



Introduction à la géométrie discrète et axe médian discret minimal

David Coeurjolly

Laboratoire d'InfoRmatique en Image et Systèmes d'information

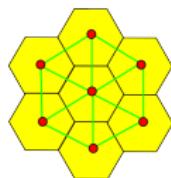
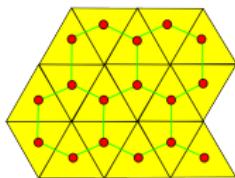
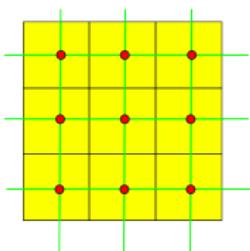
LIRIS UMR 5205 CNRS/INSA de Lyon/Université Claude Bernard Lyon 1/Université Lumière Lyon 2/Ecole Centrale de Lyon
INSA de Lyon, bâtiment J. Verne
20, Avenue Albert Einstein - 69622 Villeurbanne cedex
<http://liris.cnrs.fr>

Plan

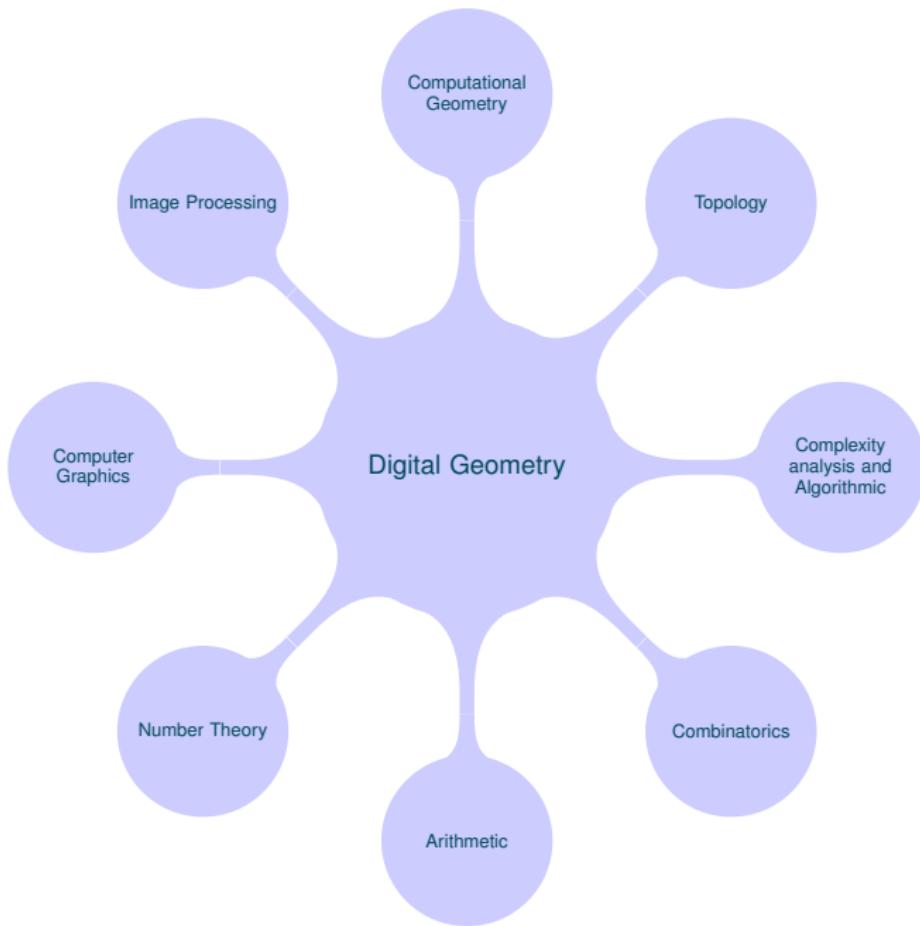
- 1 Introduction
- 2 Le modèle géométrique discret
- 3 Exemple 1 : arithmétisation
- 4 Exemple 2 : analyse volumique et axe médian minimal
- 5 Conclusion
- 6 DGtal

Géométrie discrète en un transparent

Analyse géométrique et topologique d'objets définis sur des structures régulières



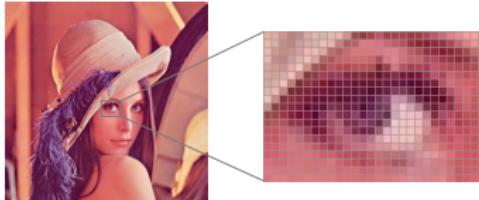
[Eric Andres 95]



Motivations

Approche pragmatique (*data driven*)

- ≡ Acquisition de données structurées (CDD, Scanner, Scanner+T, ...)
 - ≡ Modélisation de problèmes numériques sur \mathbb{Z}^n
 - ≡ [BERNOULLI, ROSENFELD, ...]
- ⇒ *Arithmétisation*

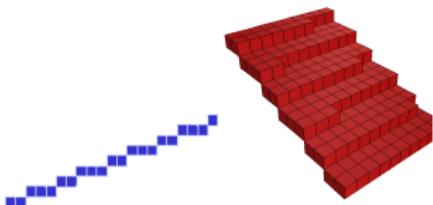


Approche constructive (*model driven*)

- ≡ Construction d'une modèle géométrique uniquement sur les entiers
 - ≡ e.g. Analyse non-standard
 - ≡ [HARTONG, REEB, REVEILLES, ...]
- ⇒ *modélisation*



[Météo-France/ESRF]



