $G(j \circ u)$  à  $G(\text{id}_{Y_{\bullet}})$ , donc  $G(j)$  est une équivalence faible, donc il en est de même de  $j$ .

□

*Remarque 5.3.6.* Évidemment, le morphisme  $h$  de la preuve ci-dessus est lui-même une homotopie dans la catégorie  $\mathcal{S}\mathcal{C}$ , mais nous n'avons pas encore défini cette notion.

### Généralisation :

Soit  $\mathcal{D}$  une catégorie, et supposons donnée une famille  $(G_i)_{i \in I}$  de foncteurs  $Df \rightarrow \mathbf{sEns}$ , telle que chaque  $G_i$  admet un adjoint à gauche  $\mathbf{sEns} \rightarrow \mathcal{D}$ .

**Définition 5.3.7.** On dit qu'un morphisme de  $\mathcal{D}$  est une *équivalence faible* (resp. une *fibration*, resp. une *fibration triviale*) si son image par chaque  $G_i$  est une équivalence faible (resp. une fibration de Kan, resp. une fibration de Kan triviale) dans  $\mathbf{sEns}$ . On dit qu'un morphisme de  $\mathcal{D}$  est une *cofibration* s'il a la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations triviales.

Le théorème suivant est le théorème II.5.8 de [8], et sa preuve est une généralisation facile de celle du théorème 5.3.4.

**Théorème 5.3.8.** *On suppose que :*

- (1) *La catégorie  $\mathcal{D}$  a toutes les (petites) limites inductives et projectives.*
- (2) *Pour tout  $i \in I$ , le foncteur  $G_i$  commute aux limites inductives filtrantes.*
- (3) *Un morphisme de  $\mathcal{D}$  qui a la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations est une équivalence faible.*

Alors la catégorie  $\mathcal{D}$ , avec les classes d'équivalences faibles, fibrations et cofibrations définies ci-dessus, est une catégorie de modèles.

**Exemple 5.3.9.** Soit  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  comme dans l'exemple 5.3.1, et soit  $\mathcal{I}$  une petite catégorie. On obtient une structure de modèles sur la catégorie  $\mathbf{Fonc}(\mathcal{I}, \mathbf{s}\mathcal{C}) = \mathbf{sFonc}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$  en appliquant le théorème 5.3.8 à la famille de foncteurs  $G_i : \mathbf{Fonc}(\mathcal{I}, \mathbf{s}\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{sEns}, H \mapsto G(H(i))$ , indexée par les objets de  $\mathcal{I}$ . Cette structure de modèles est appelée la *structure de modèles projective* sur la catégorie  $\mathbf{Fonc}(\mathcal{I}, \mathbf{s}\mathcal{C})$ .

*Remarque 5.3.10.* (1) En général, si  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles qui a des ensembles générateurs de cofibrations et de cofibrations triviales dont les sources sont de présentation finie<sup>41</sup> (“cofibrantly generated model category”, cf [18, Cofibrantly generated model category]), et si  $\mathcal{I}$  est une petite catégorie, on a une structure de modèles sur  $\mathbf{Fonc}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ , appelée la *structure de modèles projective*, dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les  $F \in \mathbf{Fonc}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$  tels que  $F(i)$  soit une équivalence faible (resp. une fibration) pour tout  $i \in \text{Ob } \mathcal{I}$ .

Si  $\mathcal{C} = \mathbf{sEns}$ , l'ensemble générateur de cofibrations (resp. de cofibrations triviales) est donné par les inclusions  $\partial\Delta[n] \subset \Delta[n]$  (resp. les  $\Lambda_k^n \subset \Delta[n]$ ). La preuve dans le cas général est une adaptation facile de la preuve du théorème 5.3.4.

- (2) Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles comme dans (1) qui est de plus localement présentable (c'est-à-dire si c'est une catégorie de modèles combinatoire, cf [18, Combinatorial model category]), alors on a une autre structure de modèles sur  $\mathbf{Fonc}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ , appelée la *structure de modèles injective*, dont les équivalences faibles (resp. les cofibrations) sont les  $F \in \mathbf{Fonc}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$  tels que  $F(i)$  soit une équivalence faible (resp. une cofibration) pour tout  $i \in \text{Ob } \mathcal{I}$ .
- (3) Noter que les structure de modèles sur  $\mathbf{Fonc}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$  définies dans (2) et (3) ont les mêmes équivalences faibles.

## 5.4 Catégories de modèles simpliciales

Cf [8] sections II.2, II.3 et II.4.

Une autre caractéristique importante de la catégorie  $\mathbf{sEns}$  est l'existence du Hom interne, c'est-à-dire le fait que la catégorie  $\mathbf{sEns}$  est enrichie sur elle-même. On va formaliser cette notion, d'abord pour les catégories quelconques, puis pour les catégories de modèles.

**Définition 5.4.1.** Une *catégorie simpliciale* (ou *catégorie enrichie en ensembles simpliciaux*) est une catégorie  $\mathcal{D}$  munie d'un<sup>42 43</sup> bifoncteur  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{sEns}$  vérifiant les propriétés suivantes :

41. Un objet  $A$  de  $\mathcal{C}$  est dit *de présentation finie* si  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \cdot)$  commute aux limites inductives filtrantes.

42. Est-ce équivalent à la définition standard ? On dirait qu'elle ne demande pas l'existence de  $\otimes$  et  $\underline{\text{hom}}$ .

43. Ceci est la définition de [8], mais je ne suis pas sûre qu'elle soit équivalente à la définition standard.

1. Pour tous  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{D}$ , on a  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, B)_0$ .
2. Pour tout  $A \in \text{Ob } \mathcal{D}$ , le foncteur  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, \cdot) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{sEns}$  admet un adjoint à gauche, qui sera noté  $A \otimes \cdot : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathcal{D}$ .
3. Pour tout  $B \in \text{Ob } \mathcal{D}$ , le foncteur  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(\cdot, B) : \mathcal{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{sEns}$  admet un adjoint à gauche, qui sera noté  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{D}}(\cdot, B) : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathcal{D}$ .

**Exemple 5.4.2.** L'exemple de base est la catégorie  $\mathbf{sEns}$  elle-même, avec le foncteur  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}$  de la définition 4.7.1. Le foncteur  $\otimes$  est le produit cartésien d'ensembles simpliciaux, et le foncteur  $\underline{\text{hom}}_{\mathbf{sEns}}$  est égal à  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}$ .

Cet ensemble se généralise de la manière suivante.

**Proposition 5.4.3.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie qui a toutes les limites projectives et inductives. On définit des foncteurs  $\cdot \otimes \cdot : \mathbf{s}\mathcal{C} \times \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{s}\mathcal{C}$  et  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{C}} : \mathbf{s}\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathbf{s}\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{sEns}$  de la manière suivante :

(a) Soient  $A_{\bullet} \in \text{Ob } \mathbf{s}\mathcal{C}$  et  $X_{\bullet} \in \text{Ob } \mathbf{sEns}$ . Alors :

- Pour tout  $n \geq 0$ ,

$$(A_{\bullet} \otimes X_{\bullet})_n = \prod_{x \in X_n} A_n.$$

- Pour toute application croissante  $f : [n] \rightarrow [m]$ ,  $f^* : \prod_{x \in X_m} A_m \rightarrow \prod_{x \in X_n} A_n$  envoie l'élément  $a \in A_m$  du facteur correspondant à  $x \in X_m$  sur l'élément  $f^*(a) \in A_n$  du facteur correspondant à  $f^*(x) \in X_n$ .

(b) Soient  $A_{\bullet}, B_{\bullet} \in \text{Ob}(\mathbf{s}\mathcal{C})$ . On définit un ensemble simplicial  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{C}}(A_{\bullet}, B_{\bullet})$  de la manière suivante :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{C}}(A_{\bullet}, B_{\bullet})_n = \text{Hom}_{\mathbf{s}\mathcal{C}}(A_{\bullet} \otimes \Delta[n], B_{\bullet}).$$

- Pour toute application croissante  $f : [n] \rightarrow [m]$ ,

$$f^* : \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{C}}(A_{\bullet}, B_{\bullet})_m \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{C}}(A_{\bullet}, B_{\bullet})_n$$

envoie  $u : A_{\bullet} \otimes \Delta[m] \rightarrow B_{\bullet}$  vers  $u \circ (\text{id}_{A_{\bullet}} \otimes f_*) : A_{\bullet} \otimes \Delta[n] \rightarrow B_{\bullet}$ .

Alors ceci munit  $\mathbf{s}\mathcal{C}$  d'une structure de catégorie simpliciale.

**Exemple 5.4.4.** On peut appliquer ce résultat aux catégories  $\mathcal{C} = \text{Grp}, R\text{-Mod}, R\text{-Alg}$ . Dans ce cas,  $\underline{\text{hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{C}}$  est le foncteur défini dans la preuve de la proposition 5.3.5, c'est-à-dire que, si  $X_{\bullet}$  est un ensemble simplicial et  $B_{\bullet}$  est un objet de  $\mathcal{C}$ , alors  $\underline{\text{hom}}_{\mathbf{s}\mathcal{C}}(X_{\bullet}, B_{\bullet})$  est l'ensemble simplicial  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, B_{\bullet})$  muni de sa structure naturelle d'objet de  $\mathbf{s}\mathcal{C}$ .

Une catégorie simpliciale a un certain nombre de propriétés qui sont des conséquences presque formelles de la définition.

**Proposition 5.4.5.** Soit  $\mathcal{D}$  une catégorie simpliciale. Alors :

1. Les opérations  $\otimes$  et  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{D}}$  sont fonctorielles en les deux variables.
2. Pour tout ensemble simplicial  $X$ , les foncteurs  $\cdot \otimes X, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{D}}(X, \cdot) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$  forment une paire foncteurs adjoints.
3. On a des isomorphismes fonctoriels en toutes les variables

$$\underline{\text{hom}}_{\mathcal{D}}(X \times Y, B) = \underline{\text{hom}}_{\mathcal{D}}(X, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{D}}(Y, B)).$$

4. Pour tous  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{D}$ , on a

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, B)_n = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A \otimes \Delta[n], \bullet),$$

et les morphismes entre les  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, B)_n$  sont donnés par une formule similaire à celle de la proposition 5.4.3.

5. On a une loi de composition sur les  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}$  (définie comme dans 4.7.4), et elle est associative et redonne la loi de composition habituelle sur  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}$ .
6. On a des isomorphismes fonctoriels en toutes les variables, qui prolongent les isomorphismes d'adjonction,

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X, \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, B)) = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A \otimes X, B)$$

et

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sEns}}(X, \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, B)) = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, \underline{\text{hom}}_{\mathcal{D}}(X, B)).$$

**Définition 5.4.6.** Une *catégorie de modèles simpliciale* est une catégorie simpliciale  $\mathcal{D}$  munie d'une structure de modèles qui vérifie la propriété suivante : pour toute cofibration  $j : A \longrightarrow B$  et toute fibration  $p : X \longrightarrow Y$ , le morphisme

$$(j^*, p_*) : \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(B, X) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, X) \times_{\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, Y)} \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(B, Y)$$

est une fibration de Kan, qui est triviale si  $j$  ou  $p$  est triviale.

**Exemple 5.4.7.** La catégorie  $\mathbf{sEns}$  est une catégorie de modèles simpliciale grâce au théorème 4.9.1. Il en est de même des catégories  $\mathbf{sGrp}$ ,  $\mathbf{sR-Mod}$  et  $\mathbf{sR-Alg}$ .

Dans une catégorie de modèles simpliciale, on a une propriété d'unicité agréable des relèvements.

**Proposition 5.4.8.** Soit  $\mathcal{D}$  une catégorie de modèles simpliciales. On considère un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow h, h' & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

où  $i$  est une cofibration et  $p$  est une fibration, et on suppose que  $i$  ou  $p$  est triviale.

Alors, si  $h, h' : B \longrightarrow X$  sont deux morphismes diagonaux faisant commuter le diagramme ci-dessus, ils sont homotopes sur  $A$  et sous  $Y$ .

Il est aussi plus facile de définir la relation d'homotopie.

**Proposition 5.4.9.** *Soit  $\mathcal{D}$  une catégorie de modèles simpliciale, et soient  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{D}$ . Alors les relations d'homotopie à droite et à gauche sur  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$  coïncident, et elles sont données par la relation d'homotopie (au sens des ensembles simpliciaux) sur  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, B)_0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$ .*

En particulier, le théorème 5.2.3 implique que, si  $Q : \mathcal{D} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{D})$  est le foncteur canonique et si  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{D}$  sont tels que  $A$  est cofibrant et  $B$  est fibrant, alors

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{D})}(Q(A), Q(B)) = \pi_0(\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, B)).$$

Noter que la définition des homotopies donnée ci-dessus n'utilise plus la structure de modèles de  $\mathcal{D}$ , donc garde un sens dans toute catégorie simpliciale. Si la structure simpliciale de  $\mathcal{D}$  est celle de la proposition 5.4.3, on peut même reformuler la définition des homotopies pour qu'elle ne fasse plus intervenir la structure simpliciale.

**Proposition 5.4.10.** *(cf [21, Tag 019L]) Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie qui a toutes les limites inductives et projectives ; on met la structure de catégorie simpliciale de la proposition 5.4.3 sur  $s\mathcal{C}$ . Soient  $f, g : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$  deux morphismes de  $s\mathcal{C}$ . Alors il revient au même de se donner :*

(i) *Un morphisme  $h : X_{\bullet} \otimes \Delta[1] \rightarrow Y_{\bullet}$  tel que  $h \circ (\delta^0)_* = f$  et  $h \circ (\delta^1)_* = g$ .*

(ii) *Une famille de morphismes  $h_{n,i} : X_n \rightarrow Y_n$ , pour  $n \geq 0$  et  $0 \leq i \leq n+1$ , telle que :*

- $h_{n,0} = g_n$  et  $h_{n,n+1} = a_n$  ;
- Si  $i > j$ , alors  $d_j \circ h_{n,i} = h_{n-1,i-1} \circ d_j$ .
- Si  $i \leq j$ , alors  $d_j \circ h_{n,i} = h_{n-1,i} \circ d_j$ .
- Si  $i > j$ , alors  $s_j \circ h_{n,i} = h_{n+1,i+1} \circ s_j$ .
- Si  $i \leq j$ , alors  $s_j \circ h_{n,i} = h_{n+1,i} \circ s_j$ .

*Preuve.* Rappelons que  $\Delta[1]_n$  est l'ensemble des applications croissantes  $[n] \rightarrow [1]$ . On a donc une bijection  $\Delta[1]_n \simeq \{0, \dots, n+1\}$  qui envoie  $u : [n] \rightarrow [1]$  sur le cardinal de  $u^{-1}(0)$ . Ceci donne un isomorphisme

$$(X_{\bullet} \otimes \Delta[1])_n = \coprod_{\Delta[1]_n} X_n \simeq \coprod_{i=0}^{n+1} X_n,$$

d'où un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}((X_{\bullet} \otimes \Delta[1])_n, Y_n) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n, Y_n)^{n+2}.$$

Le passage entre (i) et (ii) se fait en envoyant  $h_n \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}((X_{\bullet} \otimes \Delta[1])_n, Y_n)$  sur son image  $(h_{n,0}, \dots, h_{n+1,n}) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n, Y_n)^{n+2}$  par cet isomorphisme. Le fait que ceci transforme les relations de compatibilité entre les  $h_n$  en les relations de (ii) est une simple vérification.

□

On peut donc définir la notion d'homotopie dans la catégorie des objets simpliciaux d'une catégorie quelconque.

**Définition 5.4.11.** (cf [21, Tag 019M], [21, Tag 019N]) Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie, et  $f, g : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  deux morphismes de  $s\mathcal{C}$ . Une *homotopie* de  $f$  à  $g$  est la donnée d'une famille  $h_{n,i} : X_n \rightarrow Y_n$  de morphismes de  $\mathcal{C}$ , pour  $n \geq 0$  et  $0 \leq i \leq n+1$ , vérifiant les conditions du point (ii) de la proposition 5.4.10. On dit que  $f$  et  $g$  sont *homotopes* s'il existe une homotopie de  $f$  à  $g$ .

On dit que  $f$  est *équivalence d'homotopie* s'il existe  $s : Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$  tel que  $f \circ s$  et  $\text{id}_{Y_\bullet}$  soient homotopes et que  $s \circ f$  et  $\text{id}_{X_\bullet}$  soient homotopes.

## 5.5 Exemples

Soient  $\text{Grp}$  (resp  $R\text{-Mod}$ , resp.  $R\text{-Alg}$ ) la catégorie des groupes (resp. des  $R$ -modules (pour  $R$  un anneau), resp. des  $R$ -algèbres commutatives unitaires (pour  $R$  un anneau commutatif)). Comme application du théorème 5.3.4, on obtient des structures de modèles sur  $s\text{Grp}$ ,  $sR\text{-Mod}$  et  $sR\text{-Alg}$ .

### 5.5.1 Groupes simpliciaux

Les fibrations dans la catégorie des groupes simpliciaux ont une description particulièrement simple. (Noter que cette description reste valable dans  $sR\text{-Mod}$  et  $sR\text{-Alg}$ , par définition des fibrations dans ces catégories.)

**Proposition 5.5.1.** (cf [9], proposition 1.23) Soit  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  un morphisme de groupes simpliciaux. Alors  $f$  est une fibration si et seulement si  $X_n \rightarrow \pi_0(X_\bullet) \times_{\pi_0(Y_\bullet)} Y_n$  est surjectif pour tout  $n \geq 0$ .

Soit  $s\mathbf{Ens}_0$  la sous-catégorie pleine de  $s\mathbf{Ens}$  dont les objets sont les ensembles simpliciaux  $X_\bullet$  réduits, c'est-à-dire tels que  $X_0$  soit un singleton. On la munit de la classe d'équivalences faibles héritée de  $s\mathbf{Ens}$ . On a une paire de foncteurs adjoints entre  $s\text{Grp}$  et  $s\mathbf{Ens}_0$  qui induisent des équivalences des catégories homotopiques; le foncteur  $s\text{Grp} \rightarrow s\mathbf{Ens}_0$  est une généralisation aux groupes simpliciaux de l'espace classifiant de l'exemple 2.1.10, et le foncteur  $s\mathbf{Ens}_0 \rightarrow s\text{Grp}$  est une modification de l'espace des lacets  $\Omega$ . Ces foncteurs seront utiles plus tard pour dériver les schémas en groupes.<sup>44</sup>

---

44. cf plus loin

### 5.5.2 $R$ -modules simpliciaux

Soit  $R$  un anneau. Si  $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ , le théorème de Dold-Kan (théorème 2.3.2) donne une équivalence de catégories  $s\mathcal{A} \simeq C_{\geq 0}(\mathcal{A})$ , donc on obtient une structure de modèles sur  $C_{\geq 0}(\mathcal{A})$ . Elle a la description suivante (cf les sections 5.5 et 5.6 de [7]) : Soit  $f = (f_n) : M_* \rightarrow N_*$  un morphisme de  $C_{\geq 0}(\mathcal{A})$ . Alors  $f$  est

- (a) une équivalence faible si et seulement si  $H_r(f)$  est un isomorphisme pour tout  $r \geq 0$  (c'est-à-dire si et seulement si  $f$  est un quasi-isomorphisme) ;
- (b) une fibration si et seulement si  $f_n$  est surjectif pour tout  $n \geq 1$  ;
- (c) une cofibration si et seulement si  $f_n$  est injectif de conoyau projectif pour tout  $n \geq 0$ .

Noter qu'une fibration n'est pas forcément surjective en degré 0. Le point (a) résulte du théorème 2.3.8, et le point (b) du fait que, si  $F : \mathbf{Ens} \rightarrow R\text{-Mod}$  est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli (c'est-à-dire le foncteur " $R$ -module libre"), alors l'équivalence de Dold-Kan envoie  $F(\Lambda_k^n) \rightarrow F(\Delta[n])$  sur  $F(\Lambda_k^n) \xrightarrow{(\text{id}, 0)} F(\Lambda_k^n) \oplus C_*$ , où le complexe  $C_*$  est nul en degré  $r \neq n-1, n$ , et où  $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$  est égal à  $\text{id}_R : R \rightarrow R$ .

### 5.5.3 $R$ -algèbres simpliciales

Soit  $R$  un anneau commutatif. On a une description un peu plus explicite des cofibrations dans la catégorie des  $R$ -algèbres simpliciales.

On note  $S_R : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Alg}$  l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $R\text{-Alg} \rightarrow R\text{-Mod}$ , c'est-à-dire le foncteur qui envoie un  $R$ -module sur sa  $R$ -algèbre symétrique. Le foncteur  $sR\text{-Mod} \rightarrow sR\text{-Alg}$ ,  $M_\bullet \mapsto (S_R(M_n))_{n \geq 0}$ , est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $sR\text{-Alg} \rightarrow sR\text{-Mod}$  ; on le note toujours  $S_R$ .

**Définition 5.5.2.** (cf [9], définition 4.19) On note  $\Delta_+$  la sous-catégorie de  $\Delta$  qui ont les mêmes objets que  $\Delta$  et dont les morphismes sont les surjections croissantes. Si  $(M_k)_{k \geq \mathbb{N}}$  est une famille de  $R$ -modules, le foncteur  $A_\bullet : \Delta_+^{\text{op}} \rightarrow R\text{-Alg}$  libre de base  $(M_k)_{k \geq 0}$  est le foncteur défini sur les objets par

$$A_n = A_\bullet([n]) = \bigotimes_{\varphi: [n] \rightarrow [k] \text{ surjectif}} S_R(M_k)$$

et qui envoie une application croissante surjective  $\eta : [n] \rightarrow [m]$  sur le morphisme de  $R$ -algèbres

$$\eta^* = A_\bullet(\eta) : \bigotimes_{\varphi: [m] \rightarrow [k] \text{ surjectif}} S_R(M_k) \rightarrow \bigotimes_{\psi: [n] \rightarrow [k] \text{ surjectif}} S_R(M_k)$$

qui envoie un élément  $a$  du facteur  $S_R(M_k)$  correspondant à  $\varphi : [m] \rightarrow [k]$  sur l'élément  $\otimes_\psi b_\psi$ , avec  $b_\psi = a$  si  $\psi = \varphi \circ \eta$  et 1 sinon.

**Définition 5.5.3.** (cf [9], définition 4.20) Soit  $f : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$  un morphisme de  $R$ -algèbres simpliciales. On dit que  $f$  est *libre* s'il existe une famille  $(P_k)_{k \geq 0}$  de  $R$ -modules projectifs et des

isomorphismes de  $R$ -algèbres  $u_n : B_n \xrightarrow{\sim} A_n \otimes_R C_n$ , où  $C_\bullet : \Delta_+^{\text{op}} \rightarrow R\text{-Alg}$  est le foncteur libre de base  $(P_k)_{k \geq 0}$ , tels que :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \circ f_n : A_n \rightarrow A_n \otimes_R C_n$  est le morphisme  $\text{id}_{A_n} \otimes 1$  ;
- pour toute application croissante surjective  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} B_m & \xrightarrow{u_m} & A_m \otimes_R C_m \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ B_n & \xrightarrow{u_n} & A_n \otimes_R C_n \end{array}$$

**Proposition 5.5.4.** (cf [9], proposition 4.21) *Un morphisme de  $sR\text{-Alg}$  est une cofibration si et seulement si c'est un rétracte d'un morphisme libre.*

*De plus, la propriété (3) de la définition des catégories de modèles (définition 5.2.1), c'est-à-dire l'existence des deux factorisations fonctorielles, est vraie si l'on remplace partout "cofibration" par "morphisme libre".*

*Preuve.* Voici une esquisse de preuve. Il y a trois étapes.

