Relations Infinies Indécomposables Critiques.

Luc Rigollet
et
Stéphan Thomassé

Laboratoire LMD, Institut de Mathématiques-Informatique,
Université Claude Bernard
43, Boulevard du 11 novembre 1918,
69622 Villeurbanne Cedex, France
email : rigollet@jonas.univ-lyon1.fr
email : thomasse@jonas.univ-lyon1.fr

Résumé. *Nous prouvons que toute relation binaire indécomposable infinie abrite strictement une relation indécomposable de même cardinal.*

Critically indecomposable infinite relations

Abstract. *We prove that any indecomposable (or prime) infinite relation strictly embeds an indecomposable relation which have same cardinal.*

La notion d'intervalle relationnel (et celle d'indécomposabilité) joue un rôle important en théorie de l'ordre. Notamment, un graphe de comparabilité indécomposable admet exactement deux orientations transitives. Beaucoup de questions concernant les relations binaires peuvent être réduites au cas indécomposable. Un des problèmes des relations indécomposables finies (si l'on veut par exemple effectuer une récurrence) est que l'on peut perdre la propriété d'indécomposabilité en supprimant un sommet. A. Ehrenfeucht et G. Rozenberg ont prouvé que toute relation indécomposable finie sur n sommets admet une restriction indécomposable sur $n-1$ ou $n-2$ sommets. J.H. Schmerl et W.T. Trotter ont amélioré ce résultat en caractérisant les relations binaires finies critiques indécomposables (décomposables dès que l'on supprime un sommet). Dans le cas infini, P. Ille a prouvé que toute partie Y d'une relation indécomposable R est contenue dans une restriction indécomposable de R équipotente à Y. En réponse à une question de A. Boussaïri, nous prouvons que toute relation infinie indécomposable abrite strictement une sous-relation induite indécomposable qui lui est équipotente.

1 Indécomposabilité des Relations Binaires.

Définition 1 - Une *relation binaire* est un couple $R = (X, U)$ où X est l'ensemble des *sommets* et $U \subseteq X \times X$. R est *abritée* dans $R' = (X', U')$ s'il existe une injection f de X dans X' telle que $(x, y) \in U \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in U'$. Si f est une bijection, R est *isomorphe* à R'. Soit Y une partie de X, $R(Y) = (Y, (Y \times Y) \cap U)$ est la sous-relation *induite* par R sur Y.

- Soient $R = (X, U)$, $R' = (X', U')$ deux relations binaires, $x, y \in X$ et $x', y' \in X'$ avec $x \neq y$ et $x' \neq y'$, on dit que xy est *semblable* à $x'y'$ lorsque $(x, y) \in U \Leftrightarrow (x', y') \in U'$ et $(y, x) \in U \Leftrightarrow (y', x') \in U'$.

- Lorsque $(x,y) \in U \wedge (y,x) \in U$, xy est une *arète* (x et y sont *reliés*).
- Lorsque $(x,y) \notin U \wedge (y,x) \notin U$, xy est une *non arète* (x et y sont *non reliés*).
- Lorsque $(x,y) \in U \wedge (y,x) \notin U$, xy est une *arète orientée* (x et y sont *comparables* et y *domine* x).

Toutes les relations considérées seront binaires et irréflexives.

Exemple 1 - Un *graphe* G est une relation binaire symétrique, G est *connexe* s'il existe, pour tout $x \neq y$, une suite $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ telle que x_i est relié à x_{i+1} pour tout $i < n$.

- Un *ordre partiel* O est une relation binaire antisymétrique et transitive, si les sommets de O sont deux à deux comparables, O est une *chaîne*.

- Un *préordre* P est une relation binaire transitive. Une *classe* de P est une partie maximale par inclusion dont tous les sommets sont deux à deux reliés. Si le *quotient* de P par ses classes est une chaîne, P est une *préchaîne*. Un *préarbre* est un préordre tel que la section finale engendrée par chaque sommet est une préchaîne.

