

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée à

L'Ecole Normale Supérieure de Lyon

par

STÉPHANE ROUX

Maître de conférences

Ondelettes et multifractales

Soutenance prévue le 10 Décembre 2013 devant la commission d'examen
formée de :

Rapporteurs :

CHARLES MENEVEAU	Professeur, Johns Hopkins University, Baltimore, USA
OLIVIER MICHEL	Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble, France
DIMITRI VAN DE VILLE	Professeur, Université de Genève, Suisse

Examineurs :

ALAIN ARNEODO	Directeur de Recherche, CNRS, ENS de Lyon
PATRICE ABRY	Directeur de Recherche, CNRS, ENS, Paris
PATRICK FLANDRIN	Directeur de Recherche, CNRS, ENS de Lyon
STÉPHANE JAFFARD	Professeur, Université Paris-Est Créteil

Je tiens à remercier Charles Meneveau, Olivier Michel et Dimitri Van De Ville pour avoir examiné en détail ce manuscrit.

Je remercie Stéphane Jaffard et Patrick Flandrin d'avoir accepté de participer au jury.

Je remercie Alain Arneodo et Patrice Abry qui m'ont aidé à trouver ma voie en recherche.

Je remercie Laurent, Pierre ainsi que tous mes collaborateurs et tous les membres du Laboratoire de Physique.

à ma famille

Table des matières

I	Introduction	1
II	Ondelettes et invariance d'échelle	3
II.1	Formalisme multifractal : Théorie	4
II.1.1	Exposant de Hölder	4
II.1.2	Spectre de singularités	6
II.1.3	Formalisme multifractal	8
II.1.4	Analyse en cumulants du logarithme	9
II.1.5	Corrélation du logarithme des coefficients multirésolution	10
II.1.6	Propagateur	11
II.1.7	Formalisme grand canonique	12
II.2	transformée en ondelettes	14
II.2.1	transformée en ondelettes continue	14
II.2.2	transformée en ondelettes discrète	17
II.2.3	Analyse des singularités	18
II.2.4	Relation avec la transformée de Fourier	19
II.2.5	Intégration et intégration fractionnaire	20
II.3	Formalisme multifractal : estimation	20
II.3.1	coefficients en ondelettes	22
II.3.2	Les maxima du module de la TOC	24
II.3.3	Les coefficients dominants de la TOD	28
II.3.4	Autres méthodes : MFDFA	32
II.3.5	Performances d'estimations	33
II.4	Singularité oscillante : β -Leaders	34
II.4.1	Coefficient d'oscillation local	34
II.4.2	Formalisme multifractal sur intégrée fractionnaire	35
II.4.3	Formalisme multifractal pour l'exposant d'oscillation	38
II.5	Invariance d'échelle Anisotrope	41
II.5.1	Transformée hyperbolique en ondelettes	41
II.5.2	Vers une analyse multifractale anisotrope	43
II.5.3	Processus multifractal anisotropes	49

II.6	Estimation de variance : l'échantillonnage bootstrap	55
II.6.1	Test de multifractalité.	57
II.6.2	Test d'anisotropie.	58
III	Applications	61
III.1	Turbulence pleinement développée	61
III.1.1	Turbulence Eulérienne	62
III.1.2	Turbulence Lagrangienne	64
III.1.3	Singularités oscillantes	67
III.2	Analyse 2D d'images satellite de nuage	68
III.3	Données pluviométriques	69
III.4	Invariances d'échelle dans la fracture des matériaux fragiles . .	70
III.5	Ionosphère	72
III.6	Transformée hyperbolique en ondelettes	74
IV	Ondelettes et événements localisés	77
IV.1	Événements localisés et intermittence	77
IV.1.1	Filaments de vorticité et intermittence	77
IV.1.2	Intermittence en turbulence d'onde	81
IV.2	Détection d'�v�nements localisés	
	en fréquence	85
IV.2.1	Signaux à oscillations multiples	85
IV.2.2	Detection d'ondes gravitato-accoustiques	88
	Bibliographie	91

Chapitre I

Introduction

Ce document constitue le mémoire présenté pour obtenir l'habilitation à diriger les recherches. Il s'organise en trois parties.

Dans la première partie, je présente une partie des travaux de recherche que j'ai effectué depuis ma thèse de doctorat. Cette partie se décline en trois chapitres. Dans le premier chapitre, je présente de manière générale mon domaine de recherche principal, c'est à dire l'analyse multifractale basée sur la transformée en ondelettes. Je propose dans cette partie différentes variations de l'analyse multifractale pour prendre en compte la présence éventuelle d'anisotropie ou de singularité oscillante. Le deuxième chapitre décrit quelques applications de ces formalismes multifractals à différents problèmes physiques. Le troisième chapitre propose quelques applications de l'utilisation de la transformée en ondelettes pour la détection d'événements localisés en temps ou en fréquence.