D'abord, on montre que tout morphisme libre est une cofibration (ce qui implique une direction de l'équivalence de la première phrase.) Donnons une idée de la preuve de ceci pour un morphisme libre de la forme  $R \rightarrow A_\bullet$ , où on écrit " $R$ " pour la  $R$ -algèbre simpliciale constante de valeur  $R$  (qui est l'objet initial de  $sR\text{-Alg}$ ). La condition dit donc que  $A_\bullet$  est libre, de base une famille  $(P_k)_{k \geq 0}$  de  $R$ -modules projectifs. Pour tout  $n \geq -1$ , on note  $\text{sq}_n(A_\bullet)$  la sous- $R$ -algèbre simpliciale de  $A_\bullet$  engendrée par les simplexes non dégénérés de dimension  $\leq n$ . On a  $A_\bullet = \bigcup_{n \geq 0} \text{sq}_n(A_\bullet)$ , donc il suffit de montrer que toutes les  $\text{sq}_n(A_\bullet)$  sont cofibrantes. C'est clair pour  $\text{sq}_{-1}(A_\bullet) = R$ , donc il suffit de montrer que les inclusions  $\text{sq}_{n-1}(A_\bullet) \subset \text{sq}_n(A_\bullet)$  sont des cofibrations. Or on a des carrés cocartésiens

$$\begin{array}{ccc} S_R(P'_n) \otimes \partial\Delta[n] & \longrightarrow & \text{sq}_{n-1}(A_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_R(P'_n) \otimes \Delta[n] & \longrightarrow & \text{sq}_n(A_\bullet) \end{array}$$

où  $P'_n \in sR\text{-Mod}$  est l'image par l'inverse de l'équivalence de Dold-Kan du complexe égal à  $P_n$  en degré  $n$  et à 0 ailleurs. Il suffit donc de montrer que les flèches verticales de gauche sont des cofibrations, ce qui résulte du fait que  $S_R(M_\bullet) \otimes X_\bullet = S_R(M_\bullet \otimes X_\bullet)$  pour tout  $R$ -module simplicial  $M_\bullet$  et tout ensemble simplicial  $X_\bullet$  et du fait que les  $P'_n \otimes \partial\Delta[n] \rightarrow P'_n \otimes \Delta[n]$  sont des cofibrations dans  $sR\text{-Mod}$ .

La deuxième étape est de montrer les énoncés de factorisation. Ce sont des conséquences formelles du théorème 4.8.12, une fois que l'on a observé que les morphismes  $G(\Lambda_k^n) \rightarrow G(\Delta[n])$  et  $G(\partial\Delta[n]) \rightarrow G(\Delta[n])$  sont libres (où  $G : s\mathbf{Ens} \rightarrow sR\text{-Alg}$  est l'adjoint à gauche du

foncteur d'oubli) et que la classe des morphismes libre vérifie les propriétés (A), (B) et (D) de la définition 4.8.2.

Enfin, on montre que toute cofibration de  $sR\text{-Alg}$  est un rétracte d'un morphisme libre. Soit  $i : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$  une cofibration. D'après la deuxième étape, on peut écrire  $i = p \circ j$ , avec  $p : A_\bullet \rightarrow A'_\bullet$  une fibration triviale et  $j : A'_\bullet \rightarrow B_\bullet$  libre. Par la propriété de relèvement des cofibrations, il existe  $u : B_\bullet \rightarrow A'_\bullet$  faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} A_\bullet & \xrightarrow{j} & A'_\bullet \\ i \downarrow & \nearrow u & \downarrow p \\ B_\bullet & \xlongequal{\quad} & B_\bullet \end{array}$$

donc  $i$  est un rétracte de  $j$ .

□

### 5.5.4 Modules et algèbres sur un anneau simplicial

Plus généralement, supposons que  $R_\bullet$  est un anneau unitaire simplicial. Un  $R_\bullet$ -module est un groupe abélien simplicial  $M_\bullet$  muni d'une structure de  $R_n$ -module sur chaque  $M_n$  telle que, pour tout  $f : [n] \rightarrow [m]$ , le morphisme de groupes abéliens  $M_\bullet(f)$  vérifie la condition suivante : si  $x \in M_m$  et  $a \in R_m$ , alors  $M_\bullet(f)(ax) = R_\bullet(f)(a)M_\bullet(f)(x)$ . Un morphisme de  $R_\bullet$ -modules est un morphisme de groupes abéliens simpliciaux qui est  $R_n$ -linéaire en degré  $n$ . On note  $R_\bullet\text{-Mod}$  la catégorie des  $R_\bullet$ -modules ; c'est une catégorie abélienne.<sup>45</sup>

Alors le foncteur d'oubli  $G : R_\bullet\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{sAb}$  admet un adjoint à gauche, et le théorème 5.3.4 donne une structure de modèles sur  $R_\bullet\text{-Mod}$  pour laquelle les équivalences faibles sont les équivalences faibles des ensembles simpliciaux sous-jacents et tous les objets sont filtrants.

Si  $R_\bullet$  est commutatif, on définit de même la catégorie des  $R_\bullet$ -algèbres et sa structure de modèles.

46

## 5.6 Catégories de modèles propres

La catégorie des ensembles simpliciaux a un certain nombre de propriétés agréables. En voici une, dont on s'en sert dans la remarque 5.1.7.

**Définition 5.6.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de modèles.

45. Si  $R_\bullet$  est l'anneau simplicial constant  $R$ , alors  $R_\bullet\text{-Mod} = sR\text{-Mod}$ .

46. Ajouter des descriptions des cofibrations, ou au moins des objets cofibrants.

1. On dit que  $\mathcal{C}$  est *propre à droite* si la classe des équivalences faibles est stable par changement de base par toutes les fibrations.
2. On dit que  $\mathcal{C}$  est *propre à gauche* si la classe des équivalences faibles est stable par co-changement de base (= pushout) par toutes les cofibrations.
3. On dit que  $\mathcal{C}$  est *propre* si elle propre à droite et à gauche.

**Proposition 5.6.2.** (cf [8], lemme 8.5) Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de modèles.

1. Si tous les objets de  $\mathcal{C}$  sont fibrants, alors  $\mathcal{C}$  est propre à droite.
2. Si tous les objets de  $\mathcal{C}$  sont cofibrants, alors  $\mathcal{C}$  est propre à gauche.

**Corollaire 5.6.3.** (cf [8], corollaire 8.6) La catégorie  $\mathbf{sEns}$  est propre.

*Remarque 5.6.4.* D'après la proposition ci-dessus, les catégories  $\mathbf{sGrp}$ ,  $\mathbf{sR-Mod}$  et  $\mathbf{sR-Alg}$  sont automatiquement propres à droite, et  $\mathbf{sR-Mod}$  est aussi propre à gauche.<sup>47</sup> Mais attention,  $\mathbf{sR-Alg}$  n'est pas propre à gauche.<sup>48</sup>

## 5.7 Résolutions standard

**Définition 5.7.1.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $X_\bullet$  un objet simplicial de  $\mathcal{C}$ . Une *augmentation* de  $X_\bullet$  est un morphisme  $\varepsilon : X_0 \rightarrow X$  dans  $\mathcal{C}$  tel que  $\varepsilon \circ d_0 = \varepsilon \circ d_1$ . En d'autres termes, c'est un morphisme de  $X_\bullet$  vers l'objet simplicial constant de valeur  $X$ .

Un objet simplicial muni d'une augmentation est appelé *objet simplicial augmenté*.

**Définition 5.7.2.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Une *comonade* (ou *cotriple*) sur  $\mathcal{C}$  est un objet en comonoïdes de  $\mathbf{End}(\mathcal{C})(:= \mathbf{Fonc}(\mathcal{C}, \mathcal{C}))$ , c'est-à-dire un foncteur  $\perp : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  muni d'une co-unité  $u : \perp \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  et d'une comultiplication  $m : \perp \rightarrow \perp \circ \perp$  telles que les diagrammes suivants commutent (le premier diagramme dit que  $m$  est co-associative, et le deuxième que  $u$  est une co-unité à droite et à gauche pour  $m$ ) :

$$\begin{array}{ccc}
 \perp & \xrightarrow{m} & \perp^2 \\
 m \downarrow & & \downarrow m\perp \\
 \perp^2 & \xrightarrow{\perp m} & \perp^3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \perp & \xrightarrow{m} & \perp^2 \\
 m \downarrow & \searrow & \downarrow u\perp \\
 \perp^2 & \xrightarrow{\perp u} & \perp
 \end{array}$$

**Exemple 5.7.3.** Supposons qu'on a deux foncteurs  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tels que  $(F, G)$  soit une paire de foncteurs adjoints. Alors  $\perp := F \circ G$  est une comonade sur  $\mathcal{C}$ , avec la co-unité donnée par la co-unité de l'adjonction et la comultiplication donnée par  $F\eta G$ , où  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$  est l'unité de l'adjonction.

---

47. à vérifier;  $\mathbf{sGrp}$  aussi ?

48. ref ?

**Exemple 5.7.4.** 1. Pour tout ensemble  $X$ , on note  $F_X$  le groupe libre sur  $X$ , et  $(e_x)_{x \in X}$  sa famille de générateurs.

Le foncteur  $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Grp}$ ,  $X \mapsto F_X$ , est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $G : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ens}$ . On obtient donc une comonade  $\perp$  sur  $\mathbf{Grp}$ . Pour tout groupe  $G$ ,  $\perp(G)$  est le groupe libre sur l'ensemble  $G$ . La co-unité  $u(G) : F_G \rightarrow G$  envoie chaque  $e_g$  sur  $g \in G$ , et la comultiplication  $m(G) : F_G \rightarrow F_{F_G}$  envoie chaque  $e_g$  sur  $e_{e_g} \in F_{F_G}$ .

2. Soit  $R$  un anneau. Pour tout ensemble  $X$ , on note  $RX$  le  $R$ -module libre sur  $X$ , et  $(e_x)_{x \in X}$  sa base canonique.

Le foncteur  $F : \mathbf{Ens} \rightarrow R\text{-Mod}$ ,  $X \mapsto RX$ , est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $G : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ens}$ . On obtient donc une comonade  $\perp$  sur  $R\text{-Mod}$ . Pour tout  $R$ -module  $M$ ,  $\perp(M)$  est le  $R$ -module libre sur l'ensemble  $M$ . La co-unité  $u(M) : RM \rightarrow M$  envoie chaque  $e_m$  sur  $m \in M$ , et la comultiplication  $m(M) : RM \rightarrow R(RM)$  envoie chaque  $e_m$  sur  $e_{e_m}$ .

3. Soit  $R$  un anneau commutatif. Comme dans la section 5.5.3, pour tout  $R$ -module  $M$ , on note  $S_R(M)$  la  $R$ -algèbre symétrique sur  $M$ .

Le foncteur  $F : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Alg}$ ,  $M \mapsto S_R(M)$ , est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $G : R\text{-Alg} \rightarrow R\text{-Mod}$ . On obtient donc une comonade  $\perp$  sur  $R\text{-Alg}$ . Pour toute  $R$ -module  $A$ ,  $\perp(A)$  est la  $R$ -algèbre symétrique sur le  $R$ -module  $A$ . On peut donner des formules pour la co-unité et la comultiplication comme plus haut.

4. Soit  $R$  un anneau commutatif. En utilisant le foncteur d'oubli  $G : R\text{-Alg} \rightarrow \mathbf{Ens}$  et son adjoint à gauche  $F : \mathbf{Ens} \rightarrow R\text{-Alg}$ ,  $X \mapsto S_R(RX)$ , on obtient une autre comonade sur  $R\text{-Alg}$ .

5. Un exemple idiot : Soit  $G : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$  le foncteur d'oubli. Il admet un adjoint à gauche, le foncteur d'abélianisation  $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ ,  $G \mapsto G/[G, G]$ . La comonade correspondante sur  $\mathbf{Ab}$  est simplement  $\text{id}_{\mathbf{Ab}}$ .

Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $(\perp, u, m)$  une comonade sur  $\mathcal{C}$ . On construit un objet simplicial augmenté  $\varepsilon : H_\bullet \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  de  $\text{End}(\mathcal{C})$  de la manière suivante :

- Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $H_n = \perp^{n+1}$ .
- Pour tout  $n \geq 1$  et tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $d_i : H_n \rightarrow H_{n-1}$  est le morphisme  $\perp^i u \perp^{n-i} : \perp^{n+1} \rightarrow \perp^n$ .
- Pour tout  $n \geq 0$  et tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ ,  $s_j : H_n \rightarrow H_{n+1}$  est le morphisme  $\perp^j m \perp^{n-j} : \perp^{n+1} \rightarrow \perp^{n+2}$ .
- L'augmentation  $\varepsilon : H_0 = \perp \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  est donnée par la co-unité  $u$ .

Le fait suivant est une application facile de la proposition 2.2.5.

**Fait 5.7.5.** Les formules ci-dessus définissent bien un objet simplicial augmenté de  $\text{End}(\mathcal{C})$ .

Pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , on obtient donc un objet simplicial augmenté  $\varepsilon(A) : H_\bullet(A) \rightarrow A$  de  $\mathcal{C}$ .

**Théorème 5.7.6.** *On se place dans la situation de l'exemple 5.7.3. On a donc des foncteurs adjoints  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , qui définissent une comonade  $\perp = F \circ G$  sur  $\mathcal{C}$ . (cf [21, Tag 08ND]))*

1. *Pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , le morphisme  $G\varepsilon : G(H_\bullet(A)) \rightarrow G(A)$  est une équivalence d'homotopie.<sup>49</sup>*
2. *Pour tout objet  $B$  de  $\mathcal{D}$ , le morphisme  $\varepsilon F : H_\bullet(F(B)) \rightarrow F(B)$  est une équivalence d'homotopie.*

*Preuve.* Soit  $\eta : \text{id}_{\mathcal{D}} \rightarrow G \circ F$  l'unité de l'adjonction. Dans (1), la section (à homotopie près)  $s : G(A) \rightarrow G(H_\bullet(A))$  est donnée par les morphismes

$$G(A) \xrightarrow{G\eta} G(\perp(A)) \xrightarrow{G\eta^\perp} G(\perp^2(A)) \rightarrow \dots \xrightarrow{G\eta^{\perp^n}} G(\perp^{n+1}(A)).$$

Dans (2), on utilise le morphisme

$$F(B) \xrightarrow{\eta F} \perp(F(B)) \xrightarrow{\perp \eta F} \perp^2(F(B)) \rightarrow \dots \xrightarrow{\perp^n \eta F} \perp^{n+1}(F(B)).$$

□

*Question inutile :* Dans (1), suffit-il de supposer que  $G\perp \xrightarrow{G\varepsilon} G$  a un inverse à droite ? Dans (2), suffit-il de supposer que l'on applique  $H_\bullet \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  à un objet  $A$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $u(A) : \perp A \rightarrow A$  a un inverse à droite ? (C'est-à-dire un objet  $\perp$ -projectif au sens de [22] 8.6.5.)

Si on veut utiliser une résolution standard comme remplacement cofibrant d'un objet, il serait utile aussi de savoir sous quelles conditions c'est effectivement un remplacement cofibrant. Malheureusement, je ne connais pas le bon énoncé général, mais la proposition suivante suffira en pratique.

**Proposition 5.7.7.** *Dans la situation des points 1-4 de l'exemple 5.7.4, pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , l'objet simplicial  $H_\bullet(A)$  est cofibrant et l'augmentation  $H_\bullet(A) \rightarrow A$  est une fibration.*

*Démonstration.* Pour montrer que  $H_\bullet(A)$  est cofibrant, l'idée est la suivante :

- (A) On définit d'abord la notion d'objet simplicial scindé, en suivant [21, Tag 017P] : On dit qu'un objet simplicial  $X_\bullet$  de  $\mathcal{C}$  est *scindé* s'il existe des morphismes  $N(X_n) \rightarrow X_n$  dans  $\mathcal{C}$ , pour  $n \geq 0$ , tels que, pour tout  $n \geq 0$ , le morphisme

$$\coprod_{f:[n] \rightarrow [m] \text{ surjectif}} N(X_m) \rightarrow X_n$$

---

49. Au sens de la définition 5.4.11.

soit un isomorphisme.

Par exemple, la notion d'algèbre simpliciale libre (définition 5.5.2) est un cas particulier de cette notion.<sup>50</sup> Le théorème de Dold-Kan implique que tout objet simplicial à valeurs dans une catégorie abélienne est scindé (voir la section 2.5). Tout ensemble simplicial est scindé de manière unique (on prend pour  $N(X_n)$  l'ensemble des simplexes non dégénérés de  $X_n$ ; voir [21, Tag 017R] pour une preuve).

- (B) Ensuite, on prouve que, dans la situation de la proposition, l'objet simplicial  $H_\bullet(A)$  est scindé, et de plus on peut choisir un scindage  $(N_n)_{n \geq 0}$  tel que les  $N_n$  soient des objets libres. On construit le scindage par récurrence sur  $n$ . Évidemment,  $N_0 = H_0(A)$ . Supposons  $N_0, \dots, N_n$  construits. Par définition,  $H_{n+1}(A)$  est un objet libre (au sens approprié) sur  $H_n(A)$ . Dans les situations des points 1, 2 et 4, on prend pour  $N_{n+1}$  le sous-objet libre de  $H_{n+1}(A)$  de base  $H_n(A) - \bigcup_{f:[n] \rightarrow [m] \text{ surjectif}} N_m$ . Dans la situation du point 3, on choisit un supplémentaire  $M$  dans  $H_n(A)$  de  $\bigoplus_{f:[n] \rightarrow [m] \text{ surjectif}} N_m$ , et on prend pour  $N_{n+1}$  la  $R$ -algèbre symétrique sur  $M$ .
- (C) On finit comme dans la preuve de la proposition 5.5.4 : l'objet  $H_\bullet(A)$  est la limite inductive de ses  $\text{sq}_n$ , et on montre que chaque  $\text{sq}_{n-1} H_\bullet(A) \rightarrow \text{sq}_n H_\bullet(A)$  est une cofibration en utilisant le scindage de (B).

Enfin, pour vérifier que  $H_\bullet(A) \rightarrow A$  est une fibration, il suffit de le faire après oubli de toutes les structures sauf celle de groupe, et alors on peut appliquer la proposition 5.5.1.

□

## 5.8 Retour sur les foncteurs dérivés

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories de modèles. On note  $Q_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$  et  $Q_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{D})$  les foncteurs canoniques. Rappelons aussi que l'on note  $R_f$  et  $R_c$  des foncteurs de remplacement fibrant et cofibrant dans  $\mathcal{C}$  ou  $\mathcal{D}$  (voir la remarque 5.2.4).

**Théorème 5.8.1.** (cf [8] théorème II.7.7, corollaire II.7.8 et lemme II.7.9) Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .

1. Si  $F$  envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des équivalences faibles, alors  $Q_{\mathcal{D}} \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{D})$  admet un foncteur dérivé à gauche  $LF$ , qui est donné par  $LF = Q_{\mathcal{D}} \circ F \circ R_c$ .
2. Si  $F$  envoie les équivalences faibles entre objets fibrants sur des équivalences faibles, alors  $Q_{\mathcal{D}} \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{D})$  admet un foncteur dérivé à droite  $RF$ , qui est donné par  $RF = Q_{\mathcal{D}} \circ F \circ R_f$ .
3. Supposons que  $F$  admet un adjoint à droite  $G$ , que  $F$  envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des équivalences faibles et que  $G$  envoie les équivalences faibles entre objets fibrants sur des équivalences faibles. Alors les foncteurs  $LF : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{D})$  et  $RG : \text{Ho}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$  sont adjoints.

---

50. Ce serait bien d'harmoniser un peu.

4. Dans la situation du point précédent, supposons de plus que pour tout objet cofibrant  $X$  de  $\mathcal{C}$  et tout objet fibrant  $Y$  de  $\mathcal{D}$ , l'isomorphisme d'adjonction  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$  induit une bijection entre les sous-ensembles des isomorphismes.

Alors les foncteurs  $LF$  et  $RG$  sont des équivalences de catégories quasi-inverses.

5. Supposons que  $F$  admet un adjoint à droite  $G$  qui préserve les fibrations et les fibrations triviales. Alors  $F$  préserve les cofibrations, les cofibrations triviales et les équivalences faibles entre objets cofibrants.

6. Dualement, supposons que  $F$  admet un adjoint à droite  $G$  et que  $F$  préserve les cofibrations et les cofibrations triviales. Alors  $G$  préserve les fibrations, les fibrations triviales et les équivalences faibles entre objets fibrants.

*Remarque 5.8.2.* En combinant les points (5) et (6), on voit que, si  $(F, G)$  est une paire de foncteurs adjoints tels que  $G$  préserve les fibrations et les fibrations triviales, alors la paire  $(F, G)$  vérifie la condition de (3), donc les deux foncteurs se dérivent et on obtient une paire de foncteurs adjoints  $(LF, RG)$ .

*Démonstration.* Les seuls points non formels sont les points (5) et (6), dont les preuves sont duales. Prouvons (5). Le fait que  $F$  préserve les cofibrations et les cofibrations triviales est un jeu facile avec les foncteurs adjoints. Le point non trivial est le dernier. Soit donc  $f : X \rightarrow Y$  une équivalence faible entre objets cofibrants de  $\mathcal{C}$ . On écrit  $f = pj$ , où  $j : X \rightarrow Z$  est une cofibration triviale et  $p : Z \rightarrow Y$  est une fibration (automatiquement triviale aussi, puisque  $f$  et  $j$  sont des équivalences faibles). On sait déjà que  $F(j)$  est une équivalence faible, donc il suffit de montrer que  $F(p)$  est une équivalence faible. Cela va résulter des deux points suivants :

- (i) La fibration triviale entre objets cofibrants  $p$  est automatiquement une équivalence d'homotopie.
- (ii) Le morphisme  $F(p)$  est aussi une équivalence d'homotopie.

Les deux points sont vrais en général, mais on va supposer que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont des catégories de modèles simpliciales pour simplicier. Pour montrer (i), noter qu'en utilisant le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

on obtient  $s : Y \rightarrow Z$  tel que  $ps = \text{id}_Y$ . Il reste à montrer que  $sp$  est homotope à  $\text{id}_Z$ . On considère le carré commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Z \otimes \partial\Delta[1] & \xlongequal{\quad} & Z \sqcup Z & \xrightarrow{(ps, \text{id}_Z)} & Z \\ \downarrow & & & \nearrow h & \downarrow p \\ Z \otimes \Delta[1] & \longrightarrow & Z \otimes \Delta[0] & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

La flèche verticale de gauche est une cofibration (par de l'abstract nonsense général à partir de la condition de la définition 5.4.6), donc le morphisme diagonal  $h$  existe et fournit l'homotopie cherchée.

Pour montrer (ii), comme  $F(s)F(p) = \text{id}_{F(Y)}$ , il suffit de montrer que  $F(p)F(s)$  est homotope à  $\text{id}_{F(Z)}$ . Si on savait que  $F$  commute avec le produit tensoriel externe  $\cdot \otimes A_\bullet$ ,  $A_\bullet \in \text{Ob sEns}$ , ce serait facile car  $F(h)$  serait l'homotopie cherchée. Malheureusement, on ne le sait pas. Remarquons tout de même qu'on a des isomorphismes canoniques

$$F(Z \otimes \Delta[0]) = F(Z)$$

$$F(Z \otimes \partial\Delta[1]) = F(Z \sqcup Z) = F(Z) \sqcup F(Z)$$

( $F$  commute aux coproduits car c'est un adjoint à gauche), et que  $F(Z \otimes \Delta[1]) \rightarrow F(Z \otimes \Delta[0]) = F(Z)$  est une équivalence faible (car les deux morphismes  $F(Z \otimes \Delta[0]) \rightarrow F(Z \otimes \Delta[1])$ ) sont des cofibrations triviales. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z \sqcup Z & & \\ \downarrow & \searrow & \\ F(Z \otimes \Delta[1]) & \longrightarrow & Z \end{array}$$

est donc ce que Quillen appelle un "objet cylindre" pour  $Z$  (cf [8] II.1.4), ce qui signifie qu'il peut servir comme source des homotopies (des homotopies à gauche en général, cf [8] II.1.5) et donc que  $F(h)$  donne l'homotopie cherchée.<sup>51</sup>

□

**Exemple 5.8.3.** Soit  $\mathcal{J}$  une petite catégorie, et soient  $\mathcal{C} = \mathbf{Fonc}(\mathcal{J}, \mathbf{sEns})$  et  $\mathcal{D} = \mathbf{sEns}$ .<sup>52</sup> On a une paire  $(F, G)$  de foncteurs adjoints entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  : le foncteur  $F$  envoie  $H : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{sEns}$  sur sa limite inductive, et le foncteur  $G$  envoie un ensemble simplicial  $X_\bullet$  sur le foncteur constant de valeur  $X_\bullet$ . De plus, si on met la structure de modèles projective sur  $\mathcal{C}$  (voir l'exemple 5.3.9), alors il est clair que  $G$  préserve les fibrations et les fibrations triviales. Le théorème ci-dessus implique que  $F$  admet un foncteur dérivé à gauche, qui est le foncteur limite inductive homotopique  $\underline{\text{holim}}_{\mathcal{J}}$  mentionné dans la remarque 5.1.10.