⇒ Paradigme géométrique complet (objets, axiomes, ALGORITHMES,...) adapté à l'analyse de formes/images

Survol

1 Introduction

2 Le modèle géométrique discret

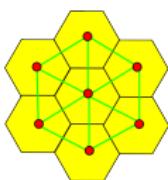
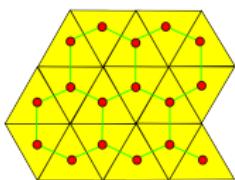
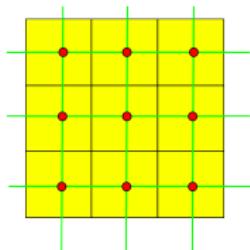
3 Exemple 1 : arithmétisation

4 Exemple 2 : analyse volumique et axe médian minimal

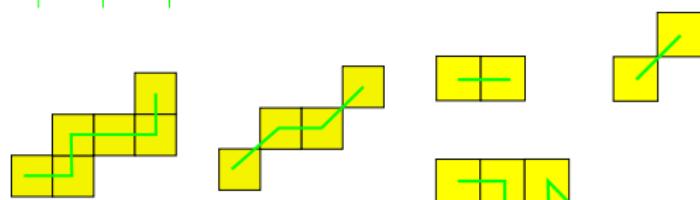
5 Conclusion

6 DGtal

Structures régulières et éléments de base

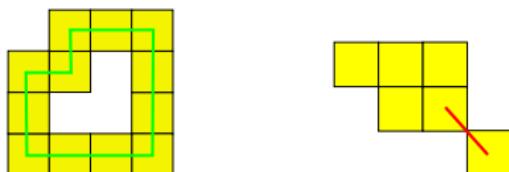


- Coordonnées sur \mathbb{Z}
- Accès aux voisins trivial



- (1)-adjacence
- (0)-adjacence

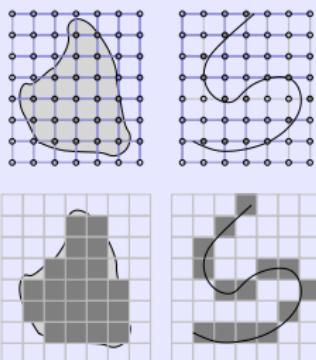
- (r)-chemin
 - (r)-courbe
- $r \in \{0, 1\}$



- un (0)-objet mais deux (1)-objects
- une (1)-courbe mais seulement un (0)-chemin

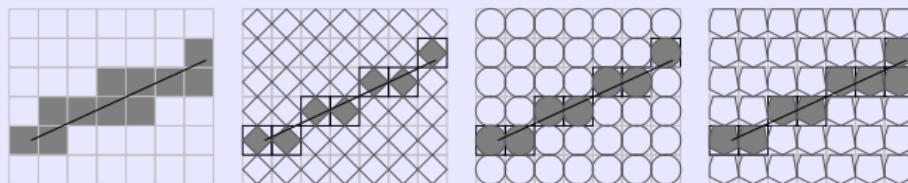
Modèles de discréétisation et schémas analytiques

Approches basées sur les points discrets



Discréétisation de GAUSS
($F \cap \mathbb{Z}^n$), GIQ, BBQ,...

Approches basées sur pavage



{ Supercover, modèle standard ,... } ⊂ modèles analytiques

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(F) &= \{X \in \mathbb{Z}^d \mid B(X) \cap F \neq \emptyset\} \\ &= \{X \in \mathbb{Z}^d \mid d_*(X, F) \leq \frac{1}{2}\} \\ &= (F \oplus M) \cap \mathbb{Z}^d\end{aligned}$$

Propriétés

$$\mathbb{A}(F \cup G) = \mathbb{A}(F) \cup \mathbb{A}(G),$$

$$\mathbb{A}(F) = \bigcup_{p \in F} \mathbb{A}(p),$$

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(F \cap G) &\subseteq \mathbb{A}(F) \cap \mathbb{A}(G), \\ \text{if } F &\subseteq G \text{ then } \mathbb{A}(F) \subseteq \mathbb{A}(G).\end{aligned}$$

Définitions d'objets géométriques élémentaires

Approche pragmatique

Discrétisation de l'objet euclidien associé

Exemple

DSS = le résultat d'un tracé de BRESENHAM

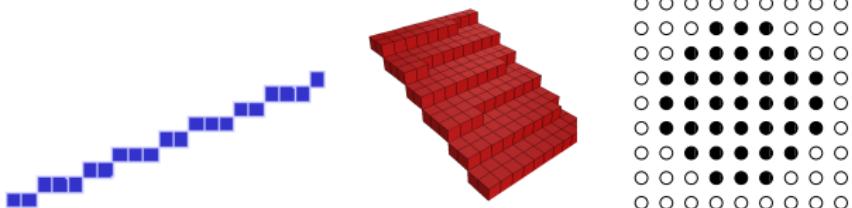
Approche constructive

Caractérisation intrinsèque au modèle

Exemple

DSS = l'ensemble des points solution d'une version discrète de $y' = a$

Les objets géométriques sont souvent identiques
mais la représentation est importante d'un point de vue algorithmique



Problème de reconnaissance

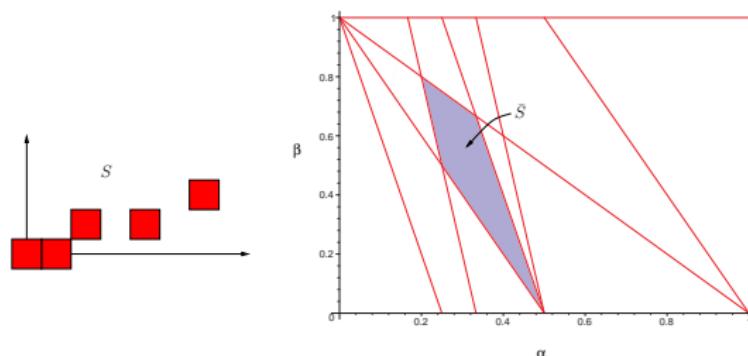
Énoncé

Étant donné un ensemble S de points discrets, S est-il un sous-ensemble de <votre-objet-favori> ?