Définition 2 (Fraïssé [2]) - Un *intervalle* de R est un sous-ensemble I de X tel que xz est semblable à yz pour tout $x, y \in I$ et $z \notin I$. Les singletons, X et $\emptyset$ sont des intervalles dit *triviaux*.

- La relation R est *indécomposable* si tous ses intervalles sont triviaux, elle est de plus *indécomposable critique* si pour tout $x \in X$, $R(X \setminus \{x\})$ est décomposable.

- Lorsque R admet une partition en deux intervalles non vides I et J, on distingue trois cas :

i) Tous les sommets de J dominent ceux de I : R est la *somme directe* de I et J.

ii) Tous les sommets de J sont reliés à ceux de I : R est la *somme série* de I et J.

iii) Tous les sommets de J sont non reliés à ceux de I : R est la *somme parallèle* de I et J.

- Soit I un intervalle non vide de R et $x \in I$, la relation $R((X \setminus I) \cup x))$ s'appelle la *réduction* de I dans R. Lorsque la relation R possède un intervalle non trivial maximal pour l'inclusion (par exemple si un sommet de R n'est contenu dans aucun intervalle non trivial), on appelle *réduction* de R la relation indécomposable obtenue en réduisant tous les intervalles non triviaux de R.

Dans la suite R est indécomposable et infinie.

Théorème 1 (Ehrenfeucht et Rozenberg [1]) *Toute relation indécomposable à n sommets abrite une relation indécomposable à $n-1$ ou $n-2$ sommets.*

Théorème 2 (Schmerl et Trotter [4]) *Il existe 9 familles de relations critiques indécomposables finies.*

Théorème 3 (Ille [3]) *Soit $Y \subseteq X$ tel que $R(Y)$ est indécomposable et $F \subseteq X$ fini. Il existe un ensemble fini F' contenant F tel que $R(Y \cup F')$ est indécomposable.*

Remarque 1 - Dans le cas infini, on note qu'il est nécessaire d'enlever κ sommets au graphe acyclique connexe dont tous les sommets ont κ voisins afin d'obtenir une sous-relation indécomposable stricte.

- Toute relation binaire R est abritée dans un indécomposable critique. Par exemple, lorsque R est un graphe connexe, on peut ajouter des chemins infinis émanant de chaque sommet de R. Le graphe obtenu est indécomposable et devient non connexe dès que l'on retire un sommet.

Nous allons construire un préarbre sur certains éléments de X qui traduit la relation "y appartient à un intervalle non trivial de $R(X \setminus \{x\})$". Appliquée à X, cette relation ne donne pas toujours un préarbre, des sommets dits "extrêmes" doivent en être écartés. Dans cette étude, les sommets extrêmes seront négligés, on verra par la suite qu'ils ne sont pas trop "nombreux".

2 Création d'Intervalles.

Définition 3 - On dit qu'un élément x est *extrême* si $X \setminus \{x, y\}$ est un intervalle de $R(X \setminus \{y\})$.

Lemme 1 *L'ensemble des sommets de R qui ne sont pas extrêmes est équipotent à X.*

Définition 4 - Soit x un sommet de X, on dit que x *crée* I si I est un intervalle non trivial de $R(X \setminus \{x\})$, x est alors *créateur d'intervalle*. On dira de même que x *crée* y si y est un élément d'un intervalle non trivial créé par x. On note $x \leq y$ lorsque y crée x, $x < y$ lorsque $x \leq y$ et x ne crée pas y, $x|y$ lorsque x ne crée pas y et y ne crée pas x, $x \equiv y$ lorsque $x \leq y$ et $y \leq x$, $\{x, u\} \leq y$ lorsque y crée un intervalle non trivial contenant x et u.

- $\mathcal{C}(R)$ est l'ensemble des sommets créateurs d'intervalle de R qui ne sont pas extrêmes.