Indiquons la méthode de calcul standard de  $\underline{\text{holim}}_{\mathcal{J}}$  (une référence pour ceci est le chapitre IV de [8]).<sup>53</sup> Soit  $H : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{sEns}$  un foncteur. On construit un ensemble bisimplicial  $X_{\bullet, \bullet}$  de la manière suivante : pour tous  $m, n \geq 0$ ,

$$X_{m, n} = \coprod_{(i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_m) \in N(\mathcal{J})_m} H(i_0)_n.$$

Alors  $\underline{\text{holim}}_{\mathcal{J}} H = (X_{n, n})_{n \geq 0}$ .

51. Ok, c'est de la triche.

52. On pourrait remplacer  $\mathbf{sEns}$  par  $\mathbf{sGrp}$ ,  $\mathbf{sR-Mod}$  etc.

53. plus précis serait mieux

## 6 Autres exemples de foncteurs dérivés

### 6.1 Produit tensoriel

On a plusieurs versions du produit tensoriel, selon qu'on le voit comme un foncteur sur les modules ou les anneaux.

Soit  $R_\bullet$  un anneau commutatif unitaire simplicial. On définit un foncteur  $\otimes_{R_\bullet} : R_\bullet\text{-Mod} \times R_\bullet\text{-Mod} \longrightarrow R_\bullet\text{-Mod}$ <sup>54</sup> par

$$(M_\bullet \otimes_{R_\bullet} N_\bullet) = M_n \otimes_{R_n} N_n.$$

On définit de même un foncteur  $\otimes_{R_\bullet} : R_\bullet\text{-Alg} \times R_\bullet\text{-Alg} \longrightarrow R_\bullet\text{-Alg}$ . Ces deux foncteurs se correspondent par les foncteurs d'oubli  $R_\bullet\text{-Alg} \longrightarrow R_\bullet\text{-Mod}$ . (Contrairement aux foncteurs Hom.)

Comme avant, on met la structure de modèles produit sur  $R_\bullet\text{-Mod} \times R_\bullet\text{-Mod}$  et  $R_\bullet\text{-Alg} \times R_\bullet\text{-Alg}$ . Comme  $\otimes_{R_\bullet}$  a un adjoint à droite en chaque facteur, il est raisonnable d'essayer de le dériver à gauche. Grâce à la description des objets cofibrants dans 5.5.2, 5.5.3 et 5.5.4, on voit facilement que les deux versions de  $\otimes_{R_\bullet}$  préservent les équivalences faibles entre objets cofibrants. D'après le théorème 5.8.1, elles admettent donc des foncteurs dérivés à gauche, que l'on note  $\otimes_{R_\bullet}^L$ ; de plus, comme le foncteur d'oubli  $R_\bullet\text{-Alg} \longrightarrow R_\bullet\text{-Mod}$  préserve les objets cofibrants,<sup>55</sup> les deux foncteurs  $\otimes_{R_\bullet}^L$  se correspondent encore par ce foncteur d'oubli.

### 6.2 Hom simplicial et Spec dérivé

Soit  $\mathcal{D}$  une catégorie de modèles simpliciale (par exemple  $\mathbf{sEns}$ ,  $\mathbf{sGrp}$ ,  $\mathbf{sR-Mod}$  ou  $\mathbf{sR-Alg}$ ). On veut dériver le foncteur Hom interne  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{sEns}$  où on convient qu'une paire de morphismes  $(u, v)$  de  $\mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D}$  est une équivalence faible si et seulement si  $u$  et  $v$  sont des équivalences faibles. Vu les propriétés d'exactitude de Hom $_{\mathcal{D}}$ , on va essayer de le dériver à droite.

Remarquons qu'il existe une structure de modèles sur  $\mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D}$  qui a les équivalences faibles spécifiées : c'est simplement le produit de la structure de modèles donnée sur  $\mathcal{D}$  et de la structure de modèles duale sur  $\mathcal{D}^{\text{op}}$ . En d'autres termes, un morphisme  $(u, v)$  de  $\mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D}$  est une fibration (resp. cofibration) si et seulement si  $u$  est une cofibration (resp. une fibration) et  $v$  est une fibration (resp. une cofibration). On voudrait essayer d'appliquer le point 2 du théorème 5.8.1. Pour cela, il faut vérifier que Hom $_{\mathcal{D}}$  préserve les équivalences faibles entre objets fibrants. Vu la définition de la structure de modèles sur  $\mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D}$ , ceci revient à vérifier les deux propriétés suivantes :

- (a) Pour tout objet cofibrant  $A$  de  $\mathcal{D}$ , le foncteur  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, \cdot) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{sEns}$  préserve les équivalences entre objets fibrants.

54. Voir 5.5.4 pour la définition de  $R_\bullet\text{-Mod}$ . Si  $R_\bullet$  est constant, c'est la catégorie des  $R$ -modules simpliciaux.

55. à vérifier quand même ; en tout cas il préserve assez d'objets cofibrants

(b) Pour tout objet fibrant  $B$  de  $\mathcal{D}$ , le foncteur  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(\cdot, B) : \mathcal{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{sEns}$  préserve les équivalences entre objets cofibrants.

Les preuves des deux propriétés sont similaires. Montrons par exemple (a). Par la propriété des  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}$  énoncée dans la définition 5.4.6, appliquée à la cofibration  $\emptyset \rightarrow A$  et à une fibration (resp. une fibration triviale)  $X \rightarrow Y$ , le foncteur  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, \cdot)$  préserve les fibrations et les fibrations triviales.<sup>56</sup> Par le point 5 du théorème 5.8.1, l'adjoint à gauche  $A \otimes \cdot : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathcal{D}$  de  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, \cdot)$  préserve les cofibrations et les cofibrations triviales, et donc, par le point 6 du même théorème, le foncteur  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, \cdot)$  préserve les équivalences faibles entre objets fibrants.

Une fois que l'on a prouvé (a) et (b), le point 2 du théorème 5.8.1 dit que  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{sEns}$  admet un foncteur dérivé à droite, qui est donné par le foncteur  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(R_c(\cdot), R_f(\cdot))$ , où  $R_c$  et  $R_f$  sont des foncteurs de remplacement cofibrant et fibrant dans  $\mathcal{D}$ .

*Remarque 6.2.1.* On pourrait dériver de la même façon les foncteurs  $\otimes : \mathcal{D} \times \mathbf{sEns} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $\underline{\text{hom}}_{\mathcal{D}} : \mathbf{sEns}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ .

*Remarque 6.2.2.* Si  $\mathcal{D}$  est l'une des catégories  $\mathbf{sEns}$ ,  $\mathbf{sGrp}$ ,  $\mathbf{sR-Mod}$  ou  $\mathbf{sAlg}$ , alors on peut prendre l'un des deux foncteurs  $R_c$  et  $R_f$  égal à l'identité ( $R_c$  dans le premier cas, et  $R_f$  dans les autres cas). On retrouve le fait, qui est vrai aussi dans la catégorie des complexes d'une catégorie abélienne, qu'il suffit de dériver le foncteur  $\text{Hom}$  d'un seul côté.

Si  $\mathcal{D} = \mathbf{sR-Mod}$ , alors  $\mathcal{D} \simeq C_{\geq 0}(R\text{-Mod})$  par le théorème de Dold-Kan, et  $R\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}$  est le foncteur  $R\text{Hom}$  habituel, calculé en utilisant une résolution projective du premier facteur.

Supposons maintenant que  $\mathcal{D} = \mathbf{sR-Alg}$ . Si  $A$  est une  $R$ -algèbre commutative, on pense à  $R\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, \cdot)$  comme à la version dérivée du schéma affine  $\text{Spec } A$ , et on le note donc  $R\text{Spec } A$ . Pour calculer ce foncteur, on choisit un remplacement cofibrant  $A_{\bullet} \rightarrow A$  de  $A$  et on forme le foncteur  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A_{\bullet}, \cdot)$ . (Ceci suffit car tout objet de  $\mathbf{sR-Alg}$  est fibrant.)

*Remarque 6.2.3.* Je n'ai pas défini la catégorie des schémas dérivés affines, et ceci est délibéré. En effet, pour mieux gérer les problèmes de recollement, le plus simple est de voir cette catégorie comme la  $(\infty, 1)$ -catégorie associée à la catégorie opposée de la catégorie de modèles simpliciale  $\mathbf{sR-Alg}$ .

57

**Exemple 6.2.4.** Si par exemple  $A$  est une algèbre de polynômes sur  $R$ , c'est-à-dire si  $\text{Spec } A$  est un espace affine sur  $R$ , alors la  $R$ -algèbre simpliciale constante de valeur  $A$  est cofibrante par la proposition 5.5.4, donc  $R\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, \cdot) = R\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, \cdot)$ . En revanche, si par exemple  $A = R[T, T^{-1}]$ , c'est-à-dire si  $\text{Spec } A = \mathbb{G}_{m,R}$ , alors  $R\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, \cdot)$  n'est pas égal à  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, \cdot)$ , car  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, \cdot)$  ne préserve pas les équivalences faibles.<sup>58</sup>

56. On utilise aussi le fait que, pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{D}$ ,  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(\cdot, X)$  envoie l'objet initial de  $\mathcal{D}$  sur son objet final, ce qui résulte du fait que ce foncteur a un adjoint à gauche.

57. plus tard, revenir et ajouter un lien vers la bonne définition de la catégorie des schémas dérivés affines

58. Il est plus facile de voir ceci en pensant aux  $R$ -algèbres simpliciales comme à des  $R$ -algèbres topologiques, où  $R$  a la topologie discrète, ce qui ne fait pas de différence au niveau des catégories homotopiques. Si par exemple  $R = \mathbb{Z}$ , alors l'inclusion  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  est une équivalence faible, mais l'inclusion  $\mathbb{G}_m(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\times} \subset \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\times}$  n'est pas une équivalence faible.

*Remarque 6.2.5.* Si  $A = R[T, T^{-1}]$ , ou plus généralement si  $A$  est l'algèbre des fonctions sur un  $R$ -schéma en groupes (c'est-à-dire une  $R$ -algèbre de Hopf), alors le foncteur  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(A, \cdot)$  se factorise par la catégorie  $\text{sGrp}$ , et il est naturel de demander si on peut dériver le foncteur  $\text{s}R\text{-Alg} \rightarrow \text{sGrp}$  résultant. En d'autres termes, si  $\text{Spec } A$  est un  $R$ -schéma en groupes, on voudrait que sa version dérivée soit un  $R$ -schéma en groupes dérivé et pas juste un  $R$ -schéma dérivé, par exemple pour pouvoir définir des schémas de représentations dérivés.

La méthode ci-dessus ne marche pas, car un remplacement cofibrant de  $A$  n'a aucune raison d'être une algèbre de Hopf simpliciale (et la méthode du théorème 5.3.4 ne permet pas de construire un remplacement cofibrant par une algèbre de Hopf simpliciale, car on n'a pas de notion d'algèbre de Hopf libre sur un ensemble ou sur un  $R$ -module). On verra plus tard<sup>59</sup> comment résoudre ce problème.

**Exemple 6.2.6.** Voici un exemple un peu moins trivial de schéma affine dérivé (qui résout en partie le problème ci-dessus pour le schéma en groupes  $\text{GL}_{n,R}$ ; voir la remarque 4.39 et le début de 5.1 dans [5]). Soit comme plus haut  $A$  une  $R$ -algèbre, on a défini plus haut le foncteur  $R\text{Spec}(A) : \text{s}R\text{-Alg}^{\text{op}} \rightarrow \text{sEns}$ , mais il n'est pas facile de voir à quoi il ressemble si on utilise un remplacement cofibrant quelconque de  $A$ .

Supposons que l'on dispose d'un morphisme de  $R$ -algèbres  $R[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A$  tel que le morphisme de schémas  $\text{Spec } A \rightarrow \mathbb{A}_R^n$  soit une immersion. Alors  $R\text{Spec}(A)$  est le foncteur qui envoie  $B_{\bullet} \in \text{Ob}(R_{\bullet}\text{-Alg})$  sur l'union des composantes connexes de  $R\text{Spec}(R[T_1, \dots, T_n])(B_{\bullet}) = B_{\bullet}^n$  correspondant aux éléments de  $\pi_0(B_{\bullet})^n = \text{Spec}(R[T_1, \dots, T_n])(\pi_0(B_{\bullet}))$  qui sont dans l'ouvert  $\text{Spec}(A)(\pi_0(B_{\bullet}))$ . Ceci résulte de la proposition ci-dessous (par une récurrence facile sur le nombre de générateurs de l'idéal de  $\mathbb{A}_R^n - \text{Spec}(A)$ ).

En particulier, en prenant  $A = R[T_{ij}, 1 \leq i, j \leq n]_{\left[\frac{1}{\det}\right]}$  (l'algèbre des fonctions régulières sur  $\text{GL}_{n,R}$ ), on peut réaliser comme  $R\text{Spec}(A)$  comme un foncteur à valeurs dans la catégorie des monoïdes simpliciaux.

**Proposition 6.2.7.** Soient  $A_{\bullet}$  une  $R$ -algèbre simpliciale cofibrante (par exemple une algèbre de polynômes sur  $R$ ) et soit  $f \in A_0$ . Alors,  $R\text{Spec}(A_{\bullet}[f^{-1}])$  est le foncteur qui envoie  $B_{\bullet} \in \text{Ob}(R_{\bullet}\text{-Alg})$  sur l'union des composantes connexes de  $R\text{Spec}(A_{\bullet})(B_{\bullet}) = \underline{\text{Hom}}_{R_{\bullet}\text{-Alg}}(A_{\bullet}, B_{\bullet})$  correspondant aux éléments de  $\text{Hom}_{R_{\bullet}\text{-Alg}}(A_{\bullet}, B_{\bullet})$  qui envoient  $f$  sur un élément inversible de  $B_0$ .

*Démonstration.* Pour tout ensemble simplicial  $X_{\bullet}$ , on note  $R[X_{\bullet}]$  la  $R$ -algèbre libre sur  $X_{\bullet}$ .<sup>60</sup> Alors

$$A_{\bullet}[f^{-1}] = R[\Delta[0]] \otimes_{R[\partial\Delta[1]]} A_{\bullet}[T],$$

où le morphisme  $R[\partial\Delta[1]] \rightarrow R[\Delta[0]]$  vient de l'unique morphisme d'ensembles simpliciaux  $\partial\Delta[1] \rightarrow \Delta[0]$ , et le morphisme  $R[\partial\Delta[1]] \simeq R[X, Y] \rightarrow A[T]$  envoie  $X$  sur 1 et  $Y$  sur

59. ref

60. Introduire cette notation plus tôt ?

$fT$ . Pour avoir un remplacement cofibrant de  $A_\bullet[f^{-1}]$ , il suffit donc de trouver un remplacement cofibrant de  $R[\Delta[0]]$  en tant que  $R[\partial\Delta[1]]$ -algèbre. On note que, pour tout ensemble simplicial  $X_\bullet$ , on a  $R[X_\bullet] = R[*] \otimes X_\bullet$ . Comme  $R[*] \simeq R[X]$  est une  $R$ -algèbre cofibrante, que  $\partial\Delta[1] \rightarrow \Delta[1]$  est une cofibration et que  $\Delta[1] \rightarrow \Delta[0]$  est une équivalence faible, il reste formellement des propriétés de  $\underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}$ <sup>61</sup> que  $R[\partial\Delta[1]] \rightarrow R[\Delta[1]]$  est une cofibration et  $R[\Delta[1]] \rightarrow R[\Delta[0]]$  est une équivalence faible. De plus, la caractérisation des fibrations dans  $R_\bullet\text{-Alg}$  (voir l'exemple 5.5.2) implique facilement que  $R[\Delta[1]] \rightarrow R[\Delta[0]]$  est aussi une fibration. Donc  $R[\Delta[1]]$  est le remplacement cofibrant cherché de  $R[\Delta[0]]$ , et un remplacement cofibrant de  $A_\bullet[f^{-1}]$  est  $R[\Delta[1]] \otimes_{R[\partial\Delta[1]]} A_\bullet[T]$ . Si  $B_\bullet$  est une  $R$ -algèbre simpliciale, on a donc

$$\begin{aligned} R\text{Spec}(A_\bullet[f^{-1}](B_\bullet)) &= \underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(R[\Delta[1]] \otimes_{R[\partial\Delta[1]]} A_\bullet[T], B_\bullet) \\ &= \underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(R[\Delta[1]], B_\bullet) \times_{\underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(R[\partial\Delta[1]], B_\bullet)} \underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(A_\bullet[T], B_\bullet) \end{aligned}$$

Pour tout ensemble simplicial  $X_\bullet$ , en utilisant  $R[X_\bullet] = R[*] \otimes X_\bullet$ , on trouve

$$\underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(R[X_\bullet], B_\bullet) = \underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(R[*], \underline{\text{hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(X_\bullet, B_\bullet)) = \underline{\text{hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(X_\bullet, B_\bullet).$$

Donc  $\underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(R[\Delta[1]], B_\bullet)$  est l'espace des chemins (sans origine fixée) de  $B_\bullet$  vu comme un ensemble simplicial,  $\underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(R[\partial\Delta[1]], B_\bullet) = B_\bullet \times B_\bullet$ , et l'application du premier ensemble simplicial dans le deuxième envoie un chemin sur le couple de ses extrémités. D'autre part,

$$\underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(A_\bullet[T], B_\bullet) = \underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(A_\bullet, B_\bullet) \times B_\bullet = R\text{Spec}(A_\bullet)(B_\bullet) \times B_\bullet,$$

et l'application de cet ensemble dans  $\underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(R[\partial\Delta[1]], B_\bullet) = B_\bullet \times B_\bullet$  envoie  $(u_n, b_n) \in \underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(A_\bullet, B_\bullet)_n \times B_n$  sur  $(1, b_n u_n(f))$ . La conclusion de la proposition résulte de ces calculs.

□

### 6.3 Homologie de Quillen

Dans cette section, on présente une construction générale dont le complexe cotangent est un cas particulier.

**Définition 6.3.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Un *groupe abélien* dans  $\mathcal{C}$  est un objet  $X$  muni de morphismes fonctoriels  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$  (multiplication),  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$  (inverse) et  $*$   $\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$  (élément neutre) qui induisent une structure de groupe abélien sur l'ensemble  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ , pour tout  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ .

Un morphisme de groupes abéliens dans  $\mathcal{C}$  est un morphisme de  $\mathcal{C}$  qui est compatible avec la multiplication (et donc avec l'élément neutre aussi).

On note  $\mathcal{C}_{ab}$  la catégorie des groupes abéliens dans  $\mathcal{C}$ .

---

61. En fait du fait que  $R_\bullet\text{-Alg}$  est une catégorie de modèles simpliciale.

*Remarque 6.3.2.* Si  $\mathcal{C}$  admet des produits cartésiens finis et un objet final  $*$ , alors la donnée des morphismes  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$  et  $*$   $\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$  équivaut à celle de morphismes  $m : X \times X \longrightarrow X$ ,  $i : X \longrightarrow X$  et  $e : * \longrightarrow X$ , et le fait que les  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$  soient des groupes abéliens peut se reformuler en disant que certains diagrammes avec  $m$ ,  $i$  et  $e$  commutent.<sup>62</sup>

**Exemple 6.3.3.** - Un groupe abélien dans la catégorie **Ens** est un groupe abélien.

- Plus généralement, si  $\mathcal{C}$  est la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur une catégorie ou des faisceaux d'ensembles sur un site, alors  $\mathcal{C}_{ab}$  est la catégorie des (pré)faisceaux en groupes abéliens sur la même catégorie ou le même site. Par exemple, si  $\mathcal{C} = \mathbf{sEns}$ , alors  $\mathcal{C}_{ab} = \mathbf{sAb}$ .
- Si  $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ , alors  $\mathcal{C}_{ab}$  est la catégorie des groupes topologiques commutatifs.
- Si  $\mathcal{C} = \mathbf{Grp}$ , alors  $\mathcal{C}_{ab}$  est la catégorie des groupes abéliens.

**Définition 6.3.4.** 1. Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On note  $G : \mathcal{C}_{ab} \longrightarrow \mathcal{C}$  le foncteur d'oubli. Le foncteur d'abélianisation  $\text{Ab}$  sur  $\mathcal{C}$  est l'adjoint à gauche de  $G$ , s'il existe.

2. On suppose que  $\mathcal{C}$  a une classe d'équivalences faibles, et on munit  $\mathcal{C}_{ab}$  de la classe d'équivalences faibles qui s'en déduit.<sup>63</sup> On suppose que le foncteur d'abélianisation  $\text{Ab}$  existe. Le foncteur d'homologie de Quillen est le foncteur dérivé à gauche  $L\text{Ab} : \text{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_{ab})$ , s'il existe.

Par exemple, si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_{ab}$  ont des structures de modèles telles que le foncteur d'oubli préserve les fibrations et les cofibrations triviales, alors, par les points 1 et 5 du théorème 5.8.1, le foncteur  $\text{Ab}$  admet un foncteur dérivé à gauche, qui se calcule en composant  $\mathbf{Ab}$  et un foncteur de remplacement cofibrant dans  $\mathcal{C}$ . C'est ce qui arrive dans tous les exemples ci-dessous.

**Exemple 6.3.5.** Si  $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$ , alors  $\mathcal{C}_{ab} = \mathbf{Ab}$ , et l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli est le foncteur  $X \longmapsto \mathbb{Z}X$  (où  $\mathbb{Z}X$  est le  $\mathbb{Z}$ -module libre de base  $X$ ).

**Exemple 6.3.6.** Si  $\mathcal{C} = \mathbf{sEns}$ , alors  $\mathcal{C}_{ab} = \mathbf{sAb}$ , et le foncteur d'abélianisation est  $X_{\bullet} \longmapsto \mathbb{Z}X_{\bullet}$ . Il est déjà exact, donc  $L\text{Ab} = \text{Ab}$ . Si  $Y$  est un espace topologique, alors

$$\pi_*(L\text{Ab}(\text{Sing}(Y)_{\bullet})) = \pi_*(\text{Ab}(\text{Sing}(Y)_{\bullet})) = H_*(\mathbb{Z} \text{Sing}(Y)_{\bullet}) = H_*(Y, \mathbb{Z}).$$

**Exemple 6.3.7.** Si  $\mathcal{C}$  est la catégorie des espaces topologiques pointés, alors  $\mathcal{C}_{ab}$  est la catégorie des groupes topologiques commutatifs. Le foncteur d'abélianisation envoie un espace topologique  $X$  sur le groupe topologique commutatif libre sur  $X$ . Je ne sais pas ce truc existe en général (sans condition sur  $X$ ), mais en tout cas il existe si  $X$  est un  $CW$  complexe (voir l'article [6] de Gelbaum), ce qui suffit à construire un adjoint à gauche  $L\text{Ab}$  du foncteur dérivé à droite du foncteur d'oubli.

---

62. les écrire

63. C'est-à-dire que les équivalences faibles de  $\mathcal{C}_{ab}$  sont les morphismes qui sont des équivalences faibles dans  $\mathcal{C}$ .