Types de réponse

- Décision : oui/non
- Une paramétrisation valide de <votre-objet-favori>
- L'ensemble des paramètres valides pour <votre-objet-favori> \Rightarrow Preimage

e.g.: DSS



Problème de reconnaissance

Énoncé

Étant donné un ensemble S de points discrets, S est-il un sous-ensemble de <votre-objet-favori> ?

Types de réponse

- Décision : oui/non
- Une paramétrisation valide de <votre-objet-favori>
- L'ensemble des paramètres valides pour <votre-objet-favori> \Rightarrow Preimage

Approche

Utiliser les spécificités du modèle discret pour la construction d'algorithmes rapides de reconnaissance

Quelles spécificités ?

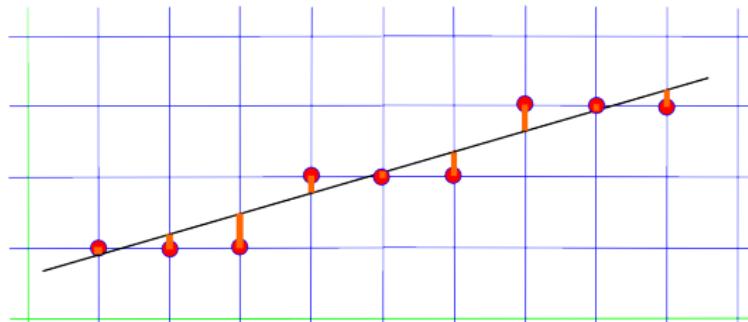
De disciplines variées

Arithmétique, théorie des nombres, combinatoire des mots, lattice polytopes, ...

e.g. DSS

Droite réelle de pente rationnelle ($r = \frac{p}{q} \in [0, 1]$), $\{(i, y_i)\}$ sa discréétisation et $e_i = y_i - \lfloor r \cdot i + \frac{1}{2} \rfloor$

- ⇒ L'ensemble $\{e_i\}$ est fini
- ⇒ La séquence est périodique de période $\frac{q}{\text{pgcd}(p, q)}$
- ⇒ Une période constitue un motif portant des propriétés fortes (mot de CHRISTOFFEL, ...)
- ⇒ Algorithmes de reconnaissance et de tracé efficaces



Boîte à outils

Arithmétique/Theorie des mots

Algorithme d'Euclide, fractions continues, ...

$O(\log(\min(|p|, |q|)))$

Géométrie algorithmique

Enveloppes convexes, et enveloppes convexes sur \mathbb{Z}^n

Programmation linéaire et programmation linéaire en nombres entiers

Résoudre système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right. \Rightarrow \max_{\substack{x \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}^n\}}} cx \quad Ax \leq b$$

LP: $O(m)$ (n fixe)
ILP: NP-hard

Focus: enveloppes convexes entières / Lattice Polytopes

Supposons un objet P dans un domaine $[1..N]^n \subset \mathbb{Z}^n$ de volume ($\text{Vol } P$) (P non vide)

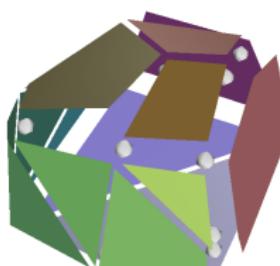
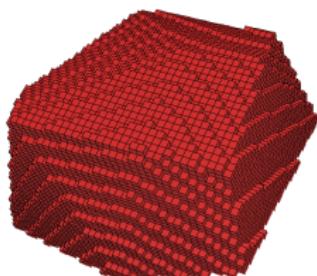
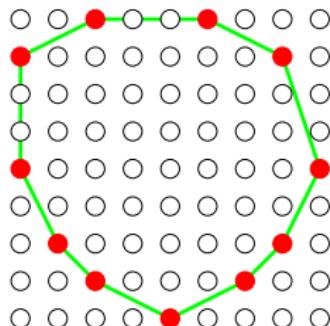
en 2-D

$$f_1(N) = \frac{12}{(4\pi^2)^{1/3}} N^{2/3} + O(N^{1/3} \log(N))$$

Formule générale

Soit f_k le nombre de k -facettes de $CH(P)$

$$f_k \leq c_n (\text{Vol } P)^{\frac{n-1}{n+1}}$$



[Acketa, Žunić, Lovász, Bárány, Larman,...]

