- Devoir. -

- A rendre avant le 23 Novembre 2012. -

- Une large part de la notation prendra en compte la clarté de la rédaction et la rigueur des justifications. Les questions sont dans une large mesure indépendantes. -

- Exercice 1 - Largeur Arborescente - Calculer la tree-width des graphes suivants. On prendra soin de justifier chaque réponse à la fois par une décomposition arborescente et par une bramble.

1. Le graphe biparti complet $K_{n,m}$ avec $n \leq m$.
2. Le graphe biparti complet $K_{n,n}$ dans lequel on a supprimé les arêtes d'un couplage parfait (i.e. couvrant tous les sommets).
3. Le cube.
4. L'octaèdre (i.e. le dual planaire du cube).

- Exercice 2 - Graphes triangulés - Un graphe G est *triangulé* si tout cycle de longueur au moins 4 possède une corde, i.e. les cycles induits de G sont des triangles.

1. Montrer que si $G = (V, E)$ est un graphe triangulé et que $X \subset V$ vérifie que $G \setminus X$ est non connexe et que $G \setminus X'$ est connexe pour tout X' strictement inclus dans X, alors X est une clique. En déduire que si G est un graphe triangulé qui n'est pas une clique, il possède une clique dont la suppression déconnecte G.
2. En déduire que tout graphe triangulé possède une décomposition arborescente optimale dont les sacs sont des cliques.
3. Montrer que $tw(G)$ est égal au minimum de $\omega(G') - 1$, où G' est un graphe triangulé contenant G comme sous-graphe. Ici ω désigne la taille maximale d'une clique et tw désigne la tree-width.
4. Un sommet *simplicial* est un sommet dont le voisinage est une clique. Montrer que dans tout graphe triangulé qui n'est pas une clique, il existe deux sommets simpliciaux non voisins. On pourra faire une induction basée sur la première question.
5. D'après la question précédente, tout graphe triangulé G possède un sommet simplicial v_1. De plus, $G \setminus v_1$ possède un sommet simplicial v_2, et en itérant cette construction, on obtient une énumération $v_1, \ldots, v_n$ des sommets de G vérifiant que v_i est simplicial dans la restriction de G à $v_i, \ldots, v_n$. Etant donnée une telle énumération $v_1, \ldots, v_n$, proposer un algorithme polynomial pour le calcul de la plus grande clique de G.
6. Proposer aussi un algorithme polynomial de calcul d'un plus grand stable. Puis, en supposant les sommets pondérés, un algorithme polynomial de calcul du plus grand stable pondéré.

- Exercice 3 - Réduction en Couronnes - Dans cet exercice, on suppose que G est connexe et possède n sommets, avec $n \geq 2$. Le but est montrer l'existence d'un noyau de taille $2k$ pour la version paramétrée de vertex-cover. Ici, vc désigne vertex-cover.

Une *couronne* dans un graphe G est un stable S de G dont l'ensemble $N(S)$ des voisins de S est de même taille que S et tel qu'il existe un couplage entre S et $N(S)$. Noter que $N(S)$ est disjoint de S car S est un stable, et que le biparti entre S et $N(S)$ peut comporter plus d'arêtes que le couplage existant.

1. On rappelle le théorème de Hall : Si un graphe biparti B de bipartition (X, Y) vérifie que pour tout $X' \subseteq X$, le voisinage $N(X')$ de X' a taille au moins $|X'|$, alors B possède un couplage qui couvre tous les sommets de X. Montrer le théorème de Hall en appliquant le théorème de Menger.
2. Montrer que si G possède une couronne S, alors $vc(G) = vc(G \setminus (S \cup N(S))) + |S|$.
3. Montrer que si G possède un stable S dont le voisinage $N(S)$ est de taille inférieure ou égale à $|S|$, alors G possède une couronne. On pourra considérer le plus petit S' non vide inclus dans S dont le voisinage est de taille au plus $|S'|$.
4. Montrer que si un graphe connexe G possède un sous-ensemble strict X de sommets dont le voisinage $N(X)$ a taille au plus $|X|$, alors G possède une couronne. On pourra considérer la différence symétrique de X et $N(X)$.
5. Montrer inversement que si tout sous-ensemble de sommets X de G vérifie que $|N(X)| \geq |X|$, alors les sommets de G peuvent être couverts par une union disjointe de cycles et d'arêtes. On pourra montrer l'existence d'un couplage parfait dans le biparti d'adjacence de G.
6. Sous les hypothèses de la question précédente, déduire que $vc(G) \geq n/2$.
7. Montrer l'existence d'un noyau de taille $2k$ pour le problème vertex-cover paramétré par la taille k de la solution.

- Exercice 4 - Propriété d'Erdős-Posa - Un résultat classique d'Erdős et Posa stipule que si un graphe G possède au plus k cycles sommets disjoints, alors son feedback vertex set, noté $fvs(G)$, est au plus $O(k \log k)$. Le but de cet exercice est dans un premier temps de montrer qu'il existe une fonction f vérifiant que le feedback vertex set d'un graphe ayant au plus k cycles disjoints est au plus $f(k)$, puis d'étendre ce résultat sur les cycles disjoints à des graphes planaires disjoints.

1. Montrer que si G possède au plus k cycles disjoints, alors $tw(G)$ est bornée en fonction de k.
2. Montrer alors que si G possède au plus k cycles disjoints et T est une décomposition arborescente de G, alors il existe un sac X_i de T tel que toute composante connexe de $G \setminus X_i$ possède au plus $k-1$ cycles disjoints.
3. En déduire que si la tree-width de G est t et que G possède au plus k cycles disjoints alors $fvs(G)$ est borné en fonction de t et k. Conclure que $fvs(G)$ est borné en fonction du nombre de cycles disjoints de G.
4. Soit H un graphe. Le *H-mineur-packing* d'un graphe G est le plus grand nombre de H-mineurs disjoints de G. Plus formellement, c'est le plus grand entier k tel que le graphe $k.H$ formé de k copies disjointes de H est un mineur de G. Le *H-mineur-cover* de G est le plus petit nombre de sommets de G dont la suppression laisse un graphe sans mineur H. Noter que lorsque H est le triangle, le Δ-mineur-packing correspond au nombre maximum de cycles disjoints, et le Δ-mineur-cover est le feedback vertex set. Montrer que lorsque H est un graphe planaire, il existe une fonction f dépendant de H telle que tout graphe G de H-mineur-packing k possède un H-mineur-cover d'au plus $f(k)$.
5. Donner un graphe H pour lequel une telle fonction n'existe pas.