La deuxième partie présente mon curriculum vitae détaillé ainsi que l'ensemble de mes publications.

Dans la troisième partie, j'ai sélectionné quatre publications qui me semble refléter la diversité de mon travail de recherche.

Chapitre II

Ondelettes et invariance d'échelle

La notion d'invariance d'échelle permet de désigner des objets qui manifestent un comportement très irrégulier et qui ne possèdent aucune échelle de longueur caractéristique. Plus précisément, cette notion désigne des objets, qui sont invariants éventuellement dans un sens statistique, par un certain nombre d'opérations de similitude, essentiellement des translations, des rotations et des dilatations. Pour un objet invariant d'échelle f de \mathbb{R}^d , on a

$$\{f(a^E \mathbf{x})\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{a^{h(\mathbf{x})} f(\mathbf{x})\}, \quad (\text{II.1})$$

où $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ représente l'égalité en loi et E est une matrice de transformation telle que $Tr(E) = d$. Si $E = Id(\mathbb{R}^d)$ alors l'invariance d'échelle est isotrope : f dilaté d'un facteur a est donc indiscernable de f multiplié par $a^{h(\mathbf{x})}$. Si $h(\mathbf{x}_0)$ ne dépend pas de \mathbf{x}_0 alors notre objet f est exactement auto-similaire et on parle d'objet fractal. Par contre si $h(\mathbf{x}_0)$ varie d'un point à un autre, l'objet est dit multifractal dans le sens où il présente une variabilité ou une singularité plus grande dans certaines régions de l'espace.

Le formalisme multifractal proposé originellement par Mandelbrot [1] permet de décrire de manière statistique le caractère singulier des mesures fractales à partir du comportement en loi de puissance de certaines quantités mesurables. Ce formalisme a été généralisé aux fonctions par Parisi et Frisch [2] dans le contexte de la turbulence pleinement développée pour rendre compte de l'observation expérimentale que le champ de dissipation de l'énergie n'est pas distribué de manière uniforme dans l'espace [3, 4].

C'est enfin l'apparition de la transformée en ondelettes et des analyses multirésolutions qui a permis de donner un cadre théorique à ce formalisme et de le généraliser à tout type de fonctions ou mesures. Ce formalisme revient

en fait à caractériser les fluctuations spatiales (ou temporelles) de la régularité du champ analysé.

Dans ce paragraphe je présente rapidement le formalisme multifractal ainsi que la transformée en ondelettes. Ensuite je présenterai mes différentes contributions au niveau méthodologique et théorique dans le domaine de l'estimation des lois d'échelles.

II.1 Formalisme multifractal : Théorie

L'analyse multifractale d'une distribution bornée $f(\mathbf{x})$ consiste à décrire de manière statistique les fluctuations de régularité locale en fonction de \mathbf{x} . Cette régularité est mesurée en comparant localement les variations de f à un comportement en loi de puissance.

II.1.1 Exposant de Hölder

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, f appartient à $C^\alpha(\mathbf{x}_0)$ s'il existe une constante $C > 0$ et un polynôme de degré $\deg(P_{\mathbf{x}_0}) < \alpha$ tel que

$$|f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\alpha, \quad (\text{II.2})$$

quand $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \rightarrow 0$. L'exposant de Hölder est défini comme le supremum de ces α :

$$h(\mathbf{x}_0) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(\mathbf{x}_0)\}. \quad (\text{II.3})$$

Si f est n fois continûment différentiable au point \mathbf{x}_0 , alors le développement en série de Taylor de f en \mathbf{x}_0 peut être utilisé comme polynôme $P_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ et on a $h(\mathbf{x}_0) > \deg(P)$. Plus l'exposant $h(\mathbf{x}_0)$ est grand, plus la distribution f est régulière en \mathbf{x}_0 et inversement plus sa valeur est petite et plus la distribution f est singulière en ce point. Si $n + 1 > h(\mathbf{x}_0) > n$ alors la distribution est n fois dérivable au point \mathbf{x}_0 et sa dérivée n -ième est singulière avec le comportement :

$$\left| \frac{d^n f(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^n} \right|_{\mathbf{x}_0} (a) \sim a^{h(\mathbf{x}_0)}, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (\text{II.4})$$

Une valeur de h grande décrit une grande régularité tandis qu'un h proche de 0 traduit une grande irrégularité, proche de la discontinuité. On dira qu'une distribution est uniformément Hölderienne si $\forall \mathbf{x}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $h(\mathbf{x}) \geq \epsilon > 0$.

