- TD 4. Graphes Orientés -

- Exercice 1 - Forte connexité.

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté. Une *composante fortement connexe* de D est un sous-ensemble X de V tel que pour tout $x, y \in X$, il existe un chemin orienté de x à y, et tel que X est maximal par inclusion pour cette propriété. Lorsque V est une composante fortement connexe, on dit que D est *fortement connexe.*

Préciser les composantes fortement connexes des graphes orientés $D = (V, A)$ suivants :

a. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{12, 23, 31, 14, 24, 34, 45, 15\}$.

b. $V = \{1, \dots, n\}$ et $A = \{ij \ : \ j - i = 2 \ mod \ n\}$.

- Exercice 2 - Diamètre orienté.

Soit D un graphe orienté sur n sommets. Le *diamètre orienté* de D est la distance maximale entre deux sommets de D. Lorsque D est non fortement connexe, ce diamètre est infini. On suppose ici que les graphes étudiés sont fortement connexes. Pour un graphe orienté D, on note k son diamètre orienté et d son degré sortant maximal. Pour k et d fixés, on note $N(k, d)$ le nombre maximal de sommets d'un graphe de diamètre orienté k et de degré sortant maximal d.

a. Lorsque $d = 1$, montrer que $N(k, d) \leq k + 1$. Caractériser les graphes orientés qui atteignent cette borne.

b. Lorsque $d > 1$, montrer que $N(k, d) \leq (d^{k+1} - 1)/(d - 1)$.

- Exercice 3 - Graphes de de Bruijn.

Le graphe $B(l, x)$ a pour ensemble de sommets l'ensemble des mots de longueur l sur l'alphabet $\{0, \dots, x - 1\}$. Les sommets $A = a_1 a_2 \dots a_l$ et $B = b_1 b_2 \dots b_l$ sont reliés par un arc AB si et seulement si $a_2 \dots a_l = b_1 \dots b_{l-1}$.

a. Représenter $B(3, 2)$.

b. Calculer n, le degré maximum sortant d et le diamètre orienté k du graphe $B(l, x)$.

c. Montrer que $n \geq N(k, d)/2$.

- Exercice 4 - Vrai/Faux.

Confirmer (et prouver) ou infirmer (et donner un contre-exemple) les propriétés suivantes :

a. Si un graphe orienté D ne contient pas de circuit, alors son graphe sous-jacent $u(D)$ est une forêt.

b. Si un graphe orienté D est fortement connexe, alors il contient un circuit hamiltonien.

c. La distance orientée entre deux sommets x et y est toujours plus grande que la distance (non orientée) entre x et y dans le graphe $u(D)$.

- Exercice 5 - Algorithme de Tri Topologique.

a. Effectuer un tri-topologique du graphe orienté D d'ensemble de sommets $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et d'ensemble d'arcs $\{15, 45, 21, 26, 23, 36, 43, 42, 56, 53, 41, 16\}$. On en fera tout d'abord une représentation planaire.

b. Combien D possède-t-il de tri-topologiques ? Justifier.

c. Ecrire un algorithme TRI-TOPOLOGIQUE(D) qui retourne un tri-topologique de D lorsque G en admet un, ou bien retourne un circuit de D sinon. Les voisins sortants des sommets v de D sont donnés sous forme de pile Vois$^+(v)$. Votre algorithme utilisera un parcours en profondeur :

> Tant que tous les sommets n'ont pas été visités.
> Choisir r non visité.
> Effectuer un parcours en profondeur de racine r (qui stoppe s'il découvre un circuit).
> Retourner les sommets par ordre inverse de date de fin.

d. Dérouler cet algorithme sur le graphe de la question a., en partant du sommet 1.

e. Etablir la complexité de l'algorithme.

f. Prouver la validité de l'algorithme.

- Exercice 6 - Graphes orientés eulériens.

Un graphe orienté $D = (V, A)$ est *eulérien* si son graphe sous-jacent est connexe et si D vérifie la loi de Kirchhoff, c'est à dire que pour tout sommet v, on a $d^+(v) = d^-(v)$.

a. Montrer que les graphes de de Bruijn sont eulériens.

b. On suppose D eulérien. Soit X un sous ensemble de V contenant $a(X)$ arcs. Exprimer le nombre d'arcs orientés de X vers $V \setminus X$ en fonction de $a(X)$ et des degrés sortants des sommets de X.

c. En déduire que le nombre d'arcs orientés de X vers $V \setminus X$ est égal au nombre d'arcs orientés de $V \setminus X$ vers X.

d. En déduire que D est fortement connexe.

- Exercice 7 - Marches eulériennes.

Un graphe non-orienté $G = (V, E)$ est dit *eulérien* si G est connexe et si le degré de chacun de ses sommets est pair. On considère une marche M sur G passant au plus une fois par chaque arête et de longueur maximale.

a. Montrer que M est fermée, i.e. le sommet de départ est égal au sommet d'arrivée.

b. Supposons qu'une arête xy ne soit pas dans M. Montrer que M ne passe ni par x, ni par y.

c. Montrer alors que M passe par toutes les arêtes de G.

d. En déduire que G possède une orientation eulérienne.

- Exercice 8 - Application aux digicodes.

Soit $l > 0$ un entier et $x > 0$ un entier. Un *mot digicode* (l, x) est un mot sur l'alphabet $\{0, \ldots, x-1\}$ dans lequel tout mot sur $\{0, \ldots, x-1\}$ de longueur l apparaît en tant que facteur.

a. Montrer qu'un mot digicode (l, x) a longueur au moins $x^l + l - 1$. Un mot digicode est *minimal* s'il possède ce nombre de lettres.

b. Proposer un mot digicode (2,2) minimal, puis (3,2) minimal.

c. Montrer qu'il existe un mot digicode (l, x) minimal pour toutes les valeurs de l et x. On pourra utiliser un graphe de de Bruijn.