Analyse utilisée à de nombreuses occasions pour affiner des complexités

Exemples de résultats algorithmiques

Segments discrets

Contrainte	Caractéristique	Complexité au pire cas	Références
Courbe connexe	Calcul de bande minimale	$O(m)$ incrémental $O(1)$	[Kov90]
	Reco. arithmétique	$O(m)$ incrémental $O(1)$	[RR95, Ren95]
	Reco. arithmétique	$O(m)$ dynamique $O(1)$	[De07]
	Préimage	$O(m)$ incrémental $O(1)$	[DS91, LB93]
Non connexe mais avec ordre	Préimage	$O(m)$ incrémental	[O'R81]
Non connexe	Test linéarité LP dimension 2	$O(m)$ incrémental	[Meg84, Buz03]
	Preimage LP dimension 2	$O(m \log m)$ incrémental	[PS85]

Hyperplans discrets

- ❶ Si S est un morceau d'hyperplan discret dont la base est hyper-rectangulaire, alors

$$|CH(S)| \leq c_n \log^{n-1}(1 + \alpha); \quad (1)$$

Sinon,

$$|CH(S)| \leq c_n N^{\frac{(n-1)^2}{n+1}}; \quad (2)$$

- ❷ Si S est un morceau de plan discret ($n = 3$) dont la base est un convexe discret, alors :

$$|CH(S)| \leq cN^{\frac{2}{3}} \log^2(1 + \max\{N, \alpha\}). \quad (3)$$

Exemple 1 : *arithmétisation*

Transformation rapide d'images

Idée principale : arithmétiser le processus de transformation affine

- ① Uniquement en nombres entiers
- ② Exploiter la structure induite pour accélérer la transformation

Transformation affine

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X &\longmapsto MX + V \\ \text{avec } M &\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), V \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Transformation quasi-affine (ω, M, V)

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n &\longrightarrow \mathbb{Z}^n \\ X &\longmapsto \left[\frac{MX + V}{\omega} \right] \\ \text{avec } \omega &\in \mathbb{Z}, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), V \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

(on suppose $\det(M) \neq 0$)

Exemple



Transformation by the QAT $\left(315, \begin{pmatrix} 1512 \\ -756 \\ 462 \\ 504 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2425 \\ 1650 \end{pmatrix} \right)$

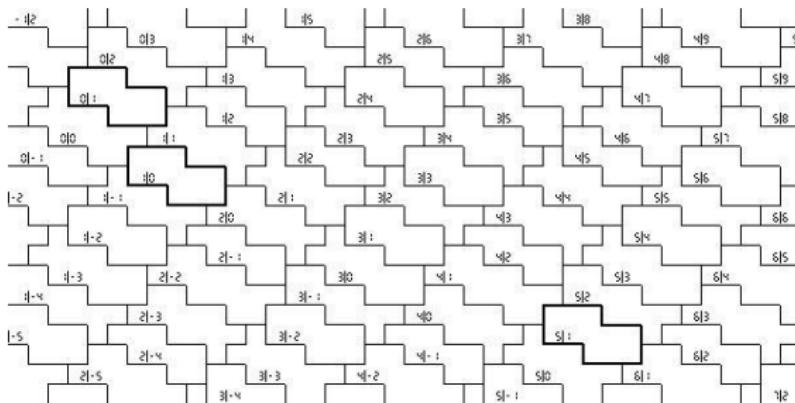
Exemple



Pavage induit

Tuile d'indice $Y \in \mathbb{Z}^n$ d'une QAT f donnée par (ω, M, V) :

$$P_Y = f^{-1}(Y) = \left\{ X \in \mathbb{Z}^n / \left[\frac{MX + V}{\omega} \right] = Y \right\}$$



Résultats sur les QAT en dimension n

Tuiles

Deux tuiles sont géométriquement équivalentes si elles le sont arithmétiquement

Construction des tuiles

Calcul optimal des points de la tuile associée à un point de l'image source

Périodicité

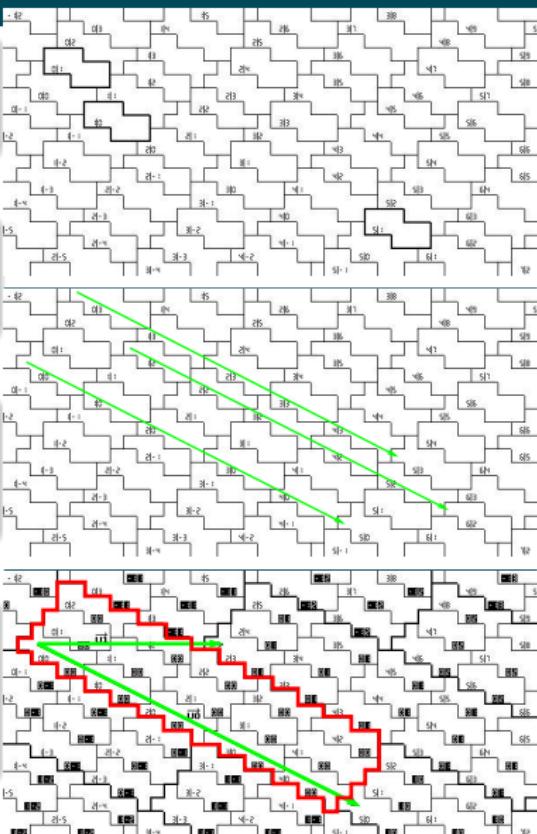
Le pavage induit est n -périodique

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \exists \alpha_i \in \mathbb{N}^* \mid \forall Y \in \mathbb{Z}^n, P_{Y+\alpha_i e_i} \equiv P_Y$$

Super-tuile d'une QAT

- L'ensemble des tuiles canoniques permet de générer le pavage
- La super-tuile se déduit des paramètres de la QAT

[Blot-Coeurjolly]