Si  $X \in \text{Ob Top}$  et  $Y \rightarrow X$  est un remplacement cofibrant (donc  $Y$  est un  $CW$  complexe), alors  $L\text{Ab}(X) = \text{Ab}(Y)$ , donc, par le théorème de Dold-Thom, <sup>64</sup>

$$\pi_*(L\text{Ab}(X)) = \pi_*(\text{Ab}(Y)) = H_*(Y, \mathbb{Z}) = H_*(X, \mathbb{Z}).$$

**Exemple 6.3.8.** Si  $\mathcal{C} = \text{sGrp}$ , alors  $\mathcal{C}_{ab} = \text{sAb}$ , et le foncteur d'abélianisation envoie  $G_\bullet$  sur le groupe abélien simplicial  $\text{Ab}(G_\bullet)$  défini par

$$\text{Ab}(G_\bullet)_n = G_n/[G_n, G_n].$$

On peut calculer  $L\text{Ab}(G_\bullet)$  en utilisant un remplacement cofibrant de  $G_\bullet$ .

*Fait 6.3.9.* Si  $G$  est un groupe ordinaire vu comme un groupe simplicial constant, alors on a des isomorphismes canoniques pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\pi_n(L\text{Ab}(G)) \simeq H_{n+1}(\mathbb{Z}BG) = H_{n+1}(G, \mathbb{Z}).$$

*Démonstration.* Le deuxième isomorphisme est standard (et résulte du fait que le complexe de Moore non normalisé de  $\mathbb{Z}BG$  est une résolution du  $G$ -module trivial  $\mathbb{Z}$ , voir par exemple le théorème 6.5.3 de [22]).

Soit  $X_\bullet \rightarrow G$  un remplacement cofibrant de  $G$ , par exemple celui donné par la comonade  $X \mapsto F_X$ . On considère l'ensemble bisimplicial  $BG_\bullet$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(BG_\bullet)_{n,\bullet}$  est l'ensemble simplicial  $BX_n$ . On construit le premier isomorphisme en considérant les deux suites spectrales associées au  $\mathbb{Z}$ -module bisimplicial  $\mathbb{Z}BX_\bullet$ , qui convergent toutes les deux vers  $H_*(\mathbb{Z}(BX_\bullet)_{n,n}) = H_*(\mathbb{Z}BG)$ .

En filtrant par le premier degré simplicial, on obtient une suite spectrale de première page

$$E_{pq}^1 = H_q(\mathbb{Z}BX_p) = H_q(X_p, \mathbb{Z}).$$

Comme les groupes  $X_p$  sont libres, on a

$$E_{pq}^1 = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \\ X_p/[X_p, X_p] & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q \geq 2 \end{cases}$$

On a donc

$$E_{pq}^2 = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = q = 0 \\ \pi_p(L\text{Ab}(G)) & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc la suite spectrale dégénère en  $E^2$ , et  $E^\infty = E^2$ .

---

64. Les textes en anglais que j'ai trouvés sur le théorème de Dold-Thom utilisent le monoïde abélien libre au lieu du groupe abélien libre, mais l'article original [1] de Dold-Thom prouve que les deux ont les mêmes groupes d'homotopie. Voir aussi la section I.12 des notes [13] de Klingler.

En filtrant par le deuxième degré simplicial, on obtient une suite spectrale de première page

$$E_{pq}^1 = \begin{cases} N(\mathbb{Z}BG)_q & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

On a donc

$$E_{pq}^2 = \begin{cases} H_q(\mathbb{Z}BG) & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

Donc la suite spectrale dégénère en  $E^2$ , et  $E^\infty = E^2$ . En comparant les deux formules pour  $E^\infty$ , on obtient le premier isomorphisme du fait. □

## 6.4 Complexe cotangent

Soit  $R_\bullet$  un anneau commutatif simplicial. Alors  $R_\bullet\text{-Alg}_{ab}$  est réduite à l'objet 0, donc l'homologie de Quillen de  $sR_\bullet\text{-Alg}$  n'est pas très intéressante. Pour obtenir une catégorie de groupes abéliens plus intéressante, on fixe une  $R_\bullet$ -algèbre commutative  $A_\bullet$  et on considère la catégorie  $R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet$  des  $R_\bullet$ -algèbres  $B_\bullet$  au-dessus de  $A_\bullet$ , c'est-à-dire munies d'un morphisme de  $R_\bullet$ -algèbres  $B_\bullet \rightarrow A_\bullet$ .

**Définition 6.4.1.** - Si  $M_\bullet$  est un  $A_\bullet$ -module, on définit une structure de  $A_\bullet$ -algèbre au-dessus de  $A$  sur  $A_\bullet \oplus M_\bullet$  en posant, pour tout  $n \geq 0$  et tous  $a, b \in A_n$  et  $x, y \in M_n$ ,

$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx).$$

Le morphisme  $A_\bullet \oplus M_\bullet \rightarrow A_\bullet$  est  $(a, x) \mapsto a$ .

- Si  $B_\bullet$  est une  $R_\bullet$ -algèbre et  $M_\bullet$  est un  $B_\bullet$ -module, on note  $\text{Der}_{R_\bullet}(B_\bullet, M_\bullet)$  le groupe abélien des dérivations  $R_\bullet$ -linéaires de  $B_\bullet$  dans  $M_\bullet$ , c'est-à-dire des applications  $R_\bullet$ -linéaires  $\delta_\bullet : B_\bullet \rightarrow M_\bullet$  telles que, pour tout  $n \geq 0$  et tous  $b, b' \in B_n$ , on ait  $\delta_n(bb') = b\delta(b') + b'\delta(b)$ .

La formation de  $A_\bullet \oplus M_\bullet$  est clairement fonctorielle en  $M_\bullet$ .

**Proposition 6.4.2.** (i) Soient  $B_\bullet$  une  $R_\bullet$ -algèbre sur  $A_\bullet$  et  $M_\bullet$  un  $A_\bullet$ -module, vu comme un  $B_\bullet$ -module via le morphisme  $B_\bullet \rightarrow A_\bullet$ . Alors la composition avec la projection  $A_\bullet \oplus M_\bullet \rightarrow M_\bullet$ ,  $(a, x) \mapsto x$ , induit une bijection fonctorielle en  $B_\bullet$  et en  $M_\bullet$

$$\text{Hom}_{R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet}(B_\bullet, A_\bullet \oplus M_\bullet) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{R_\bullet}(B_\bullet, M_\bullet).$$

En particulier,  $A_\bullet \oplus M_\bullet$  est un groupe abélien dans la catégorie  $R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet$ . Son morphisme unité est  $A_\bullet \rightarrow A_\bullet \oplus M_\bullet$ ,  $a \mapsto a \oplus 0$ , et sa multiplication est  $(A_\bullet \oplus M_\bullet) \times_{A_\bullet} (A_\bullet \oplus M_\bullet) \rightarrow A_\bullet \oplus M_\bullet$ ,  $(a \oplus m, a \oplus n) \mapsto a \oplus (m + n)$ .

- (ii) Le foncteur  $A_\bullet\text{-Mod} \longrightarrow (R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet)_{ab}$ ,  $M_\bullet \longmapsto A_\bullet \oplus M_\bullet$ , est une équivalence de catégories.
- (iii) Le foncteur d'abélianisation  $\text{Ab} : R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet \longrightarrow (R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet)_{ab} = A_\bullet\text{-Mod}$  envoie  $B_\bullet \longrightarrow A_\bullet$  sur le  $A_\bullet$ -module  $A_\bullet \otimes_{B_\bullet} \Omega_{B_\bullet/R_\bullet}$ , où  $\Omega_{B_\bullet/R_\bullet}$  est par définition le  $B_\bullet$ -module égal à  $\Omega_{B_n/R_n}$  en degré  $n$ .

*Démonstration.* (i) Notons  $u : B_\bullet \longrightarrow A_\bullet$  le morphisme structural. Si  $f : B_\bullet \longrightarrow A_\bullet \oplus M_\bullet$  est un morphisme dans la catégorie  $R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet$ , alors il est nécessairement de la forme  $u \oplus \delta$ , avec  $\delta : B_\bullet \longrightarrow M_\bullet$  un morphisme de  $R_\bullet$ -modules. Il s'agit donc de montrer que  $\delta$  est une dérivation  $R_\bullet$ -linéaire et que, réciproquement, tout morphisme de la forme  $u \oplus \delta : B_\bullet \oplus A_\bullet \oplus M_\bullet$  avec  $\delta$  une dérivation  $R_\bullet$ -linéaire est automatiquement un morphisme de  $R_\bullet$ -algèbres. Or, si  $n \geq 0$  et  $b, b' \in B_n$ , on a

$$f(bb') = u(bb') \oplus \delta(bb')$$

et

$$f(b)f(b') = u(b)u(b') \oplus (u(b)\delta(b') + u(b')\delta(b)).$$

Le calcul de l'unité et de la multiplication de  $A_\bullet \oplus M_\bullet$  sont évidents (il suffit de voir qu'ils induisent 0 et l'addition sur  $\text{Der}_{R_\bullet}(B_\bullet, M_\bullet)$ ).

- (ii) Soient  $M_\bullet, N_\bullet$  des  $A_\bullet$ -modules. Si  $u : M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$  est  $A_\bullet$ -linéaire, on voit facilement (grâce aux formules pour l'unité et la multiplication de  $A_\bullet \oplus M_\bullet$  et  $A_\bullet \oplus N_\bullet$  dans (i)) que  $\text{id}_{A_\bullet} + u : A_\bullet \oplus M_\bullet \longrightarrow A_\bullet \oplus N_\bullet$  est un morphisme de  $(R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet)_{ab}$ .

Réciproquement, soit  $f : A_\bullet \oplus M_\bullet \longrightarrow A_\bullet \oplus N_\bullet$  un morphisme de  $(R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet)_{ab}$ . Comme  $f$  envoie l'unité de  $A_\bullet \oplus M_\bullet$  sur celle de  $A_\bullet \oplus N_\bullet$ , il est nécessairement de la forme  $\text{id}_{A_\bullet} + u$ , avec  $u : M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ . Le fait que  $f$  soit un morphisme d'algèbres implique que  $u$  est  $A_\bullet$ -linéaire.

On a donc montré que le foncteur de l'énoncé est pleinement fidèle. Montrons qu'il est essentiellement surjectif. Soit donc  $B_\bullet$  un objet de  $(R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet)_{ab}$ . On note  $u : B_\bullet \longrightarrow A_\bullet$  le morphisme structural,  $e : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$  l'unité de  $B_\bullet$  et  $m : B_\bullet \times_{A_\bullet} B_\bullet \longrightarrow B_\bullet$  sa multiplication. Comme  $ue = \text{id}_{A_\bullet}$ , on a  $B_\bullet = A_\bullet \oplus M_\bullet$ , avec  $M_\bullet = \text{Ker}(u) = \text{Im}(e)$  un idéal et un sous- $A_\bullet$ -module de  $B_\bullet$ . Alors  $B_\bullet \times_{A_\bullet} B_\bullet = A_\bullet \oplus (M_\bullet \times M_\bullet)$ . En utilisant le fait que  $e$  est un élément neutre pour  $m$ , on voit que  $m(a + (x, 0)) = m(a + (0, x)) = a + x$ , si  $a \in A_n$  et  $x \in M_n$ . Comme de plus  $m$  est compatible avec l'addition (ordinaire) sur  $A_\bullet \oplus (M_\bullet \times M_\bullet)$  et  $A_\bullet \oplus M_\bullet$ , on en déduit que  $m(a + (x, y)) = a + x + y$ . Montrons que  $M_\bullet$  est un idéal de carré nul de  $B_\bullet$ , ce qui finira la preuve. Soient  $n \geq 0$  et  $x, y \in M_n$ . Alors  $m$  envoie  $(0, y), (1 + x, 1) \in B_n \times_{A_n} B_n$  sur  $y$  et  $1 + x$ , respectivement. Or le produit de ces deux éléments est  $(0, y)$ , dont l'image par  $m$  est  $y$ . Comme  $m$  est compatible avec la multiplication, on en déduit que le produit de  $x$  et  $y$  (dans  $B_n$ ) est nul.

- (iii) Par (i) et la propriété universelle des différentielles de Kähler, on a, pour toute  $R_\bullet$ -algèbre  $B_\bullet$  sur  $A_\bullet$ , on a des isomorphismes canoniques

$$\text{Hom}_{R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet}(B_\bullet, A_\bullet \oplus M_\bullet) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{R_\bullet}(B_\bullet, M_\bullet) =$$

$$\mathrm{Hom}_{B_\bullet\text{-Mod}}(\Omega_{B_\bullet/R_\bullet}, M_\bullet) = \mathrm{Hom}_{A_\bullet\text{-Mod}}(A_\bullet \otimes_{B_\bullet} \Omega_{B_\bullet/R_\bullet}, M_\bullet).$$

□

Comme le foncteur d'oubli  $A_\bullet\text{-Mod} \rightarrow R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet$ ,  $M_\bullet \mapsto A_\bullet \oplus M_\bullet$ , respecte les fibrations et les fibrations triviales, son adjoint à gauche  $\mathbf{Ab}$  admet un foncteur dérivé à gauche. De plus, d'après le théorème 5.8.1, si  $B_\bullet$  est une  $R_\bullet$ -algèbre cofibrante, alors  $\Omega_{B_\bullet/R_\bullet}$  est un  $B_\bullet$ -module cofibrant.<sup>65</sup>

**Définition 6.4.3.** Le complexe cotangent du morphisme d'anneaux simpliciaux  $R_\bullet \rightarrow A_\bullet$  est le  $A_\bullet$ -module  $L\mathrm{Ab}(A_\bullet)$ . On le note  $\mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet}$ ; il est fonctoriel en le morphisme  $R_\bullet \rightarrow A_\bullet$ .

L'homologie d'André-Quillen de  $R_\bullet \rightarrow A_\bullet$  est par définition

$$D_*(A_\bullet/R_\bullet) = \pi_*(\mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet}).$$

homologie d'André-Quillen Plus généralement, si  $M_\bullet$  est un  $A_\bullet$ -module, on pose

$$D_*(A_\bullet/R_\bullet, M_\bullet) = \pi_*(M_\bullet \otimes_{A_\bullet}^L \mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet}).$$

Pour calculer  $\mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet}$ , on choisit un remplacement cofibrant  $X_\bullet \rightarrow A_\bullet$  de  $A_\bullet$  dans  $R_\bullet\text{-Alg}$  (par exemple celui donné par une des comonades de l'exemple 5.7.3, si  $A$  et  $R$  sont constants). Alors

$$\mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet} = A_\bullet \otimes_{X_\bullet} \Omega_{X_\bullet/R_\bullet}.$$

En effet, comme noté juste avant la définition, le  $X_\bullet$ -module  $\Omega_{X_\bullet/R_\bullet}$  est automatiquement cofibrant. On a donc aussi, pour tout  $A_\bullet$ -module  $M_\bullet$ ,

$$D_*(A_\bullet/R_\bullet, M_\bullet) = \pi_*(M_\bullet \otimes_{X_\bullet} \Omega_{X_\bullet/R_\bullet}).$$

*Remarque 6.4.4.* Explicitons la functorialité en  $R_\bullet \rightarrow A_\bullet$  du complexe cotangent. On se donne donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} R_\bullet & \longrightarrow & S_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_\bullet & \longrightarrow & B_\bullet \end{array}$$

et on veut construire un morphisme de  $B_\bullet$ -modules  $B_\bullet \otimes_{A_\bullet}^L \mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet} \rightarrow \mathbb{L}_{B_\bullet/S_\bullet}$ . On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} R_\bullet & \longrightarrow & S_\bullet & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X_\bullet & \longrightarrow & S_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L X_\bullet & \longrightarrow & Y_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_\bullet & \longrightarrow & B_\bullet & \xlongequal{\quad} & B_\bullet \end{array}$$

---

65. C'est vrai, ce mensonge ?

où la première colonne et  $S_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet \longrightarrow B_\bullet$  sont des factorisations de  $R_\bullet \longrightarrow A_\bullet$  et de  $S_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L X_\bullet \longrightarrow B_\bullet$  une cofibration suivie d'une fibration triviale. En particulier,  $X_\bullet$  est un  $R_\bullet$ -algèbre cofibrante, donc  $S_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L X_\bullet = S_\bullet \otimes_{R_\bullet} X_\bullet$  est une  $S_\bullet$ -algèbre cofibrante, donc  $Y_\bullet$  est une  $S_\bullet$ -algèbre cofibrante. Donc

$$\mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet} = A_\bullet \otimes_{X_\bullet} \Omega_{X_\bullet/R_\bullet}$$

et

$$\mathbb{L}_{B_\bullet \otimes S_\bullet} = B_\bullet \otimes_{Y_\bullet} \Omega_{Y_\bullet/S_\bullet}.$$

Le morphisme

$$B_\bullet \otimes_{A_\bullet}^L \mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet} = B_\bullet \otimes_{Y_\bullet} Y_\bullet \otimes_{X_\bullet} \Omega_{X_\bullet/R_\bullet} \longrightarrow \mathbb{L}_{B_\bullet/S_\bullet} = B_\bullet \otimes_{Y_\bullet} \Omega_{Y_\bullet/S_\bullet}$$

vient donc des morphismes  $Y_n \otimes_{X_n} \Omega_{X_n/R_n} \longrightarrow \Omega_{Y_n/S_n}$  donnés par la functorialité de  $\Omega_{././}$ .

*Remarque 6.4.5.* Par la propriété universelle des foncteurs dérivés à gauche, on a un morphisme functoriel  $\mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet} \longrightarrow \Omega_{A_\bullet/R_\bullet}$ , et on voit facilement que ce morphisme induit un isomorphisme  $H_0(\mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet}) = \Omega_{\pi_0(A)/\pi_0(R)}$ .

*Remarque 6.4.6.* Par le théorème 5.8.1, le foncteur  $\text{Ho}(R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet) \longrightarrow \text{Ho}(A_\bullet\text{-Mod})$ ,  $B_\bullet \longmapsto A_\bullet \otimes_{B_\bullet}^L \mathbb{L}_{B_\bullet/R_\bullet}$ , est l'adjoint à gauche du foncteur dérivé à droite de  $M_\bullet \longmapsto A_\bullet \oplus M_\bullet$ . Or ce dernier foncteur préserve les équivalences faibles, donc il se dérive trivialement. On en déduit que l'on a un isomorphisme canonique, functoriel en  $B_\bullet \in \text{Ob}(R_\bullet\text{-Mod}/A_\bullet)$  et en  $M_\bullet \in \text{Ob}(A_\bullet\text{-Mod})$ ,

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet)}(B_\bullet, A_\bullet \oplus M_\bullet) = \text{Hom}_{\text{Ho}(A_\bullet\text{-Mod})}(A_\bullet \otimes_{B_\bullet}^L \mathbb{L}_{B_\bullet/R_\bullet}, M_\bullet) = \text{Hom}_{\text{Ho}(B_\bullet\text{-Mod})}(\mathbb{L}_{B_\bullet/R_\bullet}, M_\bullet).$$

Cet isomorphisme provient en fait d'une équivalence faible canonique

$$\underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet}(B_\bullet, A_\bullet \oplus M_\bullet) \simeq \underline{\text{Hom}}_{B_\bullet\text{-Mod}}(\mathbb{L}_{B_\bullet/R_\bullet}, M_\bullet).$$

66

**Théorème 6.4.7.** 1. Si  $A_\bullet$  est une  $R_\bullet$ -algèbre cofiltrante (par exemple si  $A$  et  $R$  sont constantes et  $A$  est une algèbre de polynômes sur  $R$ ), alors le morphisme  $\mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet} \longrightarrow \Omega_{A_\bullet/R_\bullet}$  est une équivalence faible.

2. Si  $C_\bullet = A_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L B_\bullet$ , alors on a un isomorphisme canonique

$$(B_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L \mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet}) \oplus (A_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L \mathbb{L}_{B_\bullet/R_\bullet}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}_{C_\bullet/R_\bullet}.$$

3. (Changement de base.) Si  $A_\bullet$  et  $B_\bullet$  sont des  $R_\bullet$ -algèbres, on a un isomorphisme canonique

$$(B_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L A_\bullet) \otimes_{A_\bullet}^L \mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet} \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}_{(B_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L A_\bullet)/B_\bullet}.$$

---

66. plus de détails

4. Si on a deux morphismes d'anneaux simpliciaux  $R_\bullet \longrightarrow A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ , alors la suite

$$B_\bullet \otimes_{A_\bullet}^L \mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet} \longrightarrow \mathbb{L}_{B_\bullet/R_\bullet} \longrightarrow \mathbb{L}_{B_\bullet/A_\bullet}$$

(la deuxième flèche vient de la functorialité de  $\mathbb{L}$ , et la première du point précédent et de la functorialité) est une "fiber sequence", donc le triangle qui s'en déduit par l'isomorphisme de Dold-Kan est un triangle distingué.

*Démonstration.* 1. Évident d'après la définition de  $\mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet}$ .

2. On choisit des remplacements cofibrants  $X_\bullet \longrightarrow A_\bullet$  et  $Y_\bullet \longrightarrow B_\bullet$  (dans la catégorie  $R_\bullet\text{-Alg}$ ). Alors  $X_\bullet \otimes_{R_\bullet} Y_\bullet = X_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L Y_\bullet$  est un remplacement cofibrant de  $C_\bullet := A_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L B_\bullet$ , donc il suffit d'utiliser le fait que

$$\Omega_{X_n \otimes_{R_n} Y_n} = (Y_n \otimes_{R_n} \Omega_{X_n/R_n}) \oplus (X_n \otimes_{R_n} \Omega_{Y_n/R_n}).$$

3. Soit  $X_\bullet \longrightarrow A_\bullet$  un remplacement cofibrant dans  $R_\bullet\text{-Alg}$ . Alors  $B_\bullet \otimes_{R_\bullet} X_\bullet$  est un remplacement cofibrant de  $B_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L A_\bullet$  dans  $B_\bullet\text{-Alg}$ , donc

$$\mathbb{L}_{(B_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L A_\bullet)/B_\bullet} = (B_\bullet \otimes_{R_\bullet}^L A_\bullet) \otimes_{(B_\bullet \otimes_{R_\bullet} X_\bullet)} \Omega_{(B_\bullet \otimes_{R_\bullet} X_\bullet)/B_\bullet}.$$

Il suffit donc d'utiliser le fait que

$$\Omega_{B_n \otimes_{R_n} X_n/B_n} = (B_n \otimes_{R_n} X_n) \otimes_{X_n} \Omega_{X_n/R_n}.$$

4. Rappelons d'abord la propriété des différentielles de Kähler dont on va se servir : si  $R \longrightarrow A \longrightarrow B$  est une suite d'anneaux commutatifs (ordinaires), alors la suite

$$B \otimes_A \Omega_{A/R} \longrightarrow \Omega_{B/R} \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

est exacte, et elle est exacte à gauche si de plus  $A \xrightarrow{f} B$  a une rétraction (c'est-à-dire qu'il existe  $g : B \longrightarrow A$  tel que  $gf = \text{id}_A$ ).

On revient à la situation de l'énoncé. Soit  $X_\bullet \longrightarrow A_\bullet$  un remplacement cofibrant dans  $R_\bullet\text{-Alg}$ . On factorise le morphisme  $X_\bullet \longrightarrow A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$  en une cofibration  $i : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$  suivie d'une fibration triviale  $p : Y_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ ; d'après la proposition 5.5.4, on peut supposer (et on le fera) que  $i$  est un morphisme libre. En particulier,  $Y_\bullet$  est cofibrante en tant que  $R_\bullet$ -algèbre et en tant que  $X_\bullet$ -algèbre. On a donc

$$B_\bullet \otimes_{A_\bullet}^L \mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet} = B_\bullet \otimes_{Y_\bullet} Y_\bullet \otimes_{X_\bullet} \Omega_{X_\bullet/R_\bullet}$$

$$\mathbb{L}_{B_\bullet/R_\bullet} = B_\bullet \otimes_{Y_\bullet} \Omega_{Y_\bullet/R_\bullet}$$

et

$$\mathbb{L}_{B_\bullet/A_\bullet} = B_\bullet \otimes_{Y_\bullet} \Omega_{Y_\bullet/X_\bullet}.$$

Il suffit donc de prouver que toutes les suites

$$0 \longrightarrow Y_n \otimes_{X_n} \Omega_{X_n/R_n} \longrightarrow \Omega_{Y_n/R_n} \longrightarrow \Omega_{Y_n/X_n} \longrightarrow 0$$

sont exactes, ce qui résulte du rappel ci-dessus et du fait que le morphisme  $X_n \longrightarrow Y_n$  admet une rétraction (en effet, comme  $X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$  est un morphisme libre,  $Y_n$  est isomorphe à un  $X_n \otimes_{R_n} S_{R_n}(M_n)$ , où  $M_n$  est un  $R_n$ -module).