L'étude des singularités en plusieurs dimensions est un peu plus délicate qu'en une dimension car l'invariance dans les échelles peut être relative à des dilatations isotropes comme anisotropes [5, 6, 7, 8, 9, 10]. On généralise alors l'exposant de Hölder anisotrope $h_E(\mathbf{x}_0)$ en dimension d par [11] :

$$h_E(\mathbf{x}_0) = \sup\{\alpha : \|f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|_2 \leq C\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_{2,E}^\alpha\}, \quad (\text{II.5})$$

où $\|\mathbf{x}\|_{2,E}$ est une (\mathbb{R}^d, E) pseudo-norme anisotrope et $P_{\mathbf{x}_0}$ est un polynôme de la forme

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{N}^d} a_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d} x_1^{\theta_1} x_2^{\theta_2} \cdots x_d^{\theta_d}.$$

On rappelle que ρ , une fonction sur \mathbb{R}^d , définit une (\mathbb{R}^d, E) pseudo-norme anisotrope si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- ρ est continue sur \mathbb{R}^d ;
- $\forall a > 0$ et $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$: $\rho(a^E \mathbf{x}) = a\rho(\mathbf{x})$;
- ρ est strictement positive sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

E est une matrice vérifiant $Tr(E) = d$ et a^E représente la matrice d'élément $\{a_{i_1, i_2, \dots, i_d} = a^{E_{i_1, i_2, \dots, i_d}} ; i_1, i_2, \dots, i_d \in [1, d]\}$.

Dilatations isotropes. Quand $E = Id(\mathbb{R}^d)$ alors l'invariance d'échelle est isotrope. Si on prend $n > h(\mathbf{x}_0)$, alors localement autour du point \mathbf{x}_0 la distribution f se comporte comme [12] :

$$|D_u^n|_{\mathbf{x}_0}(a\mathbf{u})| \sim a^{h(\mathbf{x}_0)} |D_u^n|_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u})| \quad (\text{II.6})$$

où \mathbf{u} est un vecteur unitaire quelconque et $D_u^n|_{\mathbf{x}_0}$ est la dérivée d'ordre n de f au point x_0 dans la direction \mathbf{u} . L'exposant de loi d'échelle $h(\mathbf{x}_0)$ ne dépend pas de la direction de \mathbf{u} : f présente une invariance d'échelle locale isotrope autour de \mathbf{x}_0 et la singularité correspondante a pour exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0)$.

Dilatations anisotropes. Si $E \neq Id(\mathbb{R}^d)$, l'invariance d'échelle est anisotrope et f se comporte localement autour du point \mathbf{x}_0 [8, 9, 10] comme :

$$|D_u^n|_{\mathbf{x}_0}(a^E \mathbf{u})| \sim a^{h(\mathbf{x}_0)} |D_u^n|_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u})|, \quad (\text{II.7})$$

Ceci implique que l'exposant de loi d'échelle défini par le comportement

$$|D_u^n|_{\mathbf{x}_0}(a\mathbf{u})| \sim a^{h_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)} |D_u^n|_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u})| \quad (\text{II.8})$$

va dépendre du vecteur \mathbf{u} . L'exposant de Hölder au point \mathbf{x}_0 est alors la valeur minimale de h en considérant toutes les orientations de \mathbf{u} . Ainsi f présente

une invariance d'échelle locale anisotrope autour de \mathbf{x}_0 avec une, plusieurs, voire un continuum de directions privilégiées.

Pour chaque dimension supplémentaire, un degré de liberté supplémentaire apparaît dans la définition de l'exposant de Hölder.

Singularité Oscillante. L'équation II.2 correspond en fait à toute une collection de singularités qui peuvent osciller autour de \mathbf{x}_0 . A une dimension, l'exemple typique est donné par

$$|f(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \simeq C|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^h \sin\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^\beta}\right), \beta \geq 0. \quad (\text{II.9})$$

Le cas $\beta > 0$ correspond aux singularités oscillantes ou *chirp* tandis que $\beta = 0$ constitue un cas particulier de type *cusp*. Par définition l'exposant de Hölder et le formalisme multifractal ne prennent pas en compte la nature potentiellement oscillante de la singularité. Ce type de singularité est discuté dans la section II.4 et on supposera en général une nature non oscillante des singularités.

