

Partiel 2h

18 Novembre 2024

Les questions * sont facultatives. Une large part de la notation prendra en compte la rédaction des justifications. En particulier, tout pseudo-code sera présenté avec un paragraphe explicatif.

- Exercice 1 - Questions de cours.

1. Expliquer en un paragraphe pourquoi l'algorithme linéaire de calcul de médian d'un tableau utilise une division en blocs de taille 5 et pas en blocs de taille 3.
2. * Est-ce un problème relatif au calcul de la complexité ou existe-t-il vraiment des tableaux pour lesquels l'algorithme n'est pas linéaire si on divise en blocs de taille 3 ?
3. On applique l'algorithme glouton (en version maximisation) à un ensemble de vecteurs $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ de poids (strictement positifs) respectifs $p_1, \dots, p_n$. On calcule ainsi une famille libre $B \subseteq V$ qui est une base de $\text{Vect}(V)$ de poids total p . Montrer que toute autre base $B' \subseteq V$ intersectant B sur $|B| - 1$ éléments a un poids p' inférieur ou égal à p .

- Exercice 2 - Question Bonus. Dans cet examen, vous trouverez trois questions (Paradigme i) pour $i = 1, 2, 3$. Dans cet exercice indiquez pour chaque Paradigme i si le problème correspondant est NP-complet, Polynomial avec un algorithme diviser pour régner, ou Polynomial avec un algorithme glouton. Aucune justification n'est demandée ici.

- Exercice 3 - Stable. Un *stable* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble $S \subseteq V$ de sommets deux à deux non reliés. On note $\alpha(G)$ la taille maximale d'un stable de G . Un graphe est *sans triangle* s'il n'existe pas trois sommets deux à deux reliés.

1. Soit G un graphe et e une arête de G . On note G_e le graphe obtenu à partir de G en *subdivisant* e deux fois, c'est à dire en enlevant e et en la remplaçant par un chemin de trois arêtes. On a ainsi deux sommets et deux arêtes de plus dans G_e que dans G . Montrer que $\alpha(G_e) = \alpha(G) + 1$.
2. (Paradigme 1) Quelle est la complexité (en $n + m$) du problème :
Stable dans les graphes sans triangles :
Entrée : Un graphe G sans triangle sur n sommets et m arêtes. Un entier k .
Sortie : VRAI s'il existe un stable de G de taille au moins k .
3. * Montrer qu'il existe un algorithme polynomial prenant en entrée un graphe G à n sommets sans triangle et retournant un stable de taille au moins $\alpha(G)/\sqrt{n}$.

- **Exercice 4 - Code.** Un k -code correcteur est un ensemble $C \subseteq \{0,1\}^n$ tel que la distance de Hamming entre deux éléments distincts de C est au moins $2k + 1$ (ils diffèrent sur au moins $2k + 1$ bits). On pose $N := 2^n$.

1. Montrer que $|C| \leq 2^n / (1 + n + \binom{n}{2})$ lorsque C est un 2-code correcteur.
2. (Paradigme 2) Quelle est la complexité (en N) de construire explicitement un 2-code correcteur C de taille au moins $2^n / (1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4})$?
3. Soit M une matrice de $\{0,1\}$ qui ne contient pas comme colonne le vecteur nul, ni deux vecteurs colonne identiques. Montrer que l'ensemble C des vecteurs x vérifiant $M.x = 0$ (dans le corps $\mathbb{F}_2$) est un 1-code correcteur. Discuter son potentiel nombre d'éléments par rapport à un 1-code correcteur de taille maximale.

- **Exercice 5 - Médian.** On se donne en entrée deux tableaux triés A et B , chacun de n entiers. On suppose que tous les entiers de A et B sont deux à deux distincts.

1. En utilisant combien de comparaisons (pire des cas) peut-on former le tableau C de taille $2n$ qui est fusion de A et B ?
2. (Paradigme 3) Quelle est la meilleure complexité $\Theta(f(n))$ possible pour calculer le médian du tableau C , c'est à dire $C[n]$. L'entrée du problème est la donnée de A et B .

- **Exercice 6 - Cluster.** On se donne un ensemble X de n points $x_1, \dots, x_n$ de $\mathbb{R}^k$ à coordonnées entières ainsi qu'un entier d . Un *cluster* est un sous-ensemble $C \subseteq X$ tel que la distance euclidienne entre toute paire de points de C est au plus d .

Le problème **Cluster Maximal** consiste à trouver un cluster de taille maximale à partir de l'entrée X et d . C'est un problème NP-difficile lorsque $k \geq 4$ et le but de cet exercice est de déterminer sa complexité en dimension au plus 3.

- a. Proposer un algorithme le plus efficace possible lorsque $k = 1$ (i.e. X est un ensemble d'entiers). On ne prendra pas en compte le codage des entiers, la complexité sera calculée en terme de n .
- b. On passe à $k = 2$. Soit C un cluster de taille maximale (que l'on cherche à calculer) et on suppose que sont donnés en entrée (en plus de X et d) deux points x_i, x_j de C qui sont à distance la plus grande possible parmi les paires d'éléments de C . Montrer que l'on peut calculer un cluster de taille $|C|$ en se réduisant polynomialement au calcul du stable maximal dans un graphe biparti (qui est de complexité polynomiale). En déduire que **Cluster Maximal** en dimension 2 est polynomial.
- c. Pour $k = 3$, la complexité de **Cluster Maximal** est une question ouverte. En attendant, proposer un algorithme polynomial qui retourne un cluster dont la taille est au moins OPT/c , où OPT est la taille maximale d'un cluster et $c \geq 1$ est une constante de votre choix. Le barème de notation de cette question est en $\Theta(1/c)$, voire en $\Theta(1/(c-1))$.