□

Le théorème suivant résulte d'une construction plus fine de résolutions (non fonctorielles) sous des conditions de finitude adéquates. (Voir par exemple le théorème 7.8.6 de [7].)

**Théorème 6.4.8.** *Si  $R$  est Noethérien et  $A$  est une  $R$ -algèbre de type fini, alors tous les  $D_n(A/R)$  sont des  $A$ -modules de type fini.*

**Théorème 6.4.9.** *Soit  $R$  un anneau commutatif.*

1. *Si  $A$  est la  $R$ -algèbre symétrique d'un  $R$ -module projectif  $P$ , alors  $\mathbb{L}_{A/R} \simeq \Omega_{A/R} \simeq A \otimes_R P$ .*
2. *Si  $R \longrightarrow A$  est un morphisme faiblement étale,<sup>67</sup> alors  $\mathbb{L}_{A/R} = 0$ .*
3. *Si  $A$  est une  $R$ -algèbre et  $S$  est un sous-ensemble multiplicatif de  $A$ , alors le morphisme de fonctorialité  $S^{-1}A \otimes_A^L \mathbb{L}_{A/R} \longrightarrow \mathbb{L}_{S^{-1}A/R}$  est un isomorphisme.*
4. *Si  $R \longrightarrow A$  est un morphisme lisse, alors  $\mathbb{L}_{A/R} \longrightarrow \Omega_{A/R}$  est une équivalence faible.*
5. *Pour tout morphisme  $R \longrightarrow A$ , le complexe tronqué  $\tau_{\leq 1} \mathbb{L}_{A/R}$  est isomorphe au complexe  $I/I^2 \longrightarrow \Omega_{P/R} \otimes_R A$ , où  $P$  est la  $R$ -algèbre de polynômes sur l'ensemble d'indéterminées  $A$  et  $I$  est le noyau du morphisme de  $R$ -algèbres évident  $P \longrightarrow A$ .*
6. *Si  $R \longrightarrow A$  est un morphisme localement d'intersection complète, alors  $\mathbb{L}_{A/R}$  est un complexe parfait de Tor-amplitude  $[0, 1]$ .*

*Démonstration.* 1. Comme  $A$  est une  $R$ -algèbre cofiltrante, il suffit de prouver le deuxième isomorphisme.

On écrit  $P \oplus Q = F$ , où  $Q$  est un autre  $R$ -module et  $F$  est un  $R$ -module libre. Si  $A' = S_R(F)$ , on a un isomorphisme canonique  $\Omega_{A'/R} = A' \otimes_R F$ . La suite d'anneaux  $R \longrightarrow A' \longrightarrow A$  donne donc une suite exacte courte

$$I/I^2 \longrightarrow A \otimes_{A'} \Omega_{A'/R} = A \otimes_R F \xrightarrow{u} \longrightarrow \Omega_{A/R},$$

où  $I = \text{Ker}(A' \longrightarrow A)$ . Zariski localement sur  $\text{Spec } R$ , le  $R$ -module  $P$  est libre et le morphisme  $A \otimes_R P \longrightarrow A \otimes_R F \xrightarrow{u} \Omega_{A/R}$  est un isomorphisme. Comme le foncteur  $\Omega$  est compatible à la localisation, la conclusion en résulte.

2. a) Si on a des morphismes d'anneaux  $R \longrightarrow R' \longrightarrow A$  tels que  $A \otimes_R^L R' \longrightarrow A$  soit un isomorphisme, alors  $\mathbb{L}_{A/R} \longrightarrow \mathbb{L}_{A/R'}$  est un isomorphisme.  
En effet, on a un triangle distingué de  $A$ -modules simpliciaux, par le théorème 6.4.7(4),

$$A \otimes_{R'}^L \mathbb{L}_{R'/R} \longrightarrow \mathbb{L}_{A/R} \longrightarrow \mathbb{L}_{A/R'},$$

---

67. C'est-à-dire que les morphismes  $R \longrightarrow A$  et  $A \otimes_R A \longrightarrow A$  sont plats.

et, par le point (3) du même théorème,

$$A \otimes_{R'}^L \mathbb{L}_{R'/R} = \mathbb{L}_{A/A \otimes_{R'}^L R} = 0.$$

b) Soit  $R \rightarrow A$  un morphisme d'anneaux tel que  $A \otimes_R^L A \rightarrow A$  soit un isomorphisme. Alors  $\mathbb{L}_{A/R} = 0$ .

En effet, par le point (a), on a  $\mathbb{L}_{A/R} = \mathbb{L}_{A/A} = 0$ .

c) Soit  $R \rightarrow A$  un morphisme d'anneaux tel que  $\mathrm{Tor}_i^R(A, A) = 0$  pour tout  $i \geq 1$  (c'est-à-dire que  $A \otimes_R^L A = A \otimes_R A$ ) et  $\mathbb{L}_{A/A \otimes_R^L A} = 0$ . Alors  $\mathbb{L}_{A/R} = 0$ .

En effet, on a un triangle distingué

$$A \otimes_{A \otimes_R A}^L \mathbb{L}_{A \otimes_R A/A} \rightarrow \mathbb{L}_{A/A} \rightarrow \mathbb{L}_{A/A \otimes_R A}$$

dont les deux derniers termes sont nuls, donc  $A \otimes_{A \otimes_R A}^L \mathbb{L}_{A \otimes_R A/A} = 0$ . Or, par le changement de base ((3) du théorème 6.4.7),

$$A \otimes_{A \otimes_R A}^L \mathbb{L}_{A \otimes_R A/A} = A \otimes_{A \otimes_R A}^L (A \otimes_R A) \otimes_A^L \mathbb{L}_{A/R} = \mathbb{L}_{A/R}.$$

d) Si  $R \rightarrow A$  est un morphisme d'anneaux plat tel que le morphisme  $A \otimes_R A \rightarrow A$  soit aussi plat, alors  $\mathbb{L}_{A/R} = 0$ .

En effet, en appliquant (b) au morphisme  $A \otimes_R A \rightarrow A$ , on voit que  $\mathbb{L}_{A/A \otimes_R A} = 0$ . Par (c), on en déduit que  $\mathbb{L}_{A/R} = 0$ .

3. On a un triangle distingué

$$S^{-1}A \otimes_A^L \mathbb{L}_{A/R} \rightarrow \mathbb{L}_{S^{-1}A/R} \rightarrow \mathbb{L}_{S^{-1}A/A},$$

dont le troisième terme est nul par le point (2).

4. On sait déjà que  $\pi_0(\mathbb{L}_{A/R}) = \Omega_{A/R}$ , donc il suffit de montrer que  $\pi_i(\mathbb{L}_{A/R}) = 0$  pour  $i \geq 1$ . Par le point (3), on peut supposer que  $R \rightarrow A$  est de la forme  $R \rightarrow R[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A$ , où le deuxième morphisme est étale. Le triangle distingué (et le point (2)) donnent un isomorphisme  $A \otimes_{R[T_1, \dots, T_n]}^L \mathbb{L}_{R[T_1, \dots, T_n]/R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}_{A/R}$ , et le point (1) donne  $\mathbb{L}_{R[T_1, \dots, T_n]/R} \simeq R[T_1, \dots, n]^{\oplus n}$ . Comme  $A$  est plat sur  $R[T_1, \dots, T_n]$ , on en déduit que  $\mathbb{L}_{A/R}$  est concentré en degré 0.

5. Cf [21, Tag 08R6] ou le corollaire III.1.2.9.1 de [11].

6. a) On suppose que  $R = \mathbb{Z}[x]$ ,  $A = \mathbb{Z}$ , et que le morphisme  $R \rightarrow A$  est donné par  $x \mapsto 0$ . On note  $I = (x) \subset R$ . Alors  $\mathbb{L}_{A/R} \simeq I/I^2[1]$  (c'est-à-dire que  $\pi_i(\mathbb{L}_{A/R}) = 0$  si  $i \neq 1$  et que  $\pi_1(\mathbb{L}_{A/R}) = I/I^2$ ).

En effet, on a un triangle distingué (donné par la suite de morphismes  $A \rightarrow R \rightarrow A$ )

$$A \otimes_R^L \mathbb{L}_{R/A} \rightarrow \mathbb{L}_{A/A} \rightarrow \mathbb{L}_{A/R}.$$

De plus,  $\mathbb{L}_{A/A} = 0$  et  $\mathbb{L}_{R/A} = \Omega_{\mathbb{Z}[x]/\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}x$ .

b) Soit  $R \rightarrow A$  un morphisme d'anneaux surjectif dont le noyau  $I$  est engendré par une suite régulière. Alors  $\mathbb{L}_{A/R} \simeq I/I^2[1]$ .

En effet, grâce au point (5), il suffit de prouver que  $\mathbb{L}_{A/R}$  est un  $A$ -module libre concentré en degré 1. (Le fait que  $\mathbb{L}_{A/R}$  soit libre sert à faire marcher la récurrence.) On écrit  $I = (t_1, \dots, t_r)$ , et on raisonne par récurrence sur  $r$ . Si  $r = 1$ , le résultat vient de (a) et du changement de base. Supposons que  $r \geq 2$  et que l'on connaît le résultat pour  $r - 1$ . Soit  $A' = R/(f_1, \dots, f_{r-1})$ , alors  $A = A'/(f_r)$ . Par l'hypothèse de récurrence,  $\mathbb{L}_{A/A'}$  et  $\mathbb{L}_{A'/R}$  sont concentrés en degré 1 et libres sur  $A$  et  $A'$ . On conclut grâce au triangle distingué

$$A \otimes_{A'}^L \mathbb{L}_{A'/R} \rightarrow \mathbb{L}_{A/R} \rightarrow \mathbb{L}_{A/A'}.$$

c) Finalement, soit  $R \rightarrow A$  un morphisme localement d'intersection complète. On veut montrer que  $\mathbb{L}_{A/R}$  est un complexe parfait de Tor-amplitude  $[0, 1]$ .

Par définition (cf [21, Tag 07D0]),  $R \rightarrow A$  se factorise en  $R \rightarrow R' \rightarrow A$ , avec  $R'$  une algèbre de polynômes sur  $R$  et  $R' \rightarrow A$  surjectif de noyau un idéal Koszul-régulier. En utilisant le triangle distingué pour  $R \rightarrow R' \rightarrow A$ , on se ramène donc au cas où  $R = R'$ .

On suppose donc que  $R \rightarrow A$  est surjectif, et on note  $I$  son noyau. Localement Zariski sur  $R$ , l'idéal  $I$  est engendré par une suite régulière, par [21, Tag 09CC]). Grâce au changement de base, on peut supposer que l'on est dans ce cas, et alors la conclusion résulte de (b).

□

## 6.5 Déformations

Commençons par un rappel de la théorie classique. On fixe un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow B$ , une suite exacte  $0 \rightarrow I \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow 0$  avec  $I$  un idéal de carré nul de  $A'$ , un  $B$ -module  $N$  et un morphisme de  $A$ -modules  $c : I \rightarrow N$ . Une *solution* du problème de déformations associé est un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow c & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

(avec  $B' \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux). On dira souvent simplement que  $B'$  est une solution du problème de déformations.

Un *morphisme de solutions* est un morphisme de diagrammes commutatifs qui est l'identité sur tous les objets fixés au début.

Le théorème suivant est contenu dans la section IV.3 de [11], mais l'énoncé donné ici est pris dans [21, Tag 08SM].

**Théorème 6.5.1.** *On fixe un problème de déformations comme ci-dessus, et on identifie  $\mathbb{L}_{B/A}$  avec son image dans  $C_{\geq 0}(B\text{-Mod})$  donnée par l'isomorphisme de Dold-Kan.*

1. *Si on a deux solutions  $B'_1, B'_2$  du problème de déformations, alors le groupe des morphismes de  $B'_1$  dans  $B'_2$  est un toseur sous  $\text{Hom}_{D_{\geq 0}(B\text{-Mod})}(\mathbb{L}_{B/A}, N)$ .*
2. *S'il existe une solution du problème de déformations, alors l'ensemble des classes d'isomorphismes de solutions est un toseur sous  $\text{Hom}_{D_{\geq 0}(B\text{-Mod})}(\mathbb{L}_{B/A}, N[1])$ .*
3. *Le problème de déformations définit canoniquement un élément  $\xi \in \text{Hom}_{D_{\geq 0}(B\text{-Mod})}(\mathbb{L}_{B/A}, N[2])$ , qui est nul si et seulement si le problème a une solution.*

*Remarque 6.5.2.* Le point le plus difficile est (2). Le point (1) est assez facile, et le point (3) résulte de (2) et du formalisme du complexe cotangent. En effet, supposons que l'on sache prouver (2). Alors l'extension  $0 \rightarrow I \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow 0$  correspond à un élément  $\alpha$  de  $\text{Hom}_{D_{\geq 0}(A\text{-Mod})}(\mathbb{L}_{A/\mathbb{Z}}, N[1]) = \text{Hom}_{D_{\geq 0}(B\text{-Mod})}(B \otimes_A^L \mathbb{L}_{A/\mathbb{Z}}, N[1])$ . Une extension  $0 \rightarrow N \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow 0$  correspond à un élément  $\beta$  de  $\text{Hom}_{D_{\geq 0}(B\text{-Mod})}(\mathbb{L}_{B/\mathbb{Z}}, N[1])$ , et la commutativité du diagramme ci-dessus revient à dire que  $\beta$  s'envoie sur  $\alpha$  par le morphisme induit par  $B \otimes_A^L \mathbb{L}_{A/\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{L}_{B/\mathbb{Z}}$ . Or on a un triangle distingué

$$B \otimes_A^L \mathbb{L}_{A/\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{L}_{B/\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{L}_{B/A},$$

d'où une suite exacte

$$\text{Hom}_{D_{\geq 0}(B\text{-Mod})}(\mathbb{L}_{B/\mathbb{Z}}, N[1]) \rightarrow \text{Hom}_{D_{\geq 0}(B\text{-Mod})}(B \otimes_A^L \mathbb{L}_{A/\mathbb{Z}}, N[1]) \rightarrow \text{Hom}_{D_{\geq 0}(B\text{-Mod})}(\mathbb{L}_{B/A}, N[2]),$$

et il suffit de prendre pour  $\xi$  l'image de  $\alpha$  par le deuxième morphisme de cette suite exacte.

On donne maintenant une version de ces résultats prenant en compte les déformations d'ordre supérieur, prise dans [14]. Noter que les indications de preuve données ci-dessous ne sont pas rigoureuses et ne le deviennent que lorsque l'on utilise le langage des  $(\infty, 1)$ -catégories.

Soient  $A_\bullet$  un anneau simplicial,  $B_\bullet$  une  $A_\bullet$ -algèbre et  $M_\bullet$  un  $B_\bullet$ -module.

**Définition 6.5.3.** ([14] définition 3.3.1) Une *petite extension* de  $B_\bullet$  par  $M_\bullet$  au-dessus de  $A_\bullet$  est la donnée d'un élément  $\alpha$  de  $\text{Hom}_{\text{Ho}(B_\bullet\text{-Mod})}(\mathbb{L}_{B_\bullet/A_\bullet}, M_\bullet[1])$ .<sup>68</sup>

On a vu (remarque 6.4.6) que

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(B_\bullet\text{-Mod})}(\mathbb{L}_{B_\bullet/A_\bullet}, M_\bullet[1]) = \text{Hom}_{\text{Ho}(R_\bullet\text{-Mod}/A_\bullet)}(B_\bullet, A_\bullet \oplus M_\bullet[1]).$$

Soit  $X_\bullet$  un remplacement cofibrant de  $B_\bullet$  dans  $R_\bullet\text{-Mod}$ . La donnée de  $\alpha$  équivaut à celle d'un morphisme  $s : X_\bullet \rightarrow X_\bullet \oplus M_\bullet[1]$  (bien déterminé à homotopie près) dont la composition avec

<sup>68</sup>. Par analogie avec le cas où  $B_\bullet = B$  est constant, où l'isomorphisme de Dold-Kan donne une équivalence de catégories  $\text{Ho}(sB\text{-Mod}) \simeq D_{\geq 0}(B\text{-Mod})$ , on utilise la notation  $M_\bullet[1]$  au lieu de  $\Omega M_\bullet$ .

$X_\bullet \oplus M_\bullet[1] \longrightarrow X_\bullet \longrightarrow B_\bullet$  soit l'identité. L'espace total de la petite extension est le produit fibré homotopique

$$\tilde{B}_\bullet = X_\bullet \times_{X_\bullet \oplus M_\bullet[1]}^h X_\bullet,$$

où les deux morphismes  $X_\bullet \longrightarrow X_\bullet \oplus M_\bullet[1]$  sont  $\text{id}_{X_\bullet} \oplus 0$  et  $s$ . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}_\bullet & \longrightarrow & X_\bullet \\ \downarrow u & \searrow \text{id}_{X_\bullet} \oplus 0 & \downarrow \text{id}_{X_\bullet} \\ X_\bullet & \xrightarrow{s} & X_\bullet \oplus M_\bullet[1] \end{array} \begin{array}{c} \searrow \text{id}_{X_\bullet} \\ \downarrow \text{id}_{X_\bullet} \\ \downarrow \text{id}_{X_\bullet} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} X_\bullet$$

dont le carré est un carré de produit fibré homotopique, donc la fibre homotopique de  $u : \tilde{B}_\bullet \longrightarrow X_\bullet \longrightarrow B_\bullet$  (dans la catégorie des  $\tilde{B}_\bullet$ -modules) s'identifie à  $M_\bullet$ .

Un exemple important de petites extensions est donné par les extensions de carré nul. On fixe un anneau simplicial  $R_\bullet$ .

**Définition 6.5.4.** Un anneau simplicial  $B_\bullet$  est dit  $k$ -tronqué si  $\pi_i(B_\bullet) = 0$  pour  $i > k$ .<sup>69</sup>

Noter que  $B_\bullet$  est  $k$ -tronqué si et seulement si le morphisme canonique  $B_\bullet \longrightarrow \text{cosq}_k(B_\bullet)$  est une équivalence faible.

**Proposition 6.5.5.** ([14] proposition 3.3.3) Soient  $\tilde{B}_\bullet$  une  $R_\bullet$ -algèbre  $k$ -tronquée et  $I \subset \pi_k(\tilde{B}_\bullet)$  un  $\pi_0(\tilde{B}_\bullet)$ -module. Alors il existe un morphisme  $\tilde{B}_\bullet \longrightarrow B_\bullet$  de  $R_\bullet$ -algèbres tel que :

- (i) Le morphisme  $\pi_i(\tilde{B}_\bullet) \longrightarrow \pi_i(B_\bullet)$  est un isomorphisme si  $i \neq k$  (en particulier,  $B_\bullet$  est  $k$ -tronqué) et, si  $i = k$ , il identifie  $\pi_k(B_\bullet)$  au quotient de  $\pi_k(\tilde{B}_\bullet)$  par  $I$ .
- (ii) Pour toute  $R_\bullet$ -algèbres  $k$ -tronquée  $A_\bullet$ , le morphisme

$$\underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(B_\bullet, A_\bullet) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(\tilde{B}_\bullet, A_\bullet)$$

induit une équivalence faible de  $\underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(B_\bullet, A_\bullet)$  avec l'union des composantes connexes de  $\underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(\tilde{B}_\bullet, A_\bullet)$  correspondant aux morphismes de  $R_\bullet$ -algèbres  $u : \tilde{B}_\bullet \longrightarrow A_\bullet$  tels que  $\pi_k(u)(I) = 0$ .

Grâce au fait que  $B_\bullet$  est  $k$ -tronqué, la deuxième condition implique  $B_\bullet$  est unique à équivalence faible près. On note  $B_\bullet = \tilde{B}_\bullet/I$ .

*Démonstration.* Le morphisme  $I[k] \longrightarrow \tilde{B}_\bullet$  dans  $\text{s}\mathbb{Z}\text{-Mod}$  induit un morphisme  $L\text{Sym}_{\mathbb{Z}} I[k] \longrightarrow \tilde{B}_\bullet$  dans  $\text{s}\mathbb{Z}\text{-Alg}$ , où  $\text{Sym}_{\mathbb{Z}}$  est le foncteur "algèbre symétrique sur  $\mathbb{Z}$ " et

<sup>69.</sup> référence à la section sur squelette et cosquelette

$L\text{Sym}_{\mathbb{Z}}$  est son foncteur dérivé à gauche. On pose  $C_{\bullet} = \mathbb{Z} \otimes_{L\text{Sym}_{\mathbb{Z}} I[k]}^L \tilde{B}_{\bullet}$  et  $B_{\bullet} = \text{cosq}_k C_{\bullet}$ .<sup>70</sup> Si  $A_{\bullet}$  est une  $R_{\bullet}$ -algèbre  $k$ -tronquée, alors  $\underline{\text{Hom}}_{R_{\bullet}\text{-Alg}}(C_{\bullet}, A_{\bullet}) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{R_{\bullet}\text{-Alg}}(B_{\bullet}, A_{\bullet})$  est une équivalence faible. Or, pour toute  $R_{\bullet}$ -algèbre  $A_{\bullet}$ , on a

$$\underline{\text{Hom}}_{R_{\bullet}\text{-Alg}}(C_{\bullet}, A_{\bullet}) = \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{S}\mathbb{Z}\text{-Alg}}(\mathbb{Z}, A_{\bullet}) \times_{\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{S}\mathbb{Z}\text{-Alg}}(L\text{Sym}_{\mathbb{Z}} I[k], A_{\bullet})}^h \underline{\text{Hom}}_{R_{\bullet}\text{-Alg}}(\tilde{B}_{\bullet}, A_{\bullet}).$$

Comme  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{S}\mathbb{Z}\text{-Alg}}(\mathbb{Z}, A_{\bullet})$  est contractile et qu'on a une équivalence faible  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{S}\mathbb{Z}\text{-Alg}}(L\text{Sym}_{\mathbb{Z}} I[k], A_{\bullet}) \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{S}\mathbb{Z}\text{-Mod}}(I[k], A_{\bullet})$ , on obtient le point (ii).<sup>71</sup>

□

**Définition 6.5.6.** Dans la situation de la proposition ci-dessus, si  $k \geq 1$  ou si  $k = 0$  et  $I^2$ , on dit que  $\tilde{B}$  est une *extension de carré nul* de  $B_{\bullet}$  par  $I[k]$ .

Remarquons que la condition implique que  $I$  est naturellement un  $\pi_0(B_{\bullet})$ -module.

**Théorème 6.5.7.** ([14] proposition 3.3.5) Soient  $k \geq 0$ ,  $A_{\bullet}$  un anneau simplicial et  $B_{\bullet}$  une  $A_{\bullet}$ -algèbre  $k$ -tronquée. On considère les deux catégories suivantes, toutes les deux munies d'une classe d'équivalences faibles :

- (a) La catégorie  $\mathcal{C}$  des couples  $(M, \alpha)$ , où  $M$  est un objet de  $B_{\bullet}\text{-Mod}$  concentré en degré  $k$  et  $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Ho}(B_{\bullet}\text{-Mod})}(\mathbb{L}_{B_{\bullet}/A_{\bullet}}, M_{\bullet}[1])$ . Les équivalences faibles sont les morphismes qui induisent une équivalence faible sur le premier facteur.
- (b) La catégorie  $\mathcal{C}'$  des extensions de carré nul de  $B_{\bullet}$  par un  $\pi_0(B_{\bullet})$ -module placé en degré  $k$ . Les équivalences faibles sont les morphismes qui induisent une équivalence faible des espaces totaux.