Mesure singulière : $h(\mathbf{x}_0) < 0$. Le cas des mesures singulières n'est pas pris en compte dans la définition II.2. En effet, ces mesures sont des distributions discontinues, non bornées aux points de l'espace où $h(\mathbf{x}_0) < 0$. Par contre on peut montrer que si la singularité d'exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0)$ n'est pas oscillante alors l'intégrale de cette singularité est une singularité non oscillante d'exposant $h(\mathbf{x}_0) + 1$ en \mathbf{x}_0 . On peut donc étendre la définition II.2 pour les valeurs de h négatives : la distribution f à un exposant de Hölder négatif en \mathbf{x}_0 , $-N < h(\mathbf{x}_0) < -N + 1$ si son intégrale d'ordre N , $\mathcal{I}^N[f] = \int \int \cdots \int f(\mathbf{x})(d\mathbf{x})^N$ a un exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0) + N (> 0)$ en \mathbf{x}_0 .

II.1.2 Spectre de singularités

L'information relative à la variabilité de la régularité de la distribution f est décrite par le spectre de singularités ou le spectre des exposants de Hölder

$$D(h) = d_H(\{\mathbf{x} \mid h(\mathbf{x}) = h\}). \quad (\text{II.10})$$

qui à tout h , associe la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points \mathbf{x} qui vérifient $h(\mathbf{x}) = h$. La probabilité de trouver une valeur particulière de h à une échelle $a = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2$ est alors $p(h) = \rho(h)a^{-D(h)}$ où $\rho(h)$ est la fonction de densité de probabilité de h à la limite a tendant vers 0.

Spectre de singularités anisotrope. On peut généraliser facilement ce

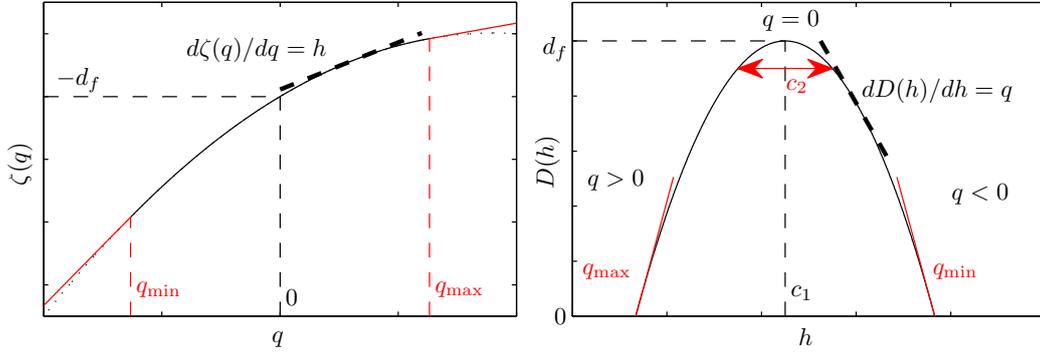


FIGURE II.1 – **Formalisme multifractal.** Spectre de singularités $D(h)$ (à gauche) obtenu par transformée de Legendre du spectre $\zeta(q)$ (à droite).

spectre aux exposants de Hölder anisotropes en posant :

$$D_E(h) = d_H(\{\mathbf{x} \mid h_E(\mathbf{x}) = h\}) . \quad (\text{II.11})$$

Dimension de Hausdorff. La dimension de Hausdorff d'un ensemble X se définit à partir d'un partitionnement idéal de X avec un ensemble dénombrable de boules B_i de diamètre $\epsilon_i \leq r$. On pose

$$\begin{aligned} H_r^s(\{X\}) &= \inf_{\epsilon_i < r} \left\{ \sum_i \epsilon_i^s \mid X \subseteq \bigcup_i B_i \right\}, \\ H^s(\{X\}) &= \lim_{r \rightarrow 0} H_r^s(\{X\}). \end{aligned}$$

La dimension de Hausdorff de X se définit par :

$$d_H(\{X\}) = \inf \{s \mid H^s(\{X\}) = 0\} = \sum \{s \mid H^s(\{X\}) = \inf\} \geq 0. \quad (\text{II.12})$$

Pour des présentations plus détaillées et théoriques de l'analyse multifractale, le lecteur est renvoyé à [13, 14].