Algorithmes de transformation

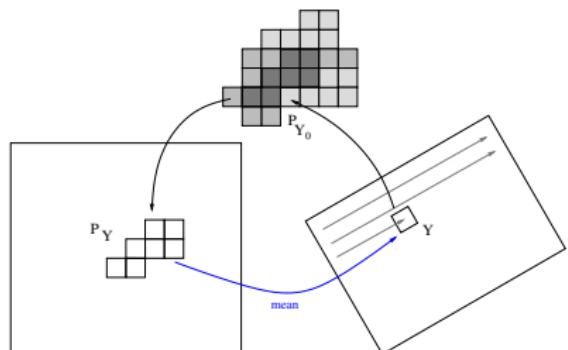
Dimension 2 et 3

- Formules explicites pour les périodes minimales α_i , les paramètres de la super-tuile, ...
- Transformation rapide uniquement avec opérations (+, -) sur les entiers

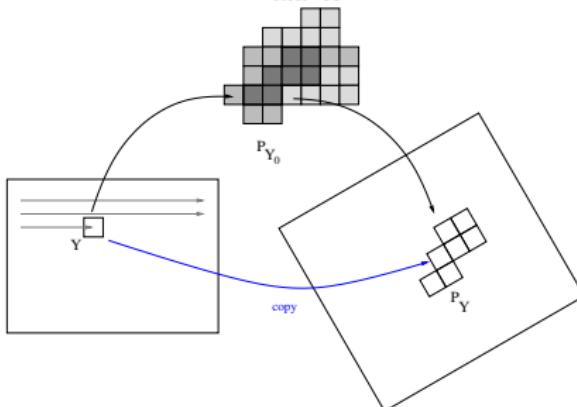
Dimension n : algorithme similaire mais quelques difficultés supplémentaires

- Mise sous forme normale d'Hermite de M
- Calcul des périodes par recherche dans la structure périodique

Contractante:



Dilatante:



Exemple de construction de tuile en 3D

$$MH = T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} j_0 \\ k_0 \\ l_0 \end{pmatrix}$$

Algorithm 1: Construction non optimale de la tuile $P_{i,j,k}$

```

 $A_2 \leftarrow -\left[\frac{-\omega k + l_0}{f}\right];$ 
 $B_2 \leftarrow -\left[\frac{-\omega(k+1) + l_0}{f}\right];$ 
for  $z \leftarrow A_2$  to  $B_2 - 1$  do
     $A_1 \leftarrow -\left[\frac{-\omega j + k_0 + ez}{d}\right];$ 
     $B_1 \leftarrow -\left[\frac{-\omega(j+1) + k_0 + ez}{d}\right];$ 
    for  $y \leftarrow A_1$  to  $B_1 - 1$  do
         $A_0 \leftarrow -\left[\frac{-\omega i + j_0 + by + cz}{a}\right];$ 
         $B_0 \leftarrow -\left[\frac{-\omega(i+1) + j_0 + by + cz}{a}\right];$ 
        for  $x \leftarrow A_0$  to  $B_0 - 1$  do
             $\textcolor{red}{H} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P_{i,j,k};$ 

```

Quelques résultats expérimentaux

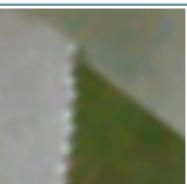
		2D			
		cycles		time	
		BM	P	BM	P
contracting	18 455 094	29 420 628	0,028	0,032	
isometry	71 836 004	42 549 920	0,112	0,072	
dilating	445 193 308	87 550 534	0,656	0,236	

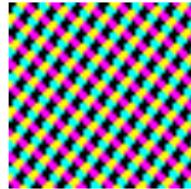
		3D			
		cycles		time	
		BM	P	BM	P
contracting	430 762 506	156 907 924	0,28	0,096	
isometry	24 798 219 637	244 991 792	17,793	0,136	
dilating	NC	17 964 767 908	4266,195	9,517	

PSNR test: composition of $f \cdot f^{-1}$

	2-D (PSNR in dB)		3-D (PSNR in dB)	
	B.M.	Periodicity	B.M.	Periodicity
contracting	24.764	23.4823	17.8026	17.0304
isometry	27.7619	25.8052	19.4115	15.9481
dilating	31.2331	30.8375	20.4435	16.7862

Illustrations

Type	B.M.	Periodicity
Contr.		
Isom.		
Dilat.		



Pavage avec pseudo-couleurs (cas dilatant):

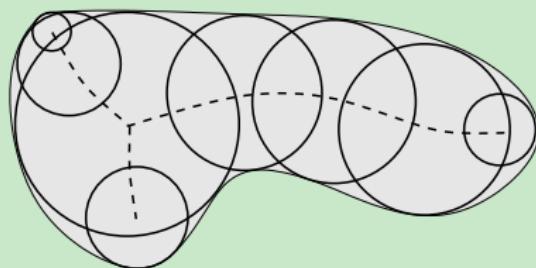
Medial Axis

Definition

- **Maximal ball:** an open ball $B \subseteq X$ is *maximal* in X if for all included open balls B' :

$$B \subseteq B' \subseteq X \implies B = B'.$$

- **Medial Axis:** denoted $\text{AM}(X)$, set of maximal ball centers in X



Many applications

- Shape description/matching
- Image synthesis
- ...