Alors le foncteur qui envoie  $(M_{\bullet}, \alpha) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  sur l'espace total de la petite extension  $\tilde{B}_{\bullet} \longrightarrow B_{\bullet}$  définie par  $\alpha$  induit une équivalence  $\text{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}')$ .

*Remarque 6.5.8.* On n'a pas encore les outils pour le dire, mais l'équivalence du théorème ci-dessus vient en fait d'une équivalence de  $(\infty, 1)$ -catégories de  $\mathcal{C}$  (avec le Hom dans la catégorie homotopique remplacé par un Hom interne) vers  $\mathcal{C}'$ .

*Démonstration.* On renvoie à [14] proposition 3.3.5 pour la preuve détaillée. On va juste indiquer comment construire le foncteur inverse. Soit  $\tilde{B}_{\bullet}$  une extension de carré nul de  $B_{\bullet}$  par  $I[k]$ , on veut construire une petite extension  $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Ho}(B_{\bullet}\text{-Mod})}(\mathbb{L}_{B_{\bullet}/A_{\bullet}}, I[k+1])$  d'espace total  $\tilde{B}_{\bullet}$ . Il revient au même de construire l'élément  $s \in \text{Hom}_{\text{Ho}(A_{\bullet}\text{-Alg}/B_{\bullet})}(B_{\bullet}, B_{\bullet} \oplus I[k+1])$  correspondant à  $\alpha$ .

Soit  $C_{\bullet} = \mathbb{Z} \otimes_{L\text{Sym}_{\mathbb{Z}} I[k]}^L \tilde{B}_{\bullet}$ , où le morphisme de  $\mathbb{Z}$ -algèbres simpliciales  $L\text{Sym}_{\mathbb{Z}} I[k] \longrightarrow \tilde{B}_{\bullet}$  vient comme plus haut du morphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules simpliciaux  $I[k] \longrightarrow \tilde{B}_{\bullet}$ . Par la construction de  $B_{\bullet}$  plus haut, on a  $B_{\bullet} = \text{cosq}_k(C_{\bullet})$ . De plus, on a des équivalences faibles

$$C_{\bullet} \otimes_{B_{\bullet}}^L B_{\bullet} = \mathbb{Z} \otimes_{L\text{Sym}_{\mathbb{Z}} I[k]}^L B_{\bullet} = L\text{Sym}_{B_{\bullet}} I[k+1].$$

70. Ajouter une section sur squelette et cosquelette, et une référence.

71. Et le point (i) ?

En effet, pour toute  $B_\bullet$ -algèbre  $D_\bullet$ ,

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{B_\bullet\text{-Alg}}(\mathbb{Z} \otimes_L^L \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}} I[k] B_\bullet, D_\bullet) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{sZ}\text{-Alg}}(\mathbb{Z}, D_\bullet) \times_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{sZ}\text{-Mod}}(I[k], D_\bullet)}^h \underline{\mathrm{Hom}}_{B_\bullet\text{-Alg}}(B_\bullet, D_\bullet)$$

et

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{B_\bullet\text{-Alg}}(L \mathrm{Sym}_{B_\bullet} I[k+1], D_\bullet) = \underline{\mathrm{Hom}}_{B_\bullet\text{-Mod}}(I[k+1], D_\bullet)$$

sont faiblement équivalents.

Comme  $\mathrm{cosq}_k L \mathrm{Sym}_{B_\bullet} I[k+1] = B_\bullet \oplus I[k+1]$ , le morphisme  $B_\bullet \longrightarrow C_\bullet \otimes_{\tilde{B}_\bullet}^L B_\bullet$ ,  $b \longmapsto b \otimes 1$ , induit par passage aux  $k$ -cosquelettes le morphisme  $s$  cherché.

□

*Remarque 6.5.9.* (cf. [14] proposition 3.3.6) Soit  $f : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$  un morphisme tel que  $\pi_i(f)$  soit un isomorphisme pour  $i \leq k-1$  et une injection pour  $i = k$ .<sup>72</sup> Si  $d \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(B_\bullet\text{-Mod})}(B_\bullet, B_\bullet \oplus \mathbb{L}_{B_\bullet/A_\bullet})$  est la “dérivation universelle” (correspondant à l’identité de  $\mathbb{L}_{B_\bullet/A_\bullet}$ ) et  $A_\bullet \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{B}_\bullet \longrightarrow B_\bullet$  est la petite extension de  $B_\bullet$  au-dessus de  $A_\bullet$  définie par  $d$ , alors  $\pi_i(\tilde{f})$  est un isomorphisme pour  $i \leq k$  et une injection pour  $i = k+1$ .

**Corollaire 6.5.10.** Soient  $R_\bullet$  un anneau simplicial et  $A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$  un morphisme de  $R_\bullet$ -algèbres tel que  $\mathbb{L}_{B_\bullet/A_\bullet}$ . Alors :

(i) Pour toute extension de carré nul  $\tilde{S}_\bullet \longrightarrow S_\bullet$  dans  $R_\bullet\text{-Alg}$ , le morphisme

$$R \mathrm{Spec}(B_\bullet)(\tilde{S}_\bullet) \longrightarrow R \mathrm{Spec}(A_\bullet)(\tilde{S}_\bullet) \times_{R \mathrm{Spec}(A_\bullet)(S_\bullet)}^h R \mathrm{Spec}(B_\bullet)(S_\bullet)$$

est une équivalence faible.

(ii) Pour toute  $R_\bullet$ -algèbre  $S_\bullet$ , le morphisme

$$R \mathrm{Spec}(B_\bullet)(S_\bullet) \longrightarrow R \mathrm{Spec}(A_\bullet)(S_\bullet) \times_{R \mathrm{Spec}(A_\bullet)(\pi_0(S_\bullet))}^h R \mathrm{Spec}(B_\bullet)(\pi_0(S_\bullet))$$

est une équivalence faible.

*Démonstration.* Le point (ii) résulte du point (i), du fait que  $S_\bullet = \varprojlim_k \mathrm{cosq}_k S_\bullet$ , du fait que chaque  $\mathrm{cosq}_{k+1} S_\bullet \longrightarrow \mathrm{cosq}_k S_\bullet$  ( $k \geq 0$ ) est une extension de carré nul et de la commutation (formelle) des foncteurs  $R \mathrm{Spec}(A_\bullet)$  et  $R \mathrm{Spec}(B_\bullet)$  aux limites projectives.<sup>73</sup>

Montrons (i). On suppose que  $\tilde{S}_\bullet$  est une extension de  $S_\bullet$  par  $I[k]$ . Alors, pour toute  $R_\bullet$ -algèbre  $C_\bullet$ , on a une équivalence faible

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(C_\bullet, S_\bullet) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(C_\bullet, S_\bullet) \times_{\underline{\mathrm{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}/S_\bullet}(C_\bullet, S_\bullet \oplus I[k+1])}^h \underline{\mathrm{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(C_\bullet, S_\bullet),$$

72. Vérifier que ceci correspond bien à la condition “ $f$  est  $k$ -connexe”.

73. On ne devrait pas avoir une limite projective homotopique ?

où les deux morphismes  $S_\bullet \rightarrow S_\bullet \oplus I[k+1]$  sont  $\text{id}_{S_\bullet} \oplus 0$  et la section correspondant à l'extension. Comme  $\mathbb{L}_{B_\bullet/A_\bullet} = 0$ , le triangle distingué donne une équivalence faible  $B_\bullet \otimes_{A_\bullet}^L \mathbb{L}_{A_\bullet/R_\bullet} \rightarrow \mathbb{L}_{B_\bullet/R_\bullet}$ , d'où, pour toute  $R_\bullet$ -algèbre  $S_\bullet$ , une équivalence faible

$$\underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}/S_\bullet}(B_\bullet, S_\bullet \oplus I[k+1]) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}/S_\bullet}(A_\bullet, S_\bullet \oplus I[k+1]).$$

Ceci implique immédiatement le résultat. □

**Corollaire 6.5.11.** *Soient  $R$  un anneau et  $A := R[T_1, \dots, T_n] \rightarrow B$  un morphisme étale. Alors, pour toute  $R$ -algèbre simpliciale  $S_\bullet$ , le morphisme*

$$R\text{Spec}(B)(S_\bullet) \rightarrow S_\bullet^n \times_{\pi_0(S_\bullet)^n} \text{Spec } B(\pi_0(S_\bullet))$$

*est une équivalence faible.*

En particulier, ceci redonne la proposition 6.2.7.

## 6.6 Dérivé d'un schéma en groupes affine

Nous aurons besoin du théorème suivant, dont la preuve fait l'objet des sections 4 à 6 du chapitre V de [8] (voir les propositions V.6.2 et V.6.3 et le corollaire V.6.4 de ce livre pour l'énoncé donné ci-dessous).

**Théorème 6.6.1.** *On note  $\mathbf{sEns}_0$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{sEns}$  dont les objets sont les  $X_\bullet$  avec  $X_0$  un singleton ("ensembles simpliciaux réduits"). ensemble simplicial réduit On munit cette catégorie de la classe d'équivalences faibles donnée par les équivalences faibles de  $\mathbf{sEns}$ .*

*Alors on a une paire de foncteurs adjoints  $\overline{W} : \mathbf{sGrp} \rightarrow \mathbf{sEns}_0$  et  $G : \mathbf{sEns}_0 \rightarrow \mathbf{sGrp}$  qui préservent les équivalences faibles et induisent des équivalences de catégories inverses entre  $\text{Ho}(\mathbf{sGrp})$  et  $\text{Ho}(\mathbf{sEns}_0)$ . Ces foncteurs sont donnés par les formules suivantes :*

(a) *Soit  $G_\bullet$  un groupe simplicial. On définit un ensemble simplicial  $WG_\bullet$  par :*

- *Pour tout  $n \geq 0$ ,  $(WG)_n = G_n \times G_{n-1} \times \dots \times G_0$ .*
- *Pour tout  $n \geq 1$  et pour  $0 \leq i \leq n$ ,*

$$d_i(g_n, \dots, g_0) = \begin{cases} (d_i g_n, d_{i-1} g_{n-1}, \dots, (d_0 g_{n-i}) g_{n-i-1}, g_{n-i-2}, \dots, g_0) & \text{si } i < n \\ (d_n g_n, d_{n-1} g_{n-1}, \dots, d_1 g_1) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

- *Pour tout  $n \geq 0$  et pour  $0 \leq j \leq n$ ,*

$$s_j(g_n, \dots, g_0) = (s_j g_n, s_{j-1} g_{n-1} \dots s_0 g_{n-1}, 1, g_{n-j-1}, \dots, g_0).$$

*On fait agir  $G_\bullet$  sur  $WG_\bullet$  et posant, si  $h \in G_n$  et  $(g_n, \dots, g_0) \in (WG)_n$ ,  $h \cdot (g_n, \dots, g_0) = (h g_n, g_{n-1}, \dots, g_0)$ .*

*Finalement, on pose  $\overline{W}G_\bullet = WG_\bullet / G_\bullet$ .*

(b) Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. Pour tout  $n \geq 0$ , le groupe  $GX_n$  est le groupe libre sur l'ensemble  $X_{n+1} - s_0(X_n)$ . Les morphismes  $GX(f)$  pour  $f$  une flèche de  $\Delta$  sont définis page 276 de [8].

Plus précisément,  $\mathbf{sEns}_0$  est munie d'une structure de catégorie de modèles dont les équivalences faibles (resp. les cofibrations) sont les équivalences faibles (resp. les cofibrations) dans  $\mathbf{sEns}$  (cf. [8] proposition V.6.2). Le foncteur  $\underline{W}$  préserve les fibrations et les équivalences faibles, et le foncteur  $G$  préserve les cofibrations et les équivalences faibles.

*Remarque 6.6.2.* Soit  $G_\bullet$  un groupe simplicial. Alors l'ensemble simplicial  $WG_\bullet$  est contractile ([8] lemme V.4.6) et le morphisme quotient  $WG_\bullet \rightarrow \overline{WG}_\bullet$  est une fibration. De plus, on peut définir une notion de  $G_\bullet$ -fibration principale d'ensembles simpliciaux (voir la définition V.3.1 de [8]), et  $WG_\bullet \rightarrow \overline{WG}_\bullet$  est la  $G_\bullet$ -fibration principale universelle (remarque V.4.7 de [8]).

*Remarque 6.6.3.* Le foncteur  $G : \mathbf{sEns}_0 \rightarrow \mathbf{sGrp}$  est une variante de l'espace des lacets  $\Omega$  de la définition 4.9.6. Le corollaire V.5.11 de [8] implique en particulier que les foncteurs  $\mathrm{Ho}(\mathbf{sEns}_0) \rightarrow \mathrm{Ho}(\mathbf{sEns})$  induits par  $\Omega$  et par  $G$  sont équivalents.

*Remarque 6.6.4.* Soit  $G_\bullet$  un groupe simplicial. Pour tout  $n \geq 0$ , l'espace classifiant  $BG_n$  (cf. l'exemple 2.1.10) est un ensemble simplicial qui dépend fonctoriellement de  $[n] \in \mathrm{Ob} \Delta$ , donc on obtient un ensemble bisimplicial  $BG_\bullet$ . Il résulte de [8] V.3.6, V.4.1, V.4.6 et V.6.8 que la diagonale de  $BG_\bullet$  est faiblement équivalente à  $\overline{WG}_\bullet$ .

74

On revient maintenant au problème de dériver les schémas en groupes affines. Si  $H = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(H)) \rightarrow \mathrm{Spec} R$  est un schéma en groupes affine sur  $R$ , la construction générale de la section 6.2 fournit un foncteur dérivé à droite du foncteur  $H : R_\bullet\text{-Alg} \rightarrow \mathbf{sEns}$ , mais ce foncteur dérivé n'a aucune raison d'être à valeurs dans la catégorie des groupes simpliciaux.

On voudrait construire un foncteur dérivé à droite de  $H$ , vu comme foncteur de  $R_\bullet\text{-Alg}$  dans  $\mathbf{sGrp}$ . (Dont le composé avec le foncteur d'oubli redonnera automatiquement le foncteur dérivé précédent.) D'après les résultats rappelés ci-dessus, il revient au même de dériver à droite le foncteur  $\overline{W} \circ H : R_\bullet\text{-Alg} \rightarrow \mathbf{sEns}_0$ , car le foncteur  $G : \mathbf{sEns}_0 \rightarrow \mathbf{sGrp}$  se dérive trivialement. En fait, on va suivre [5] 5.1 et dériver le foncteur  $F$  qui envoie  $A_\bullet$  sur la diagonale de l'ensemble bisimplicial  $BH(A_\bullet)$  (cela revient au même par la remarque 6.6.4), et même tout le foncteur  $BH : R_\bullet\text{-Alg} \rightarrow \mathbf{s}(\mathbf{sEns})$ , où un morphisme  $X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  de  $\mathbf{s}(\mathbf{sEns})$  est une équivalence faible si  $X_n \rightarrow Y_n$  est une équivalence faible dans  $\mathbf{sEns}$  pour tout  $n \geq 0$ .

Soit  $c : R\text{-Alg} \rightarrow R_\bullet\text{-Alg}$  un foncteur de remplacement cofibrant qui envoie  $R$  sur  $R$ . (Par exemple le foncteur donné par une des résolutions standard de la section 5.7.) Le foncteur dérivé  $RBH$  est alors le foncteur  $R_\bullet\text{-Alg} \rightarrow \mathbf{s}(\mathbf{sEns})$  donné par : si  $A_\bullet$  est une  $R$ -algèbre simpliciale, pour tout  $n \geq 0$ , l'ensemble simplicial  $RBH(A_\bullet)_n$  est le foncteur

---

74. Il faut un appendice sur les ensembles bisimpliciaux ! Et plus de références.

$[m] \mapsto \underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}}(c(\mathcal{O}(H^n)), A_\bullet)_m$ . La functorialité en  $[n]$  est donné par les morphismes entre les étages de  $BH$ , vu comme un schéma simplicial (et par le fait que  $c$  est fonctoriel).

*Remarque 6.6.5.* Si le morphisme  $H \rightarrow \text{Spec } R$  est lisse, il est facile de calculer le complexe cotangent  $\mathbb{L}_{RH/R}$  sur  $R$  du schéma affine dérivé  $RH$ . En effet, d'après le théorème 6.4.9,  $\mathbb{L}_{RH/R}$  est simplement égal à  $\Omega_{H/R}$ , c'est-à-dire à  $(\text{Lie } H)^\vee$ .

## 6.7 Variété des représentations dérivée

Ici aussi, on s'inspire fortement de [5] (section 5.2).

Soient  $\Gamma$  un groupe abstrait et  $H$  un schéma en groupes affine sur  $R$ . Il est facile de voir que le foncteur  $R\text{-Alg} \rightarrow \mathbf{Ens}$ ,  $A \mapsto \text{Hom}_{\text{Grp}}(\Gamma, H(A))$ , est représentable par un schéma affine sur  $R$ , que l'on notera  $\text{Rep}(\Gamma, H)$ . D'après le calcul général de la section 6.2, ce schéma a donc une version dérivée (à droite)  $R\text{Rep}(\Gamma, H) : R_\bullet\text{-Alg} \rightarrow \mathbf{sEns}$ . Le but de cette section est de donner une formule plus explicite pour  $R\text{Rep}(\Gamma, H)$ , qui permette en particulier de calculer son complexe cotangent sur  $R$  (dans le cas où  $H$  est lisse).<sup>75</sup>

Soit  $RH : R_\bullet\text{-Alg} \rightarrow \mathbf{sGrp}$  le foncteur défini dans la section précédente, et soit  $X_\bullet \rightarrow \Gamma$  un remplacement cofibrant de  $\Gamma$  dans  $\mathbf{sGrp}$ , avec tous les  $X_n$  des groupes libres (par exemple la résolution standard de  $\Gamma$ ). Alors, pour toute  $R$ -algèbre simpliciale  $A_\bullet$ , on a des morphismes

$$\text{Rep}(\Gamma, H)(A_\bullet) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sGrp}}(X_\bullet, H(A_\bullet)) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sGrp}}(X_\bullet, RH(A_\bullet)),$$

et il n'est pas difficile de voir que ceci identifie le foncteur  $A_\bullet \mapsto \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sGrp}}(X_\bullet, RH(A_\bullet))$  à  $R\text{Rep}(\Gamma, H)$ .

On suppose que  $H$  est lisse, et on veut calculer le complexe cotangent  $\mathbb{L}_{R\text{Rep}(\Gamma, H)/R}$ . On utilise la propriété universelle de la remarque 6.4.6, et on note  $A_\bullet = \mathcal{O}_{R\text{Rep}(\Gamma, H)}$ . Pour tout  $A_\bullet$ -module  $M_\bullet$ , on a des équivalences faibles

$$\underline{\text{Hom}}_{A_\bullet\text{-Mod}}(\mathbb{L}_{A_\bullet/R}, M_\bullet) \simeq \underline{\text{Hom}}_{R_\bullet\text{-Alg}/A_\bullet}(A_\bullet, A_\bullet \oplus M_\bullet) \simeq R\text{Rep}(\Gamma, H)(A_\bullet \oplus M_\bullet) \times_{R\text{Rep}(\Gamma, H)(A_\bullet)}^h *$$

où le morphisme  $*$   $\rightarrow R\text{Rep}(\Gamma, H)(A_\bullet)$  est donné par l'identité de  $A_\bullet$  (c'est-à-dire la représentation universelle de  $\Gamma$  dans  $H(A_\bullet)$ ). De plus,

$$R\text{Rep}(\Gamma, H)(A_\bullet \oplus M_\bullet) \times_{R\text{Rep}(\Gamma, H)(A_\bullet)}^h * \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sGrp}}(X_\bullet, RH(A_\bullet \oplus M_\bullet)) \times_{\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sGrp}}(X_\bullet, RH(A_\bullet))}^h *$$

est faiblement équivalent à

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sGrp}}(X_\bullet, RH(A_\bullet \oplus M_\bullet) \times_{RH(A_\bullet)}^h *),$$

où  $*$   $\rightarrow RH(A_\bullet)$  est le morphisme donné par l'évaluation en 1 (qui correspond à un morphisme d'algèbre  $\mathcal{O}_{RH} \rightarrow A_\bullet$ ). En utilisant une fois de plus la propriété universelle du complexe

<sup>75</sup>. En fait, ce truc est dérivé aussi en  $\Gamma$  et en  $H$ , si on met  $H$  dans la bonne catégorie.

cotangent, cette fois pour  $RH \rightarrow \text{Spec } R$ , on voit que

$$\begin{aligned} RH(A_\bullet \oplus M_\bullet) \times_{RH(A_\bullet)}^h * &\simeq \underline{\text{Hom}}_{A_\bullet\text{-Mod}}(A_\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{RH}}^L \mathbb{L}_{RH/R}, M_\bullet) \\ &\simeq \underline{\text{Hom}}_{A_\bullet\text{-Mod}}(A_\bullet \otimes_R^L (\text{Lie } H)^\vee, M_\bullet) \\ &\simeq (\text{Lie } H) \otimes_R M_\bullet. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\underline{\text{Hom}}_{A_\bullet\text{-Mod}}(\mathbb{L}_{A_\bullet/R}, M_\bullet) \simeq \underline{\text{Hom}}_{\text{sGrp}}(X_\bullet, (\text{Lie } H) \otimes_R M_\bullet).$$

Si  $X_\bullet$  est la résolution standard de  $\Gamma$ , le second terme est le tronqué (bête) en degré  $\geq 1$  du décalé par  $-1$  de la bar résolution de  $\Gamma$  à coefficients dans  $\text{Lie } H \otimes_R M_\bullet$ . En particulier, on obtient des isomorphismes, pour  $M$  un  $A_\bullet$ -module constant,

$$\underline{\text{Hom}}_{A_\bullet\text{-Mod}}(\mathbb{L}_{A_\bullet/R}, M[n]) \simeq \begin{cases} H^{n+1}(\Gamma, (\text{Lie } H) \otimes_R M) & \text{si } n \geq 1 \\ Z^1(\Gamma, (\text{Lie } H) \otimes_R M) & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

## 7 $\infty$ -catégories

### 7.1 Motivation

On voudrait rendre certains des raisonnements et constructions des sections précédentes plus naturels. En particulier :

- Formaliser la notion de diagramme commutatif à homotopie près, et donner une caractérisation des limites inductives et projectives homotopiques d'un foncteur qui ne fasse intervenir que la foncteur en question.
- Rendre rigoureuses les preuves utilisant le complexe cotangent, et en particulier avoir des isomorphismes d'adjonction faisant intervenir les Hom enrichis et pas seulement les Hom dans la catégorie homotopique. (Ce serait possible sans  $\infty$ -catégories, mais cela devient assez rapidement pénible.)

L'idée des  $\infty$ -catégories est assez simple. Une catégorie habituelle, ou 1-catégorie, est la donnée d'objets et de morphismes entre les objets, appelés 1-morphismes. Si on ajoute à ces données des morphismes entre les morphismes, ou 2-morphismes, on obtient une 2-catégorie. Si on ajoute des morphismes entre 2-morphismes, ou 3-morphismes, on obtient une 3-catégorie. Et ainsi de suite.

Par exemple, la catégorie des catégories est naturellement une 2-catégorie (avec les morphismes fonctoriels comme 2-morphismes). Si  $X$  est un complexe de Kan, on peut construire une  $\infty$ -catégorie en déclarant que les objets sont les éléments de  $X_0$  et les  $n$ -flèches sont les morphismes  $\Delta[1]^n \rightarrow X$ . Si  $f, g : \Delta[1]^n \rightarrow X$  sont deux  $n$ -flèches, une  $(n+1)$ -flèche de  $f$  à  $g$  est une flèche  $h : \Delta[1]^{n+1} \rightarrow X$  telle que  $h_{0 \times \Delta[1]^n} = f$  et  $h_{1 \times \Delta[1]^n} = g$ . (Ceci est une version du  $\infty$ -groupeïde fondamental de  $X$ . En fait, nous verrons plus tard que, dans le modèle des  $\infty$ -catégories que nous choisirons, ce  $\infty$ -groupeïde fondamental est simplement  $X$  lui-même.)