- On note $\preceq$ le transitivé de $\leq$, c'est à dire que $x \preceq y$ ssi il existe une suite $x = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = y$. On notera $\mathcal{P}(R)$ le préordre $(\mathcal{C}(R), \preceq)$. Les classes de $\mathcal{P}(R)$ sont appelées *classes de création intervallaire.*

Lemme 2 *Soient x, y et u trois éléments de $\mathcal{C}(R)$.*
i) Si $x \geq y$ et y crée un intervalle contenant u et pas x, alors $\{y, u\} \leq x$.
ii) Si $x \geq y > u$, alors $x \geq u$.
iii) Si $u < x$ et $u < y$ alors $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Corollaire 1 *Soit C et C' deux classes distinctes de $\mathcal{P}(R)$ telles que $C \preceq C'$, alors pour tout $x \in C$ et tout $y \in C'$ on a $x < y$. De plus, $\mathcal{P}(R)$ est un préarbre.*

Lemme 3 *Il n'existe pas de sous-chaîne de $\mathcal{P}(R)$ isomorphe à $\omega + 1$ ou bien à $1 + \omega^*$.*

Lemme 4 *Soient x, y et u trois éléments de $\mathcal{P}(R)$ tels que $x > y > u$, on a :*
i) Tout intervalle créé par x contenant u contient aussi y.
ii) Tout intervalle créé par x contenant u et y contient tous les sommets de $\mathcal{P}(R)$ dominés par u.

3 Les Classes de $\mathcal{P}(R)$.

Nous prouvons qu'il n'existe que deux sortes de classes. Les classes chemins représentent essentiellement la structure des indécomposables critiques finis, les éléments des classes chemins créent un unique intervalle à deux éléments. Les classes complètes regroupent les sommets qui coupent la relation en deux intervalles. *Dans la suite C est une classe de $\mathcal{P}(R)$.*

Lemme 5 *Si $x \equiv y \equiv u$ sont trois éléments de C tels que $x|u$, alors y ne crée que l'intervalle $\{x, u\}$ et il existe c tel que u ne crée que l'intervalle $\{y, c\}$. De plus, C est minimale dans $\mathcal{P}(R)$ et est au plus dénombrable.*

Définition 5 - On appelera *classe chemin* toute classe de $\mathcal{P}(R)$ possédant au moins trois éléments et vérifiant les hypothèses du lemme 5.

- On appelle *classe complète* toute classe de $\mathcal{P}(R)$ ayant plus de deux éléments dont les sommets sont deux à deux équivalents modulo $\equiv$.

- On dit qu'un sommet x de $\mathcal{P}(R)$ est *coupeur* si $R(X \setminus \{x\})$ admet une partition en deux intervalles. Un sommet coupeur est de type *direct*, *série* ou *parallèle* selon la partition qu'il engendre.

Théorème 4 *Une classe ayant au moins trois sommets est soit une classe complète, soit une classe chemin. Tous les éléments d'une classe complète C de $\mathcal{P}(R)$ sont coupeurs et de même type (qui sera alors le type de la classe C). Ainsi, s'il existe une classe complète, c'est le maximum de $\mathcal{P}(R)$, elle est par conséquent unique.*

Dans la suite de cette partie, R est critique et $\mathcal{P}(R) = C$ où C est une classe complète.

Définition 6 - $D = (\mathbb{Z}, U)$ est une *somme directe critique* si pour tout $i \in \mathbb{Z}$: ij est une arète orientée telle que j domine i lorsque $j > i+1$ et $i(i+1)$ n'est pas une arète orientée telle que $i+1$ domine i.

- Soient x et y deux éléments de C supposée de type parallèle. On note C_x^y la composante connexe de $R(X \setminus \{x\})$ qui contient y. Si $C_x^y \cap C_y^x = \emptyset$, on dit que x et y sont *voisins*.