Discrete Medial Axis

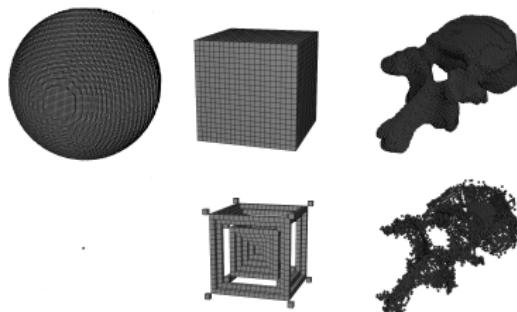
Reformulation

Discrete domain, discrete metric \Rightarrow Digital Balls

Combinatorial Setting

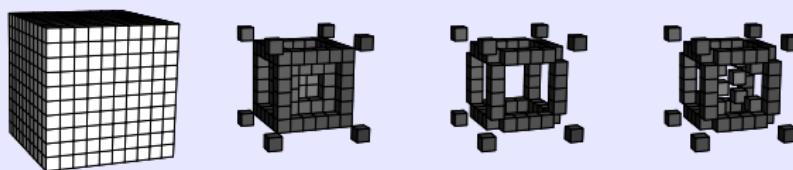
- Finite digital object $X \subset \mathbb{Z}^d \Rightarrow$ the digital medial axis is a finite set of digital balls with $|MA(X)| \leq |X|$
- No ball in $MA(X)$ is covered by any other ball in $MA(X)$

Skipping the details but we have optimal $O(d \cdot n^d)$ algorithm to extract the medial axis for the l_2 metric for objects in $[1 \dots n]^d$ domains



DMA Minimality

Problem Statement



→ subsets of the MA may describe the same object

Two problems

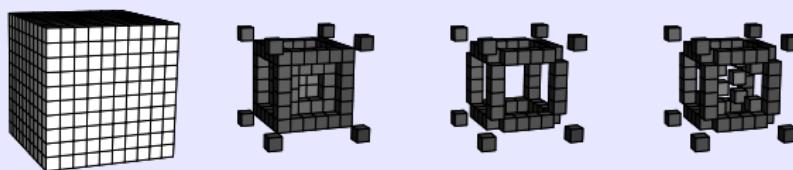
- ① Find the Minimum Discrete Medial Axis (min. in number of disks)
- ② Find a subset of the DMA with less than k balls that covers the entire object (k -MIN)

Contribution

Problem 2 is NP-complete and thus Problem 1 is NP-hard

DMA Minimality

Problem Statement



→ subsets of the MA may describe the same object

Two problems

- ① Find the Minimum Discrete Medial Axis (min. in number of disks)
- ② Find a subset of the DMA with less than k balls that covers the entire object (k -MIN)

Contribution

Problem 2 is NP-complete and thus Problem 1 is NP-hard

Example in dimension 2

$B_1:$ 

$B_4:$

integer values correspond to square of Euclidean distances

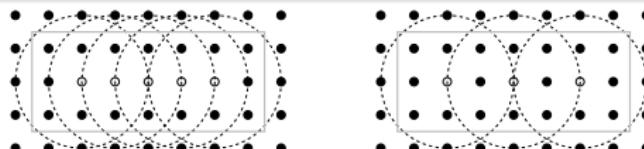
DMA

1	1	1	1	1	1	1	1
1	④	④	④	④	④	④	④
1	④	④	④	④	④	④	④
1	1	1	1	1	1	1	1

All balls are maximal but some of them are covered by union of MA balls

Minimal digital medial axis M^{opt}

1	1	1	1	1	1	1	1
1	④	4	4	④	4	④	1
1	④	4	4	④	4	④	1
1	1	1	1	1	1	1	1



Related problems

Covering problems are always hard

Primitive	Domain	With holes?	Computational class
Rectangle	Orthogonal P.	Y	NP-complete
Rectangle	Orthogonal P.	N	NP-hard
Star shape	Polygon	N	NP-hard
Convex shape	Polygon	N	NP-hard

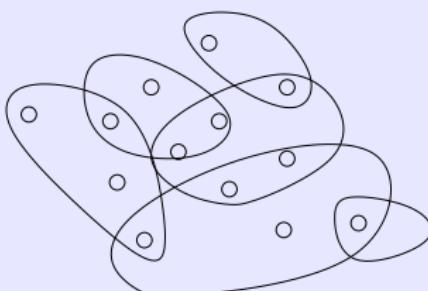
E.g. Square Covering Problem (SCP)

Covering an orthogonal polygon with a minimum number of squares

⇒ Polynomial in time algorithm for hole-free polygon, NP-complete otherwise

Related problems (bis)

MINSETCOVER problem



Question: Cover all points with a minimal number of sets

⇒ NP-complete decision problem

Greedy algorithm

- Select the set which covers a maximal number of points
- We remove the covered points
- Repeat the previous two steps until no points remain

⇒ linear in time algorithm with bounded heuristic !

NP-completeness proof framework

For sure, the problem $k\text{-MIN}$ is in NP .

Things to do

- ➊ Consider a problem \mathcal{P} known to be NP-complete
- ➋ Construct a polynomial reduction from instances of \mathcal{P} to a subset I of instances of $k\text{-MIN}$
- ➌ Prove that a solution to an instance of I leads to a solution for the associated instance in \mathcal{P}

3-SAT

- Instances : logical expression with m clauses and n variables in conjunctive normal form with 3 literals per clause

$$\phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_6 \neg \vee x_3 \vee \neg x_5) \wedge \dots,$$

- Problem : Find an assignment of the variables to validate the Boolean expression ϕ

⇒ 3-SAT is NP-complete

PLANAR-4 3-SAT

Formula-graph

Given a CNF formula ϕ , its *formula-graph* is a bipartite graph $G(\phi) = (V_1, V_2, E)$ where

- V_1 are variables $\{x_i\}$
- V_2 are clauses $\{c_j\}$
- $(x_i, c_j) \in E$ if x_i appears in c_j

Definition

A PLANAR-4 3-SAT instance ϕ is a Boolean formula such that:

- ϕ is in CNF with 3 literals per clause
- $G(\phi)$ is planar
- A variable may appear at most four times in ϕ

