Partiel du 10 Novembre 2025

Document autorisé : une feuille A4 manuscrite. Durée 1h30. Les questions (*) ne sont pas nécessaires à la résolution des questions (Pa). La difficulté des exercices est croissante.

- Exercice 1 - Questions de cours. (Une dizaine de lignes de rédaction au plus pour chaque)

1. Alpha tensor modulaire a trouvé une façon de calculer le produit de deux matrices 4×4 qui utilise 47 multiplications. En déduire un algorithme en $O(n^c)$ pour le calcul du produit de deux matrices $n \times n$, avec c à préciser. En quoi est-ce mieux que l'algorithme de Strassen ?
2. Un graphe connexe a m arêtes de deux types : *résistantes* et *fragiles*. Proposer un algorithme de calcul (de meilleure complexité possible à préciser) d'un arbre couvrant ayant le plus grand nombre d'arêtes résistantes.
3. Le problème `Sous-Somme` a en entrée n entiers et un entier cible c. Proposer un algorithme polynomial en $n.c$ qui décide si un sous-ensemble des entiers en entrée a pour somme c.

- Exercice 2 - Points Bonus. Les trois questions (Pa) sont à résoudre avec les paradigmes : diviser pour régner, programmation dynamique, et algorithme glouton. Trouver la bijection entre les questions (Pa) et les trois cas possibles.

- Exercice 3 - Fiat Lux. Un directeur de laboratoire aménage sa nouvelle salle pour stagiaires qui dispose de $n \times n$ bureaux agencés sous forme de grille à n rangées et n colonnes. Chacun des n^2 stagiaires dispose d'un bureau et d'une lampe personnelle. La salle est équipée de n interrupteurs rangées (et n interrupteurs colonnes), chacun changeant l'état (allumé ou éteint) des lampes de sa rangée (ou de sa colonne). Ainsi lorsque seuls les interrupteur R_i et C_j sont activés, les seules lampes allumées sont celles de la rangée i et de la colonne j, à l'exception de la lampe $L_{i,j}$ activée deux fois donc éteinte.

1. Par souci d'économie d'énergie, la Tutelle 1 du laboratoire exige que seuls les bureaux avec un stagiaire présent doivent être éclairés. Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe des configurations (i.e. présence d'un sous-ensemble de stagiaires) que les interrupteurs rangées et colonnes ne peuvent réaliser.
2. (*) Il est possible d'équiper chaque lampe $L_{i,j}$ d'un interrupteur $I_{i,j}$. Combien doit-on acheter au minimum de tels interrupteurs pour pouvoir réaliser toutes les configurations possibles ?
3. (Pa) Le marché des interrupteurs est très complexe et chaque interrupteur R_i, C_j et $I_{i,j}$ a un prix spécifique r_i, c_j et $k_{i,j}$. Proposer un algorithme polynomial en n qui calcule un ensemble d'interrupteurs de prix minimal qui permet de réaliser toutes les configurations.

- Exercice 4 - Suite. La Tutelle 2 va évaluer l'activité de recherche. Pour motiver les stagiaires, le conseil scientifique de cette tutelle instaure un prix du meilleur stagiaire, récompensant celui ou celle qui a publié le plus d'articles. Pour calculer le récipiendaire de ce prix, le directeur doit interroger les stagiaires. L'opération élémentaire est ici : collecter le nombre de publications $p_{i,j}$ du stagiaire $S_{i,j}$.

1. (*) Montrer que l'élection du meilleur stagiaire demande $\theta(n^2)$ opérations élémentaires.
2. (*) Peu exalté par ce prix, le directeur ne veut pas y consacrer un temps quadratique. Il décide donc d'attribuer le prix à un stagiaire $S_{i,j}$ ayant publié au moins autant d'articles que ses (au plus quatre) voisins $S_{i-1,j}$, $S_{i,j-1}$ $S_{i+1,j}$ et $S_{i,j+1}$. Il adopte un algorithme de recherche locale : Il part de $S_{1,1}$ et se déplace à chaque étape vers le voisin qui a le plus publié (ou termine sa quête du *meilleur stagiaire local*). Montrer que dans le pire des cas, cet algorithme de calcul d'un meilleur stagiaire local peut toujours demander $\theta(n^2)$ opérations élémentaires.
3. (Pa) Proposer un algorithme calculant un meilleur stagiaire local en $O(n)$ opérations basé sur le calcul du meilleur stagiaire des rangées et colonnes $R_{\lceil n/2\rceil-1}, R_{\lceil n/2\rceil}, R_{\lceil n/2\rceil+1}$ et $C_{\lceil n/2\rceil-1}, C_{\lceil n/2\rceil}, C_{\lceil n/2\rceil+1}$. *On pourra étendre le problème en calculant un meilleur stagiaire local dont le score $p_{i,j}$ est au moins égal au score d'un stagiaire que l'on s'est fixé en paramètre.*
4. Un ingénieux dispositif de surveillance intégré dans les interrupteurs rangées et colonnes permet en temps $O(1)$ de trouver le (ou les) meilleurs publiants d'une rangée ou d'une colonne. Peut-on à présent calculer un meilleur stagiaire local en $o(n)$?

- Exercice 5 - Antennes. Un pays imaginaire d'Amérique du sud a k kilomètres de largeur et n kilomètres de longueur. Il y a quinze opérateurs de téléphonie qui disposent chacun d'un réseau d'antennes propre. L'implantation de ces antennes devenant un problème sociétal, le gouvernement ne veut conserver qu'un sous-ensemble S de l'ensemble total des antennes, géré par une unique agence. Les hypothèses et spécifications sont :

a Deux antennes distinctes d'un même opérateur sont toujours espacées d'au moins 1 kilomètre.

b Chaque antenne a un rayon d'action de 1 kilomètre.

c Tout utilisateur couvert par au moins un opérateur doit être couvert par S.

d Le nombre d'antennes de S est minimum.

1. (*) Montrer que l'on peut calculer S en temps polynomial en n lorsque le pays est unidimensionel (antennes et utilisateurs sont sur une droite).
2. (Pa) Montrer que l'on peut calculer S en temps $f(k)n$.