Lemme 6 *Si C est de type direct, la relation R est une somme directe critique.*

Lemme 7 *Soient x et y deux éléments de C de type parallèle :*
i) $X = C_x^y \cup C_y^x$.
ii) Si x et y sont voisins et $z \in C \cap C_x^y$, alors x et z ne sont pas voisins.
iii) Si x et y ne sont pas voisins, tout intervalle I créé par x contenant y contient aussi C_x^y.

4 Sous-Relation Stricte Indécomposable Equipotente.

Théorème 5 *R abrite strictement une relation indécomposable de même cardinal.*

Preuve. On suppose que R est indécomposable critique et que C est une classe de $\mathcal{P}(R)$. Supposons que $\mathcal{P}(R)$ admet une classe minimale non complète. Si c'est une classe chemin, on conclut grâce au lemme 5, sinon, cette classe à au plus 2 sommets, on conclut grâce au lemme 1. A présent, $\mathcal{P}(R)$ n'a pas d'éléments minimaux.

- Si deux sommets x et y de $\mathcal{P}(R)$ sont incomparables dans $\mathcal{P}(R)$, l'un d'entre eux, disons x est tel que la réduction de $R(X - \{x\})$ est équipotente à R.

- Si $\mathcal{P}(R)$ est une préchaîne, d'après le lemme 3 son quotient est ω^* ou $\omega^* + \omega$. Les classes de $\mathcal{P}(R)$ (sauf peut-être la classe complète) ont 1 ou 2 sommets d'après le théorème 4.

i) Si $\mathcal{P}(R)$ est isomorphe à $\omega^* + \omega$, il n'existe pas de classe complète, R est donc dénombrable. On se donne $x \in C$, une infinité de sommets de $\mathcal{P}(R)$ ne sont pas dominés par x, donc la réduction de $R(X - \{x\})$ est équipotente à R.

ii) Si $\mathcal{P}(R)$ est isomorphe à ω^*. Si R n'est pas dénombrable, elle possède une classe complète qui lui est équipotente donc pour tout x choisi dans une classe non complète, la réduction de $R(X - \{x\})$ est équipotente à R. Si R est dénombrable, on se donne $x \in C$, on peut trouver $x > y > u$ dans $\mathcal{P}(R)$. D'après le lemme 4, l'ensemble (infini) des sommets de $\mathcal{P}(R)$ dominés par u est contenu dans ou disjoint de tous les intervalles non triviaux de $R(X - \{x\})$, R abrite donc un indécomposable infini.

- Le dernier cas à étudier est lorsque $\mathcal{P}(R)$ est réduit à la classe complète C :

i) Si C est de type direct, c'est une somme directe critique, elle abrite bien une restriction dénombrable indécomposable et donc équipotente à R.

ii) Enfin, si C est de type parallèle et $x, y \in C$. D'après le lemme 7 i) , $C_x^y \cap C$ ou bien $C_y^x \cap C$ est équipotent à X. Disons que cette partie est $C_x^y \cap C$, d'après le lemme 7 iii), l'ensemble des sommets non voisins de x appartenant à $C_x^y \cap C$ est , ou bien inclus, ou bien disjoint de tout intervalle créé par x. Donc R abrite strictement un indécomposable équipotent.

iii) Si C est de type série, on raisonne comme dans le cas ii) $\square$

References

[1] A. Ehrenfeucht et G. Rozenberg, Primitivity is Hereditary for 2-Structures, *Theoret. Comput. Sci.*, **70** (1990), 343-358.

[2] R. Fraïssé, L'Intervalle en Théorie des Relations, ses Généralisations, Filtre Intervallaire et Clôture d'une Relation, *Orders, description and roles*, Pouzet et Richard éd., Annals of Discrete Math, North-Holland, **23** (1984), 343-358.

[3] P. Ille, Graphes Indécomposables Infinis, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, Série 1, **318** (1994), 499-503.

[4] J.H. Schmerl et W.T. Trotter, Critically Indecomposable Partially Ordered Sets, Graphs, Tournaments and Other Binary Relations and Structures, *Discrete Math.*, **113** (1993), 191-205.