⇒ PLANAR-4 3-SAT is NP-complete

Geometrical Reduction Construction

We need

Starting from any PLANAR-4 3-SAT instance ϕ we construct an object $X \subset \mathbb{Z}^2$ from

- A geometric gadget to encode **variables**
- A geometric gadget to encode **graph edges**
- A geometric gadget to encode **clauses**

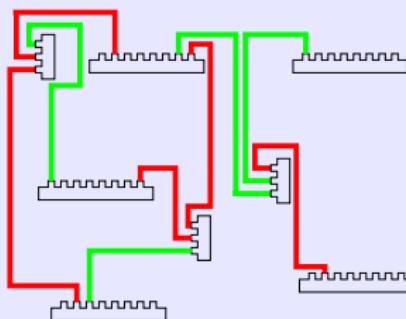
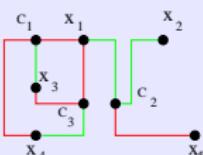
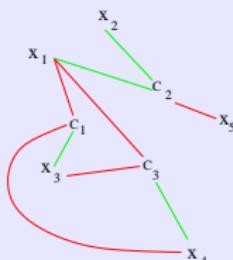
..such that

- Each variable gadget admits **two different ways** to be covered by balls in a minimal way (to encode *true/false* assignments)
- gadget for graph edges just have to **transmit** the variable assignments to clauses
- If a clause is not satisfied, its minimal decomposition should lead to a greater number of balls

NP-completeness proof: PLANAR-4-3-SAT reduction

Overview

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4)$$



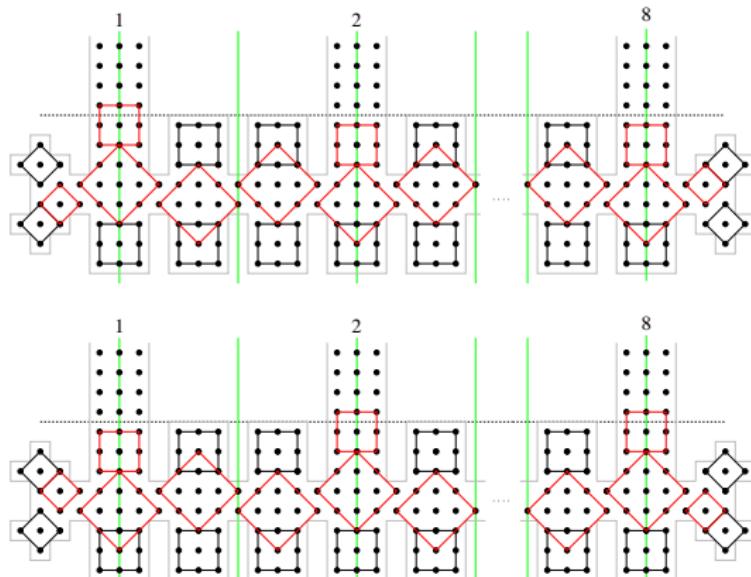
Instance of PLANAR-4-3-SAT \Rightarrow Discrete Orthogonal Embedding \Rightarrow Discrete Object X

Key-points

- Polynomial reduction of ALL PLANAR-4-3-SAT instances into a subset of k -MIN instances
- An algorithm able to solve k -MIN should also solve PLANAR-4-3-SAT

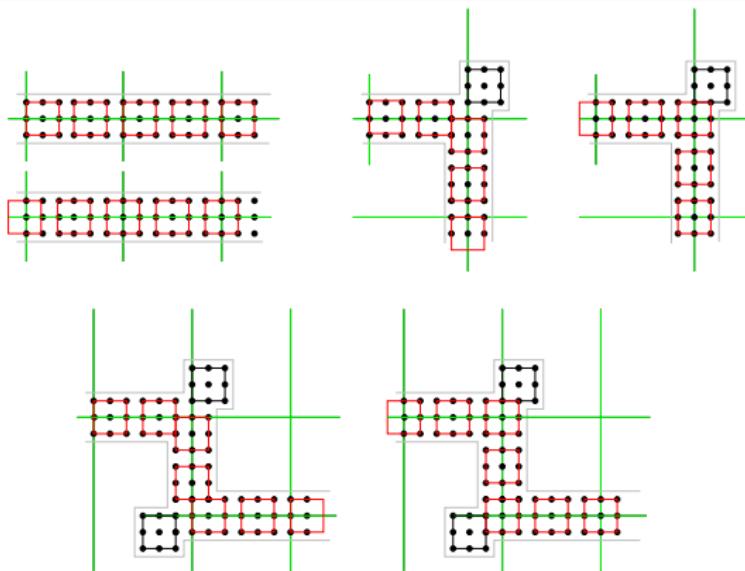
Geometrical interpretation of a PLANAR-4-3-SAT instance: Variables

- Eight slots to encode the uses of the variable in a PLANAR-4-3-SAT formula
- Two minimal decomposition with d_E balls (72 balls)
 - one protrudes out only at even slots \Rightarrow True
 - one protrudes out only at odd slots \Rightarrow False
- Constant size