Un problème de cette définition naïve est de décider si la composition des  $n$ -flèches est définie ou seulement définie à isomorphisme près, et si elle est associative ou associative à isomorphisme près. Ceci conduit à des définitions de  $n$ -catégorie plus ou moins stricte, qui ne sont équivalentes que si  $n \leq 2$ , et dont la complexité augmente avec  $n$ . Les  $n$ -catégories strictes sont plus faciles à définir, mais les  $n$ -catégories qui apparaissent naturellement (comme le groupoïde fondamental ci-dessus) sont rarement strictes. À ma connaissance, la notion de  $n$ -catégorie la moins stricte possible n'est formalisée que pour  $n \leq 4$ .

Dans le cas qui nous intéresse, la situation se simplifie, car toutes les  $n$ -flèches vont être des isomorphismes pour  $n$  assez grand, et même souvent pour  $n \geq 2$ . En effet, les morphismes d'ordre supérieur qui apparaissent sont des homotopies entre morphismes d'ordre inférieur. Disons qu'une  $(\infty, k)$ -catégorie est une  $\infty$ -catégorie où toutes les  $n$ -flèches sont inversibles pour  $n \geq k + 1$ . On peut tenter une définition par récurrence des  $(\infty, k)$ -catégories en déclarant qu'une  $(\infty, k + 1)$ -catégorie est une catégorie enrichie en  $(\infty, k)$ -catégories (c'est-à-dire dont les Hom sont des  $(\infty, k)$ -catégories). Il faut encore définir les  $(\infty, 0)$ -catégories, aussi appelés  $\infty$ -groupoïdes. En s'appuyant sur l'exemple du groupoïde fondamental ci-dessus, on choisit la définition suivante.

**Définition 7.1.1.** Une  $(\infty, 0)$ -catégorie, ou  $\infty$ -groupoïde, est un complexe de Kan.

Ce choix est appelée l'*hypothèse d'homotopie* et il est dû à Grothendieck.

Comme on s'intéressera uniquement aux  $(\infty, 1)$ -catégories dans ce qui suit, on fait la convention suivante : **à partir de maintenant, l'expression "  $\infty$ -catégorie " désignera toujours une  $(\infty, 1)$ -catégorie.**

## 7.2 Deux modèles possibles pour les $\infty$ -catégories

### Catégories simplicialement enrichies

**Définition 7.2.1.** Soit  $\mathcal{D}$  une catégorie qui admet des produits directs finis (et donc en particulier un objet final  $*$ ).<sup>76</sup>

Une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie (ou catégorie enrichie en objets de  $\mathcal{D}$ )  $\mathcal{C}$  est la donnée :

- d'une classe d'objets  $\text{Ob } \mathcal{C}$  ;
- pour tous  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , d'un objet  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  de  $\mathcal{D}$  ;
- pour tout  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , d'un morphisme  $\text{id}_X : * \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  dans  $\mathcal{D}$  ;
- pour tous  $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , d'un morphisme de  $\mathcal{D}$ , appelé *composition*,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \quad (g, f) \longmapsto g \circ f;$$

telle que les propriétés suivantes soient vérifiées :

---

<sup>76</sup>. En fait,  $\mathcal{D}$  pourrait être une catégorie monoïdale quelconque dans cette définition.

- (les  $\text{id}_X$  sont des unités pour la composition) pour tous  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\text{id}_Y \times \text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\
 & \searrow & \swarrow \circ \\
 & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)} \times \text{id}_X} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \\
 & \searrow & \swarrow \circ \\
 & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)
 \end{array}$$

- (associativité de la composition) pour tous  $X, Y, Z, T \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, T) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\circ \times \text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, T) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\
 \parallel & & \downarrow \circ \\
 & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T) \\
 & & \uparrow \circ \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, T) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, T)} \times \circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, T) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)
 \end{array}$$

Si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont des catégories  $\mathcal{D}$ -enrichies, un *foncteur*  $F$  de  $\mathcal{C}_1$  dans  $\mathcal{C}_2$  est la donnée d'une application  $F : \text{Ob } \mathcal{C}_1 \rightarrow \text{Ob } \mathcal{C}_2$  et, pour tous  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}_1$ , d'un morphisme  $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X), F(Y))$  dans  $\mathcal{D}$  qui soit compatible aux morphismes de composition dans le sens évident.

**Définition 7.2.2.** Une *catégorie simplicialement enrichie* est une catégorie enrichie en ensembles simpliciaux.

On note  $\mathcal{C}at$  la catégorie des catégories et  $s\mathcal{C}at$  la catégorie des catégories simplicialement enrichies (vues comme une 1-catégorie). Noter que cette notation, qui semble être standard, n'est pas cohérente avec la notation de la définition 2.1.4 ( car  $s\mathcal{C}at$  n'est pas la catégorie des objets simpliciaux de  $\mathcal{C}at$ , c'est la catégorie des objets simpliciaux de  $\mathcal{C}at$  dont la classe des objets est constante).

**Définition 7.2.3.** La *catégorie homotopique*  $\mathcal{H}$  est la catégorie  $\text{Ho}(s\text{Ens})$ .

Grâce au théorème 4.10.5, la catégorie  $\mathcal{H}$  est équivalente à  $\text{Ho}(\text{Top})$ .

**Définition 7.2.4.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie simpliciale. La *catégorie homotopique* de  $\mathcal{C}$  est la catégorie  $\mathcal{H}$ -enrichie  $h\mathcal{C}$  donnée par :

- $\text{Ob } h\mathcal{C} = \text{Ob } \mathcal{C}$ ;
- pour tous  $X, Y \in \text{Ob } h\mathcal{C}$ ,  $\text{Hom}_{h\mathcal{C}}(X, Y)$  est l'image de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  par le foncteur canonique  $\mathbf{sEns} \rightarrow \mathcal{H}$ ;
- les identités et la composition de  $h\mathcal{C}$  viennent de ceux de  $\mathcal{C}$ .

**Définition 7.2.5.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie simpliciale. On note  $\pi_0(\mathcal{C})$  la catégorie (ordinaire) qui a les mêmes objets que  $\mathcal{C}$  et telle que, pour tous  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,

$$\text{Hom}_{\pi_0(\mathcal{C})}(X, Y) = \pi_0(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)).$$

**Définition 7.2.6.** Un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  de catégories simpliciales est une *équivalence* si le foncteur correspondant  $h\mathcal{C} \rightarrow h\mathcal{D}$  est une équivalence de catégories enrichies, c'est-à-dire si :

- pour tous  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,  $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$  est une équivalence faible dans  $\mathbf{sEns}$  ("F est pleinement fidèle");
- le foncteur  $\pi_0(\mathcal{C}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{D})$  est essentiellement surjectif.

Une première idée est de prendre comme catégorie des  $\infty$ -catégories la catégorie des catégories simplicialement enrichies, localisée par rapport aux équivalences. C'est une idée très naturelle, mais il y a quelques problèmes :

- Il n'est pas évident de voir un  $\infty$ -groupeïde (c'est-à-dire un complexe de Kan) comme une  $\infty$ -catégorie.
- La catégorie des  $\infty$ -catégories devrait être enrichie sur elle-même, c'est-à-dire que les foncteurs entre deux  $\infty$ -catégories devraient eux-mêmes former une  $\infty$ -catégorie (ou en d'autres termes, on devrait avoir un Hom interne dans la catégorie des  $\infty$ -catégories). Il n'est pas clair comment construire cet enrichissement.

## Quasi-catégories

Rappel : On a construit dans la définition 2.1.8 (voir aussi la remarque 4.4.9) un foncteur pleinement fidèle (appelé "nerf") de  $\mathcal{Cat}$  dans  $\mathbf{sEns}$ , dont l'image essentielle est la catégorie des ensembles simpliciaux  $X_\bullet$  tels que tout morphisme  $\Lambda_k^n \rightarrow X_\bullet$ , pour  $0 < k < n$ , admette un unique prolongement à  $\Delta[n]$ .

On a aussi défini les  $\infty$ -groupeïdes comme les complexes de Kan. En particulier, un groupeïde (ordinaire) correspond via le foncteur nerf à un complexe de Kan tel que tout morphisme  $\Lambda_k^n \rightarrow X_\bullet$  admette un unique prolongement à  $\Delta[n]$ .

Il est donc raisonnable de prendre comme modèle des  $\infty$ -catégories la généralisation commune de ces deux notions.

**Définition 7.2.7.** Une *quasi-catégorie* (ou *complexe de Kan faible*) est un ensemble simplicial  $S$  tel tout morphisme  $\Lambda_k^n \rightarrow S$ , pour  $0 < k < n$ , admette un prolongement à  $\Delta[n]$ .

Si  $S$  est une quasi-catégorie, l'ensemble des objets de  $S$  est par définition  $\text{Ob } S = S_0$ .

*Remarque 7.2.8.* On a très envie de dire qu'un 1-morphisme de  $A$  à  $B$ , avec  $A, B \in \text{Ob } S$ , est un morphisme  $f : \Delta[1] \rightarrow S$  tel que  $f(0) = A$  et  $f(1) = B$ . Cette définition est raisonnable (et elle est correcte pour certaines constructions des espaces de morphismes de  $S$ ), mais on n'a alors pas de composition bien définie sur les 1-morphismes.

**Définition 7.2.9.** Soit  $S$  une quasi-catégorie. On définit une catégorie  $\pi(S)$  de la manière suivante :

- Les objets de  $\pi(S)$  sont ceux de  $S$ .
- Si  $f : \Delta[1] \rightarrow S$  est un morphisme dans  $\mathbf{sEns}$ , on appelle  $A := f(0)$  la source de  $f$  et  $B := f(1)$  le but de  $f$ , et on note  $f : A \rightarrow B$ .
- Si  $A \in \text{Ob } S$ , on note  $\text{id}_A$  le morphisme constant de valeur  $A$  de  $\Delta[1]$  dans  $S$ .
- Si  $f, f' : A \rightarrow B$  (avec  $A, B \in \text{Ob } S$ ), une *homotopie* de  $f$  à  $f'$  est un morphisme  $h : \Delta[2] \rightarrow S$  (dans  $\mathbf{sEns}$ ) tel que  $h \circ \delta_2 = f$ ,  $h \circ \delta_1 = f'$  et  $h \circ \delta_0 = \text{id}_B$ . On dit que  $f$  et  $f'$  sont *homotopes* s'il existe une homotopie de  $f$  à  $f'$ .
- Si  $A, B \in \text{Ob } S$ , on note  $\text{Hom}_{\pi(S)}(A, B)$  l'ensemble des  $f : A \rightarrow B$  divisé par la relation d'équivalence engendrée par la relation d'homotopie.
- Si  $A, B, C \in \text{Ob } S$ ,  $f : A \rightarrow B$ ,  $f' : B \rightarrow C$  et  $f'' : A \rightarrow C$ , on dit que  $f'' = f' \circ f$  s'il existe  $h : \Delta[2] \rightarrow S$  tel que  $h \circ \delta_2 = f$ ,  $h \circ \delta_0 = f'$  et  $h \circ \delta_1 = f''$ .

**Proposition 7.2.10.** ([15] 1.2.3.5 et 1.2.3.7) Soit  $S$  une quasi-catégorie. Alors la relation d'homotopie du quatrième point de la définition ci-dessus (sur les morphismes  $\Delta[1] \rightarrow S$  de source et but fixés) est une relation d'équivalence, et la relation  $f'' = f' \circ f$  du dernier point de la définition définit des morphismes de composition sur les  $\text{Hom}_{\pi(S)}$ , qui font de  $\pi(S)$  une catégorie de morphismes identités les  $\text{id}_A$  du troisième point.

Un des problèmes des quasi-catégories comme modèles des  $\infty$ -catégories est qu'il n'est pas évident de définir l'espace (ou l'ensemble simplicial) des morphismes entre deux objets. Plus précisément, il existe des définitions naturelles, mais qui n'ont pas de loi de composition bien définie, et il existe des définitions qui ont une loi de composition bien définie mais sont moins naturelles. (Nous verrons aussi plus loin une définition assez naturelle et qui admet une loi de composition.) Heureusement, toutes ces définitions donnent des complexes de Kan faiblement équivalents.

Pour commencer, voici trois définitions possibles qui sont assez naturelles mais n'admettent pas de loi de composition.

**Notation 7.2.11.** On rappelle que les sommets du simplexe standard  $\Delta[n]$  (c'est-à-dire les éléments de  $\Delta[n]_0$ ) sont naturellement ordonnés. On les note  $x_0, \dots, x_n$ . Si  $I$  est un sous-ensemble de  $[n]$ , on note  $\langle x_i, i \in I \rangle$  le plus petit sous-ensemble simplicial de  $\Delta[n]$  contenant tous les  $x_i$  pour  $i \in I$ ; il est isomorphe à un simplexe standard de dimension  $|I| - 1$ .

**Définition 7.2.12.** Soit  $S$  une quasi-catégorie, et soient  $x, y \in \text{Ob } S$ . On définit des ensembles simpliciaux  $\text{Hom}_S^R(x, y)$ ,  $\text{Hom}_S^L(x, y)$  et  $\text{Hom}_S^m(x, y)$  par les formules suivantes : pour tout

$n \geq 0$ ,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n], \mathrm{Hom}_S^R(x, y)) = \{f : \Delta[n+1] \longrightarrow S \mid f(x_{n+1}) = y \text{ et } f(\langle x_0, \dots, x_n \rangle) = x\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n], \mathrm{Hom}_S^L(x, y)) = \{f : \Delta[n+1] \longrightarrow S \mid f(x_0) = x \text{ et } f(\langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle) = y\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta[n], \mathrm{Hom}_S^m(x, y)) = \{f : \Delta[n] \times \Delta[1] \longrightarrow S \mid f(\Delta[n] \times \langle x_0 \rangle) = x \text{ et } f(\Delta[n] \times \langle x_1 \rangle) = y\}$$

Notons que l'on a des injections  $\mathrm{Hom}_S^R(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S^m(x, y)$  et  $\mathrm{Hom}_S^L(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S^m(x, y)$ , donnée par les deux morphismes  $\Delta[n+1] \longrightarrow \Delta[n] \times \Delta[1]$  suivants : le premier envoie  $x_i$  sur  $(x_i, x_0)$  pour  $0 \leq i \leq n$ , et  $x_{n+1}$  sur  $(x_n, x_1)$  ; le deuxième envoie  $x_i$  sur  $(x_{i-1}, x_1)$  pour  $1 \leq i \leq n+1$ , et  $x_0$  sur  $(x_0, x_0)$ .

**Proposition 7.2.13.** ([15] 1.2.2.3 et 4.2.1.8) *Si  $S$  est une quasi-catégorie et  $x, y \in \mathrm{Ob} S$ , alors  $\mathrm{Hom}_S^R(x, y)$ ,  $\mathrm{Hom}_S^L(x, y)$  et  $\mathrm{Hom}_S^m(x, y)$  sont des complexes de Kan, et les deux injections définies ci-dessus sont des équivalences faibles.*<sup>77</sup>

### 7.3 Localisation simpliciale de Dwyer-Kan

On voudrait pouvoir comparer les deux modèles possibles pour les  $\infty$ -catégories (et montrer qu'ils donnent le même résultat). Avant cela, il est pratique d'introduire une des construction de la localisation simpliciale de Dwyer-Kan. Cette construction permettra aussi de construire beaucoup d'exemples de  $\infty$ -catégories.

Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie (ordinaire) et  $W$  une classe de morphismes de  $\mathcal{C}$  qui est stable par composition et telle que les identités sont dans  $W$ . Dans la suite, on verra  $W$  comme une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  (qui a les mêmes objets que  $\mathcal{C}$  mais n'est pas pleine en général).

On a déjà parlé dans la section 5.1 de la catégorie localisée de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $W$ . Elle est notée  $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$  ou  $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}, W)$ , est munie d'un foncteur  $Q_C : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$  et a la propriété universelle suivante : pour toute catégorie  $\mathcal{D}$ , la restriction  $\mathbf{Fonc}(\mathrm{Ho}(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \longrightarrow \mathbf{Fonc}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  le long de  $Q_C$  induit une équivalence de  $\mathbf{Fonc}(\mathrm{Ho}(\mathcal{C}), \mathcal{D})$  avec la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Fonc}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  dont les objets sont les foncteurs  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  qui envoie tous les éléments de  $W$  sur des isomorphismes dans  $\mathcal{D}$ .

Le but de cette section est de construire une catégorie simpliciale  $\mathcal{C}[W^{-1}]$ , telle que  $\pi_0(\mathcal{C}[W^{-1}])$  s'identifie à  $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}, W)$  et qui vérifiera (a posteriori) une propriété universelle analogue à celle de  $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}, W)$ , mais en tant que  $\infty$ -catégorie. Dans un sens très précis (qui sera explicité plus loin), cette construction est la version dérivée de la localisation ordinaire.

**Notation 7.3.1.** Soit  $O$  un ensemble. On note  $O - \mathcal{C}at$  (resp.  $\mathbf{s}O - \mathcal{C}at$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}at$  ( $\mathbf{s}\mathcal{C}at$ ) dont les objets sont les catégories  $\mathcal{C}$  telles que  $\mathrm{Ob} \mathcal{C} = O$ .

---

77. Et même des équivalences d'homotopie, mais cela résulte du fait que les  $\mathrm{Hom}_S$  sont fibrants.

On note aussi  $\mathcal{G}$  la catégorie des graphes orientés d'ensemble de sommets  $O$ . On note un tel graphe orienté  $(O, A)$ ; pour tous  $x, y \in O$ ,  $A(x, y)$  désigne l'ensemble des arêtes de source  $x$  et de but  $y$ .

**Proposition 7.3.2.** Soit  $G : O - \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{G}$  le foncteur d'oubli, qui envoie une catégorie  $\mathcal{C}$  sur le graphe orienté  $(O, A)$  tel que, pour tous  $x, y \in O$ ,  $A(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) - \{\text{id}_x\}$ .

Alors  $G$  admet un adjoint à gauche  $F : \mathcal{G} \rightarrow O - \mathcal{C}at$ .

*Démonstration.* Soit  $(O, A)$  un objet de  $\mathcal{G}$ . On construit la catégorie  $\mathcal{C} = F(O, A)$  de la manière suivante :

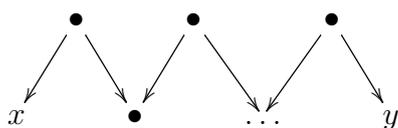
- l'ensemble des objets de  $\mathcal{C}$  est  $O$ ;
- pour tous  $x, y \in O$ , on prend pour  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  l'ensemble des chemins de  $x$  à  $y$  dans le graphe  $(O, A)$ ;
- pour tout  $x \in O$ , on prend pour  $\text{id}_x$  le chemin trivial (de longueur nulle) de  $x$  à  $x$ ;
- la composition est donnée par la concaténation des chemins.

□

**Définition 7.3.3.** On dit qu'une catégorie  $\mathcal{C}$  de  $O - \mathcal{C}at$  est libre sur l'ensemble de flèches  $A$  si  $\mathcal{C} = (O, A)$ , avec  $(O, A) \in \text{Ob } \mathcal{G}$ .

Construction : Si  $\mathcal{C} = F(O, A)$  est une catégorie libre, et si  $W = F(O, B)$  est une sous-catégorie libre de  $\mathcal{C}$  avec  $B \subset A$ , on définit une catégorie simpliciale  $\mathcal{C}[W^{-1}]$  de la manière suivante :

- $\text{Ob } \mathcal{C}[W^{-1}] = O$ ;
- pour tous  $x, y \in O$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}[W^{-1}]}(x, y)$  est l'ensemble des zigzags où les flèches pointant vers la gauche sont dans  $W$



et les flèches pointant vers la droite dans  $F(O, A - B)$ ;

- les morphismes identité sont les zigzags triviaux, et la composition est la concaténation des zigzags.

En général, on construit  $\mathcal{C}[W^{-1}]$  à l'aide d'une résolution simpliciale de  $(\mathcal{C}, W)$  : Soit  $\perp = F \circ G$ . C'est une comonade sur  $O - \mathcal{C}at$  (voir la définition 5.7.2 et l'exemple 5.7.3), qui permet donc de définir un foncteur  $H_{\bullet} : O - \mathcal{C}at \rightarrow sO - \mathcal{C}at$  muni d'une augmentation  $H_{\bullet} \rightarrow \text{id}_{O - \mathcal{C}at}$ . De plus, pour toute catégorie  $\mathcal{C}$  dans  $O - \mathcal{C}at$  et toute sous-catégorie  $W$  de  $\mathcal{C}$  telle que  $\text{Ob } W = \text{Ob } \mathcal{C}$ , les couples  $(H_n(\mathcal{C}), H_n(W))$  vérifient les conditions de la construction ci-dessus pour tout  $n \geq 0$ . On peut donc définir une catégorie simpliciale  $\mathcal{C}[W^{-1}]$  de la manière suivante :

- $\text{Ob } \mathcal{C}[W^{-1}] = O$ ;

- pour tous  $x, y \in O$  et tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[W^{-1}]}(x, y)_n = \mathrm{Hom}_{H_n(\mathcal{C})[H_n(W)^{-1}]}(x, y).$$

*Remarque 7.3.4.* Soit  $\mathcal{P}$  la catégorie des paires  $(\mathcal{C}, W)$ , où  $\mathcal{C}$  est une catégorie simpliciale dans  $sO - \mathcal{C}at$  et  $W$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  telle que  $\mathrm{Ob} W = \mathrm{Ob} \mathcal{C}$ . Un morphisme de  $(\mathcal{C}, W)$  vers  $(\mathcal{C}', W')$  dans  $\mathcal{P}$  est un foncteur  $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  qui envoie  $W$  dans  $W'$ , et on dit que c'est une équivalence si  $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  et  $H : W \rightarrow W'$  sont des équivalences (de catégories simplicialement enrichies). En appliquant la localisation ordinaire, on obtient un foncteur  $Loc : \mathcal{P} \rightarrow sO - \mathcal{C}at$ . Ce foncteur ne préserve pas les équivalences, et le foncteur de localisation simpliciale construit ci-dessus (au moins sur les couples  $(\mathcal{C}, W)$  dont les  $\mathrm{Hom}$  sont des ensembles simpliciaux discrets) est son foncteur dérivé à droite.<sup>78 79</sup>

## 7.4 Nerf simplicial et catégorification

L'idée de la construction du nerf simplicial est la suivante : Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie ordinaire, son nerf  $N(\mathcal{C})$  est l'ensemble simplicial défini par

$$\mathrm{Hom}_{s\mathbf{Ens}}(\Delta[n], N(\mathcal{C})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}([n], \mathcal{C}),$$

où l'ensemble ordonné  $[n]$  est vu comme une catégorie de la manière habituelle. Si maintenant  $\mathcal{C}$  est une catégorie simplicialement enrichie, on pourrait essayer de définir son nerf par la même formule (en remplaçant le  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}$  par un  $\mathrm{Hom}_{s\mathcal{C}at}$ ), mais cette définition n'envoie pas les équivalences de catégories simpliciales sur des équivalences faibles d'ensembles simpliciaux. Le nerf simplicial est le foncteur dérivé à droite de ce nerf naïf. On calcule ce foncteur dérivé en utilisant un remplacement cofibrant des catégories  $[n]$  dans  $s\mathcal{C}at$ .<sup>80</sup>

Voici la définition rigoureuse.

**Définition 7.4.1.** Pour tout  $n \geq 0$ , on note  $\mathfrak{C}(\Delta[n]) = H_\bullet([n])$ , où  $H_\bullet : \mathcal{C}at \rightarrow s\mathcal{C}at$  est le foncteur venant de la comonade de la section précédente. Noter qu'on a un morphisme (fonctoriel en  $\Delta[n]$ ) de  $\mathfrak{C}(\Delta[n])$  dans  $\Delta[n]$ .

Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie simplicialement enrichie, son *nerf simplicial* est l'ensemble simplicial  $N(\mathcal{C})$  défini par

$$\mathrm{Hom}_{s\mathbf{Ens}}(\Delta[n], N(\mathcal{C})) = \mathrm{Hom}_{s\mathcal{C}at}(\mathfrak{C}(\Delta[n]), \mathcal{C}).$$

On peut expliciter un peu plus la définition de la catégorie simpliciale  $\mathfrak{C}(\Delta[n])$ .

**Proposition 7.4.2.** ([3] lemme 2.5) Soit  $n \geq 0$ . On définit une catégorie simpliciale  $NP_n$  de la manière suivante :

78. Définir, si ce n'est déjà fait, la notion d'ensemble simplicial discret.

79. référence

80. plus de détails ?

- $\text{Ob } NP_n = [n]$ ;
- pour tous  $i, j \in [n]$ , soit  $P_{i,j}$  l'ensemble, ordonné par l'inclusion, des sous-ensembles  $J$  de  $\{i, i+1, \dots, j\}$  contenant  $i$  et  $j$ , et soit  $\text{Hom}_{NP_n}(i, j)$  le nerf (ordinaire) de  $P_{i,j}$ .

Alors on a un isomorphisme de catégories simpliciales  $\mathfrak{C}(\Delta[n]) \simeq NP_n$ .

**Proposition 7.4.3.** ([15] milieu de la page 23 et 1.1.5.10) Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie simplicialement enrichie telle que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  soit un complexe de Kan pour tous  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ . Alors son nerf simplicial  $N(\mathcal{C})$  est une quasi-catégorie.

De plus, le foncteur  $N : \mathbf{sCat} \rightarrow \mathbf{sEns}$  admet un adjoint à gauche  $\mathfrak{C}$ , appelé foncteur de catégorification.

*Remarque 7.4.4.* Si  $X_{\bullet}$  est un ensemble simplicial, on note  $\Delta/X_{\bullet}$  la catégorie des morphismes  $\Delta[n] \rightarrow X_{\bullet}$  (où les flèches sont les triangles commutatifs). Alors il résulte formellement de la définition du nerf simplicial que

$$\mathfrak{C}(X_{\bullet}) = \varinjlim_{(\Delta[n] \rightarrow X_{\bullet}) \in \text{Ob}(\Delta/X_{\bullet})} \mathfrak{C}(\Delta[n]).$$

Malheureusement, comme il est difficile de calculer les limites inductives dans  $\mathbf{sCat}$ , cette formule ne donne pas de description concrète de  $\mathfrak{C}(X_{\bullet})$ . On a toutefois une formule explicite pour  $X_{\bullet}$  le nerf d'un ensemble ordonné, voir [15] 1.1.5.9.

**Théorème 7.4.5.** ([15] chapitre 2, [2])<sup>81</sup> On a :

- une structure de modèles sur  $\mathbf{sEns}$ , appelée structure de modèles de Joyal, dont les cofibrations sont les morphismes injectifs et les objets fibrants sont les quasi-catégories ;
- une structure de modèles sur  $\mathbf{sCat}$ , dont les équivalences faibles sont les équivalences de catégories simplicialement enrichies et les objets fibrants sont les  $\mathcal{C}$  telles que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  soit un complexe de Kan pour tous  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  ;

telles que :

- le foncteur  $N$  (nerf simplicial) préserve les fibrations et les équivalences faibles ;
- le foncteur  $\mathfrak{C}$  préserve les cofibrations et les équivalences faibles ;
- si  $\mathcal{C} \in \text{ObsCat}$  et  $S \in \text{ObsEns}$ , un morphisme  $S \rightarrow N(\mathcal{C})$  est une équivalence faible si et seulement le morphisme  $\mathfrak{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}$  qui s'en déduit par adjonction est une équivalence faible.

En particulier, la paire de foncteurs adjoints  $(\mathfrak{C}, N)$  est une équivalence de Quillen entre  $\mathbf{sEns}$  et  $\mathbf{sCat}$ , pour les structures de modèles du théorème. C'est ce théorème qui explique l'équivalence des deux modèles des  $\infty$ -catégories. Dans la suite, comme il faut bien choisir, on prendra les quasi-catégories comme modèle.

---

81. références moins pourries ?

## 7.5 $\infty$ -catégories

**Définition 7.5.1.** Une  $\infty$ -catégorie est une quasi-catégorie.

Si  $S$  et  $S'$  sont des  $\infty$ -catégories, on note (comme avant)  $\text{Ob } S = S_0$ , et on pose  $\infty - \text{Fonc}(S, S') = \text{Hom}_{\mathbf{sE}ns}(S, S')$ .

**Proposition 7.5.2.** ([15] 1.2.7.3) Si  $K$  est un ensemble simplicial et  $S$  est une  $\infty$ -catégorie, alors  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{sE}ns}(K, S)$  est une  $\infty$ -catégorie.

On note  $\infty - \mathcal{C}$ at la catégorie des  $\infty$ -catégories, avec les morphismes donnés par les  $\infty - \text{Fonc}(S, S')$ . C'est donc une catégorie enrichie en  $\infty$ -catégories.

La construction des catégories homotopiques est compatible à l'équivalence de Quillen  $(\mathcal{C}, N)$ . Plus précisément :

**Proposition 7.5.3.** ([15] 1.2.3.3 et 1.2.3.9)

- (i) Si  $S$  est une  $\infty$ -catégorie, on a un isomorphisme de catégories  $\pi(S) \simeq \pi_0(\mathcal{C}(S))$ .
- (ii) Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie simplicialement enrichie telle que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  est un complexe de Kan pour tous  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , on a une équivalence de catégories  $\pi(N(\mathcal{C})) \simeq \pi_0(\mathcal{C})$ .

Le foncteur de catégorification permet de donner une autre définition des espaces de morphismes dans une  $\infty$ -catégorie, qui admet clairement une loi de composition :

**Définition 7.5.4.** Soit  $S$  une  $\infty$ -catégorie, et soient  $x, y \in \text{Ob } S$ , On pose

$$\text{Hom}_S(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}(S)}(x, y).$$

**Proposition 7.5.5.** ([15] section 2.2) Si  $S$  est une  $\infty$ -catégorie et  $x, y \in \text{Ob } S$ , on a une équivalence faible canonique  $\text{Hom}_S(x, y) \simeq \text{Hom}_S^m(x, y)$ .

Voici un autre modèle pour les espace de morphismes dans une  $\infty$ -catégorie, dû à Dugger et Spivak.

**Définition 7.5.6.** Un *collier* est un ensemble simplicial de la forme  $T = \Delta[n_1] \vee \cdots \vee \Delta[n_r]$ , où le symbole " $\vee$ " signifie que l'on identifie le dernier sommet de  $\Delta[n_i]$  et le premier sommet de  $\Delta[n_{i+1}]$ . On note  $\alpha_T$  le premier sommet de  $\Delta[n_1]$  et  $\omega_T$  le dernier sommet de  $\Delta[n_r]$ .

Un morphisme de colliers est un morphisme d'ensemble simpliciaux  $T \rightarrow T'$  qui envoie  $\alpha_T$  sur  $\alpha_{T'}$  et  $\omega_T$  sur  $\omega_{T'}$ .

**Définition 7.5.7.** Soit  $S$  une  $\infty$ -catégorie, et soient  $x, y \in \text{Ob } S$ . On note  $\text{Hom}_T^{\text{col}}(x, y)$  le nerf de la catégorie des morphismes  $f : T \rightarrow S$ , où  $T$  est un collier,  $f(\alpha_T) = x$  et  $f(\omega_T) = y$ . (Les morphismes sont les morphismes de colliers qui font commuter le triangle évident.)

On a une loi de composition sur les  $\text{Hom}_S^{\text{col}}$  donnée par la concaténation des colliers, et de plus :

**Proposition 7.5.8.** ([3] théorème 5.2) Si  $S$  est une  $\infty$ -catégorie, alors les ensembles simpliciaux  $\text{Hom}_S(x, y)$  et  $\text{Hom}_S^{\text{col}}(x, y)$  sont reliés par un zigzags d'équivalences faibles canoniques.

## A Squelette et cosquelette

Le but de cette section est de définir les foncteurs  $n$ -squelette et  $n$ -cosquelette pour les objets simpliciaux d'une catégorie quelconque, et d'en donner quelques propriétés. Noter que l'on considère le squelette et le cosquelette comme des foncteurs de la catégorie des objets simpliciaux dans elle-même (comme dans [8]).

Dans toute cette section,  $\mathcal{C}$  est une catégorie.

**Définition A.1.** Soit  $n \geq 0$ . On note  $\Delta_{\leq n}$  la sous-catégorie pleine de la catégorie simpliciale  $\Delta$  (voir la définition 2.1.2) dont les objets sont les  $[k]$  pour  $0 \leq k \leq n$ .

On note  $\mathbf{s}_{\leq n}\mathcal{C}$  la catégorie  $\mathbf{Fonc}(\Delta_{\leq n}^{\text{op}}, \mathcal{C})$ , et  $i_{n*} : \mathbf{s}\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{s}_{\leq n}\mathcal{C}$  le foncteur de restriction.

**Définition A.2.** Soit  $n \geq 0$ , et soit  $X \in \text{Ob}(\mathbf{s}\mathcal{C})$ .

(i) Le  $n$ -squelette de  $X$  (s'il existe) est un objet  $\text{sq}_n X$  de  $\mathbf{s}\mathcal{C}$  muni d'un morphisme  $\text{sq}_n X \rightarrow X$  tel que, pour tout objet  $Y$  de  $\mathbf{s}\mathcal{C}$ , le morphisme

$$\text{Hom}_{\mathbf{s}\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{s}\mathcal{C}}(\text{sq}_n X, Y) \xrightarrow{i_{n*}} \text{Hom}_{\mathbf{s}_{\leq n}\mathcal{C}}(i_{n*}X, i_{n*}Y)$$

soit une bijection.

(ii) Le  $n$ -cosquelette de  $X$  (s'il existe) est un objet  $\text{cosq}_n X$  de  $\mathbf{s}\mathcal{C}$  muni d'un morphisme  $X \rightarrow \text{cosq}_n X$  tel que, pour tout objet  $Z$  de  $\mathbf{s}\mathcal{C}$ , le morphisme

$$\text{Hom}_{\mathbf{s}\mathcal{C}}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{s}\mathcal{C}}(Z, \text{cosq}_n X) \xrightarrow{i_{n*}} \text{Hom}_{\mathbf{s}_{\leq n}\mathcal{C}}(i_{n*}Z, i_{n*}X)$$

soit une bijection.

Grâce au lemme de Yoneda (théorème 2.1.12), le  $n$ -squelette et le  $n$ -cosquelette de  $X$ , ainsi que les morphismes  $\text{sq}_n X \rightarrow X$  et  $X \rightarrow \text{cosq}_n X$ , sont déterminés à isomorphisme unique près et fonctoriels en  $X$ , s'ils existent.

Donnons maintenant des conditions suffisantes pour l'existence des squelettes et cosquelettes.

**Proposition A.3.** (i) On suppose que  $\mathcal{C}$  a toute les limites inductives finies. Alors le  $n$ -squelette de  $X$  existe pour tout  $X \in \text{Ob}\mathbf{s}\mathcal{C}$  et tout  $n \geq 0$ . De plus, le morphisme  $i_{n*} \text{sq}_n X \rightarrow i_{n*}X$  est un isomorphisme.

Plus précisément, soient  $n \geq 0$  et  $X \in \text{Ob}\mathbf{s}\mathcal{C}$ . Alors, pour tout  $m \geq 0$ , on a

$$(\text{sq}_n X)_m = \varinjlim_{[m] \rightarrow [k], k \leq n} X_k.$$

En d'autres termes, on considère la catégorie  $[m]/\Delta_{\leq n}$  des objets de  $\Delta_{\leq n}$  munis d'un morphisme à partir de  $[m]$  (dans  $\Delta$ ), avec les morphismes évidents. On a un foncteur  $F$  de  $[m]/\Delta_{\leq n}$  dans  $\mathbf{Ens}$  donné par  $([m] \rightarrow [k]) \mapsto X_k$ , et  $(\text{sq}_n X)_m$  est la limite inductive de ce foncteur. De plus,  $F$  est muni d'un morphisme fonctoriel vers le foncteur constant de valeur  $X_m$  (sur l'objet  $[m] \xrightarrow{f} [k]$ , ce morphisme est donné par  $f^* : X_k \rightarrow X_m$ ), ce qui donne le morphisme  $(\text{sq}_n X)_m \rightarrow X_m$ .

(ii) On suppose que  $\mathcal{C}$  a toute les limites projectives finies. Alors le  $n$ -cosquelette de  $X$  existe pour tout  $X \in \text{Ob } \mathbf{s}\mathcal{C}$  et tout  $n \geq 0$ . De plus, le morphisme  $i_{n*} X \longrightarrow i_{n*} \text{cosq}_n X$  est un isomorphisme.

Plus précisément, soient  $n \geq 0$  et  $X \in \text{Ob } \mathbf{s}\mathcal{C}$ . Alors, pour tout  $m \geq 0$ , on a

$$(\text{cosq}_n X)_m = \varprojlim_{[k] \rightarrow [m], k \leq n} X_k.$$

En d'autres termes, on considère la catégorie  $\Delta_{\leq n}/[m]$  des objets de  $\Delta_{\leq n}$  munis d'un morphisme vers  $[m]$  (dans  $\Delta$ ), avec les morphismes évidents. On a un foncteur  $G$  de  $(\Delta_{\leq n}/[m])^{\text{op}}$  dans **Ens** donné par  $([k] \longrightarrow [m]) \longmapsto X_k$ , et  $(\text{cosq}_n X)_m$  est la limite projective de ce foncteur. De plus,  $G$  est muni d'un morphisme fonctoriel depuis le foncteur constant de valeur  $X_m$  (sur l'objet  $[k] \xrightarrow{f} [m]$ , ce morphisme est donné par  $f^* : X_m \longrightarrow X_k$ ), ce qui donne le morphisme  $X_m \longrightarrow (\text{cosq}_n X)_m$ .

Dans la situation de (i) (resp. (ii)), on prouve en fait que le foncteur  $i_{n*} : \mathbf{s}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{s}_{\leq n}\mathcal{C}$  admet un adjoint à gauche (resp. à droite)  $i_n^*$  (resp.  $i_n^!$ ), et on a alors  $\text{sq}_n = i_n^* i_{n*}$  (resp.  $\text{cosq}_n = i_n^! i_{n*}$ ).

**Exemple A.4.** Soit  $X \in \text{Ob } \mathbf{s}\mathcal{C}$ . Alors  $\text{sq}_0 X$  est l'objet simplicial constant de valeur  $X_0$ , et  $(\text{cosq}_0 X)_n = X_0^{n+1}$  pour tout  $n \geq 0$ .

*Remarque A.5.* Si  $\mathcal{C}$  est la catégorie des ensembles, on a vu une description explicite du  $n$ -squelette dans la définition 4.1.7.

Il résulte formellement de la définition que, pour tout  $X \in \text{Ob } \mathbf{s}\mathcal{C}$  et pour  $n \leq m$ , les morphismes  $\text{sq}_n \text{sq}_m X \longrightarrow \text{sq}_n X$  et  $\text{cosq}_n X \longrightarrow \text{cosq}_n \text{cosq}_m X$  sont des isomorphismes. Les famille d'objets  $(\text{sq}_n X)_{n \geq 0}$  (resp.  $(\text{cosq}_n X)_{n \geq 0}$ ) s'organise donc en un système inductif (resp. projectif), muni d'un morphisme vers (resp. depuis)  $X$ .

**Proposition A.6.** Soit  $X \in \text{Ob } \mathbf{s}\mathcal{C}$ .

- (i) Si le  $n$ -squelette de  $X$  existe pour tout  $n \geq 0$ , alors le morphisme canonique  $\varinjlim_n \text{sq}_n X \longrightarrow X$  est un isomorphisme.
- (ii) Si le  $n$ -cosquelette de  $X$  existe pour tout  $n \geq 0$ , alors le morphisme canonique  $X \longrightarrow \varprojlim_n \text{cosq}_n X$  est un isomorphisme.

On se donne maintenant deux foncteurs  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  et  $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$  tels que  $(F, G)$  soit une paire de foncteurs adjoints. La proposition suivante est formelle.

**Proposition A.7.** Soit  $n \geq 0$ .

- (i) Si  $X \in \text{Ob } \mathbf{s}\mathcal{C}$  a un  $n$ -squelette, alors  $F(X)$  a un  $n$ -squelette, et  $\text{sq}_n F(X) = F(\text{sq}_n X)$ .
- (ii) Si  $Y \in \text{Ob } \mathbf{s}\mathcal{C}$  a un  $n$ -cosquelette, alors  $G(Y)$  a un  $n$ -cosquelette, et  $\text{cosq}_n G(Y) = G(\text{cosq}_n Y)$ .

## Index

- $(\infty, 0)$ -catégorie, 103
- $R\text{Spec}$ , 83
- $\infty$ -groupeïde, 103
- $k$ -tronqué, 96
- équivalence d'homotopie, 71
- équivalence d'homotopie (ensembles simpliciaux), 54
- équivalence faible, 64
- équivalence faible (d'ensembles simpliciaux), 54
- équivalence faible (d'espaces topologiques), 54
  
- algèbre sur un anneau simplicial, 75
- augmentation, 75
  
- biproduit, 16
  
- cône, 59
- catégorie dérivée, 23
- catégorie de modèles, 60
- catégorie de modèles simpliciale, 70
- catégorie des objets simpliciaux, 8
- catégorie homotopique, 55
- catégorie pré-additive, 16
- catégorie simpliciale, 8, 68
- classe d'équivalences faibles, 55
- classe saturée, 41
- classe saturée engendrée, 41
- cofibrant, 60
- cofibration, 40, 60, 64
- cofibration acyclique, 60
- cofibration triviale, 40, 60
- cofibre homotopique, 59
- comonade, 76
- complétion idempotente (d'une catégorie), 17
- complexe cotangent, 89
- complexe de Kan, 30
- complexe de Moore non normalisé, 12
- complexe de Moore normalisé, 12
  
- complexe singulier (d'un espace topologique), 29
- cosquelette, 104
- cotriple, 76
  
- dégénérescence, 24
- Dold-Thom, 86
  
- endomorphisme idempotent, 17
- ensemble compactement ouvert, 28
- ensemble simplicial fibrant, 30
- ensemble simplicial pointé, 33
- ensemble simplicial réduit, 72
- enveloppe Karoubienne, 17
- espace classifiant d'un groupe, 10
- espace de Kelley, 28
- espace des chemins, 48
- espace des lacets, 49
- espace topologique compactement engendré, 28
- espace total d'une petite extension, 96
- extension anodine, 41
- extension de carré nul, 97
  
- face, 24
- fibrant, 60
- fibration, 37, 60, 64
- fibration acyclique, 60
- fibration de Kan, 37
- fibration de Serre, 37
- fibration triviale, 42, 60, 64
- fibre homotopique, 59
- foncteur additif, 16
- foncteur d'abélianisation, 85
- foncteur dérivé, 55
- foncteur dérivé à droite, 56
- foncteur dérivé à gauche, 56
- foncteur représentable, 10
  
- groupe abélien dans une catégorie, 85
- Hom interne (d'ensembles simpliciaux), 39

homologie d'André-Quillen, 89  
 homologie de Quillen, 85  
 homotopie, 34, 71  
 homotopie relative, 34  
 hypothèse d'homotopie, 103  
  
 identités simpliciales, 11  
 isocofibration, 63  
 isofibration, 63  
  
 lemme de Yoneda, 10  
 libre (morphisme d'algèbres simpliciales),  
     73  
 limite inductive homotopique, 59  
 limite projective homotopique, 59  
  
 module sur un anneau simplicial, 75  
 morphismes de dégénérescence, 11  
 morphismes de face, 11  
 morphismes homotopes (d'ensembles sim-  
     pliciaux), 15, 34  
 morphismes homotopes (de complexes), 14  
  
 nerf d'une catégorie, 9  
  
 objet de présentation finie, 67  
 objet simplicial augmenté, 76  
 objet simplicial constant, 9  
  
 petite extension, 96  
 problème de déformations, 95  
 produit externe, 15  
 produit fibré homotopique, 57  
 projection, 17  
 propre (catégorie de modèles), 75  
 propre à droite, 75  
 propre à gauche, 75  
 propriété de relèvement à droite, 37  
 propriété de relèvement à gauche, 37  
  
 qis, 23  
 quasi-isomorphisme, 23  
  
 réalisation géométrique (d'un ensemble sim-  
     plicial), 24  
  
 résolution standard, 75  
 rétracte, 41  
 remplacement cofibrant, 61  
 remplacement fibrant, 61  
  
 saturation, 41  
 scindé (objet simplicial), 78  
 simplexe d'un ensemble simplicial, 24  
 simplexe dégénéré, 24  
 simplexe non dégénéré, 24  
 simplexe standard, 10  
 simplexe topologique standard, 23  
 solution d'un problème de déformations, 95  
 somme amalgamée homotopique, 59  
 squelette, 104  
 squelette (d'un ensemble simplicial), 25  
 structure de modèles, 60  
 structure de modèles injective, 68  
 structure de modèles projective, 67  
 suite exacte longue d'une fibration, 38  
  
 théorème de Dold-Kan, 12

## Références

- [1] Albrecht Dold and René Thom. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. *Ann. of Math. (2)*, 67 :239–281, 1958.
- [2] Daniel Dugger and David I. Spivak. Mapping spaces in quasi-categories. *Algebr. Geom. Topol.*, 11(1) :263–325, 2011.
- [3] Daniel Dugger and David I. Spivak. Rigidification of quasi-categories. *Algebr. Geom. Topol.*, 11(1) :225–261, 2011.
- [4] Greg Friedman. Survey article : An elementary illustrated introduction to simplicial sets. *Rocky Mountain J. Math.*, 42(2) :353–423, 2012.
- [5] S. Galatius and A. Venkatesh. Derived galois deformation rings (last accessed 2018-03-19). <https://arxiv.org/abs/1608.07236>, 2016.
- [6] B. R. Gelbaum. Free topological groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12 :737–743, 1961.
- [7] W. Danny Gillam. Simplicial methods in algebra and algebraic geometry (last accessed 2018-03-07). <http://www.math.boun.edu.tr/instructors/wdgillam/simplicialalgebra.pdf>, 2013.
- [8] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*, volume 174 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- [9] Paul G. Goerss and Kristen Schemmerhorn. Model categories and simplicial methods. In *Interactions between homotopy theory and algebra*, volume 436 of *Contemp. Math.*, pages 3–49. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [10] Mark Hovey. *Model categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [11] Luc Illusie. *Complexe cotangent et déformations. I*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [12] André Joyal and Myles Tierney. Notes on simplicial homotopy theory (last accessed 2018-02-11). <http://mat.uab.cat/~kock/crm/hocat/advanced-course/Quadern47.pdf>, 2008.
- [13] Bruno Klingler. Homotopie (last accessed 2018-4-2). <https://webusers.imj-prg.fr/~bruno.klingler/cours/homotop.pdf>.
- [14] Jacob Lurie. Derived algebraic geometry (last accessed 2018-4-2). <http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/DAG.pdf>.
- [15] Jacob Lurie. *Higher topos theory*, volume 170 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
- [16] Jacob Lurie. Higher algebra. <http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf>, 2017.
- [17] J. Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 11. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1967.

- [18] The nLab Authors. The nLab. <https://ncatlab.org/nlab/show/Homepage>, 2017.
- [19] Jolanta Słomińska. Dold-Kan type theorems and Morita equivalences of functor categories. *J. Algebra*, 274(1) :118–137, 2004.
- [20] Ernst Snapper. Multiples of divisors. *J. Math. Mech.*, 8 :967–992, 1959.
- [21] The Stacks Project Authors. Stacks Project. <http://stacks.math.columbia.edu>, 2017.
- [22] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.