Geometrical interpretation of a PLANAR-4-3-SAT instance: Wires

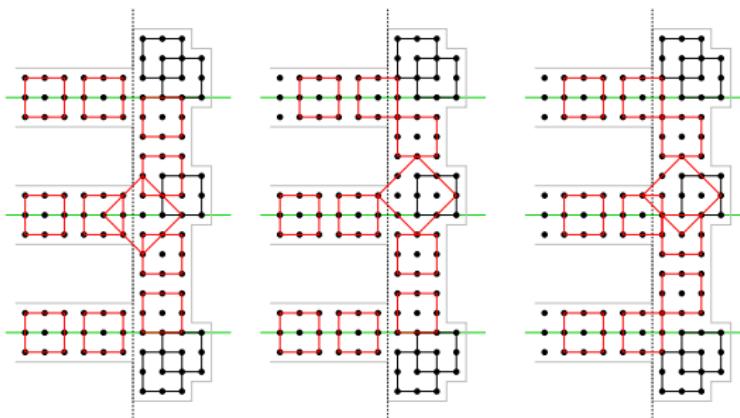
- Transmission of the Truth assignment signals from variables to clauses
- Wires can be bent without changing the signal
- Extremities of the wires are placed on a 6×6 sub-grid
- Size independent to the signal value



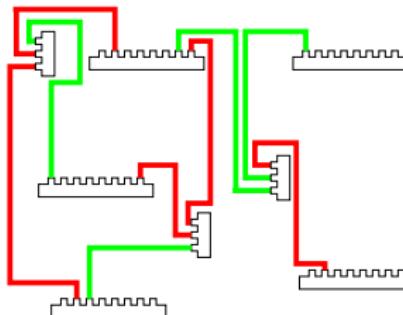
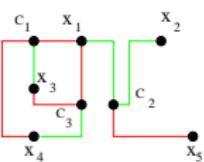
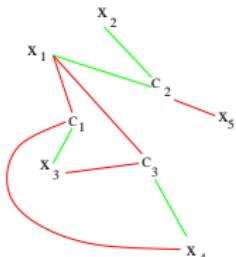
Geometrical interpretation of a PLANAR-4-3-SAT instance: Clauses

Clauses

- Input: three wires
- 10 balls required to cover the shape if all signals are **False** and 9 otherwise
- Constant size



Geometrical interpretation of a PLANAR-4-3-SAT instance: Overall



Putting all together

ϕ Planarity + Discrete Orthogonal Embedding + sub-grid alignments

\Rightarrow (1)-connected discrete object such that there is no intersection between wires, variables and clauses

\Rightarrow Object size polynomial in the ϕ size

[Details skipped...]

$$\Rightarrow k(\phi(V, C)) = 72 \cdot |V| + w(\phi) + 9 \cdot |C|$$

[Details skipped...]

The Minimum Medial Axis problem is NP-complete

What's next?

Next Step: Approximation heuristics with bounds (if possible)

Object	$\mathcal{F} = \text{AMD}(X)$	$\hat{\mathcal{F}}$ INGELA, GUNILLA	$\hat{\mathcal{F}}$ Greedy (with bound !)
	104		

Pour terminer

Conclusion

Solution algorithmique/théorique pour la modélisation et l'analyse d'objets discrets

Interactions avec de nombreuses disciplines

- Arithmétique / Théorie des nombres / Combinatoire
- Géométrie algorithmique
- Complexité
- *Morphologie mathématique*
- *Topologie*
- ...

Approche

L'analyse géométrique et topologique peut se faire de manière efficace sur les données discrètes sans interpolation/approximation/reconstruction

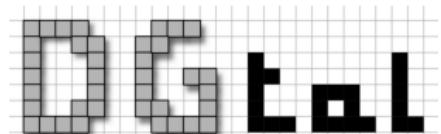
Avantages

- Calculs géométriques exacts en nombres entiers
- Adapté pour l'analyse d'images
- Accélération possible via propriétés arithmétiques

DGtal

Objectifs

- Consolider les développements de la communauté
- Faciliter l'appropriation des outils de géométrie discrète
- Faciliter l'analyse expérimentale par rapport à l'existant
- Construction de prototypes pour d'autres disciplines
- ...



<http://libdgtal.org>

<http://github.com/DGtal-team>

- Bibliothèque open-source LGPL
- C++, programmation générique
- Modélisation d'images, d'objets discrets en dimension d , outils d'analyse géométrique, modèles topologiques, outils de visualisation rapides
- ...





L. Buzer.

A linear incremental algorithm for naive and standard digital lines and planes recognition.
Graphical Models, 65(1-3):61–76, may 2003.



F De De.

Analyse des parties linéaires des objets discrets pour l'extraction de caractéristiques géométriques.

PhD thesis, 2007.



L. Dorst and A. W. M. Smeulders.

Decomposition of discrete curves into piecewise straight segments in linear time.
In *Contemporary Mathematics*, volume 119, 1991.



V. A. Kovalevsky.

New definition and fast recognition of digital straight segments and arcs.
In *Proc. 10th Intl. Conf. on Pattern Recognition*, pages 31–34, 1990.



M. Lindenbaum and A. Bruckstein.

On recursive, $o(n)$ partitioning of a digitized curve into digital straigth segments.
IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 15(9):949–953, sep 1993.



Nimrod Megiddo.

Linear programming in linear time when the dimension is fixed.
J. ACM, 31(1):114–127, jan 1984.



J. O'Rourke.

An on-line algorithm for straight lines between data ranges.

Communication of the ACM : Programming Techniques and Data Structures, 24(9):574–578, 1981.



F. P. Preparata and M. I. Shamos.

Computational Geometry : An Introduction.

Springer-Verlag, 1985.



Debled I. Rennesson.

Etude et reconnaissance des droites et plans discrets.

PhD thesis, Université Louis Pasteur, 1995.



Debled I. Rennesson and J. P. Reveillès.

A linear algorithm for segmentation of digital curves.

In *International Journal on Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, volume 9, pages 635–662, 1995.