II.1.3 Formalisme multifractal

Soit le coefficient multirésolution

$$M(\mathbf{x}_0, a) = |f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|, \quad (\text{II.13})$$

avec $a = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2$, et $Z(q, a)$ son moment d'ordre q . On peut écrire

$$Z(q, a) = \mathbb{E}\{M(\mathbf{x}, a)^q\} \sim \int \rho(h) a^{qh - D(h)} dh. \quad (\text{II.14})$$

A la limite $a \rightarrow 0^+$, on déduit par la méthode du col que ces moments se comportent en loi de puissance

$$Z(q, a) = a^{\zeta(q)} \quad \text{avec} \quad \zeta(q) = \min_h (qh - D(h)) + d. \quad (\text{II.15})$$

La fonction $Z(q, a)$ constitue la première fonction de partition souvent nommée fonction d'échelle dans la littérature relative aux aspects mathématiques et théoriques de l'analyse multifractale. Un spectre $\zeta(q)$ linéaire est caractéristique d'une distribution monofractale, à l'inverse une courbure de ce spectre indique une variation de l'exposant de Hölder et des propriétés multifractales. Il est à noter que la présence de multifractalité implique en général la présence d'une échelle intégrale L et de dissipation ϵ : la loi de puissance de l'équation [II.15](#) n'est alors valide que pour les échelles a telles que $\epsilon \ll a \ll L$ [15].

Formulation paramétrique de $D(h)$. On peut donc à partir du spectre $\zeta(q)$ remonter au spectre $D(h)$ en pratiquant une transformée de Legendre du spectre $\zeta(q)$. Cette étape est en pratique assez délicate et il est préférable de recourir à une formulation paramétrique de la transformée de Legendre :

$$h(q) = \zeta'(q) \quad \text{et} \quad d(q) = d + q\zeta'(q) - \zeta(q). \quad (\text{II.16})$$

Cette reformulation suggère une détermination directe de $d(q)$, $h(q)$ qui évite le calcul explicite de la transformée de Legendre (cf. [16, 17]). Un ensemble de calculs détaillés dans [18] permet d'établir, sous réserve que la fonction $\zeta(q)$ soit dérivable, que :

$$\begin{cases} H(q, a) = \mathbb{E}\{\tilde{M}(\mathbf{x}, a, q) \ln(M(\mathbf{x}, a)^q)\} \sim h(q) \log a, \\ D(q, a) = \mathbb{E}\{\tilde{M}(\mathbf{x}, a, q) \ln(\tilde{M}(\mathbf{x}, a, q))\} \sim d(q) \log a. \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

avec

$$\tilde{M}(\mathbf{x}, a, q) = \frac{M(\mathbf{x}, a)^q}{Z(q, a)}. \quad (\text{II.18})$$

L'élimination de q entre $h(q)$ et $d(q)$ donne la fonction $D(h)$ canonique.

Formalisme multifractal. Le formalisme multifractal fournit une interprétation du spectre de Legendre en termes de singularités Höldériennes, puisqu'il consiste à affirmer que si $\mathcal{L}(h) = \min_q(qh - \zeta(q)) + d$ est la transformée de Legendre de $\zeta(q)$ alors :

$$\mathcal{L}(h) = D(h). \quad (\text{II.19})$$

Cette relation est utilisée en pratique pour calculer numériquement le spectre multifractal sans pouvoir en général déterminer si son interprétation est valide ou non. Les conditions de validité de ce formalisme restent, en effet, théoriquement mal connues : cette relation II.19 n'est pas valable pour toute fonction ou toute réalisation de processus aléatoire en général. On peut seulement affirmer que $\mathcal{L}(h)$ est l'enveloppe supérieure concave de $D(h)$. L'égalité est obtenue dans les cas génériques, très souvent vrai, mais il existe des contre-exemples [12].

II.1.4 Analyse en cumulants du logarithme

Récemment, il a été suggéré d'exprimer les $\zeta(q)$ par un développement limité au voisinage de $q = 0$ [19, 20]. En effet, si on suppose que la fonction $\zeta(q)$ est dérivable autour de 0, on peut considérer le polynôme de Taylor de $\zeta(q)$ à $q = 0$:

$$\zeta(q) = \sum_{p \geq 1} c_p \frac{q^p}{p!} \quad (\text{II.20})$$

Les coefficients c_p de ce développement s'obtiennent alors naturellement à partir des cumulants $C_p(a)$ du logarithme des coefficients multirésolution $M(\mathbf{x}, a)$ [21] :

$$C_p(a) \sim c_p \log a. \quad (\text{II.21})$$

En utilisant la formule qui relie les moments et les cumulants d'une variable aléatoire, on peut écrire pour les trois premiers cumulants :

$$\begin{aligned} C_1(a) &= \mathbb{E}\{\ln M(\mathbf{x}, a)\}; \\ C_2(a) &= \mathbb{E}\{\ln M(\mathbf{x}, a)^2\} - (\mathbb{E}\{\ln M(\mathbf{x}, a)\})^2; \\ C_3(a) &= \mathbb{E}\{\ln M(\mathbf{x}, a)^3\} - 3\mathbb{E}\{\ln M(\mathbf{x}, a)^2\}\mathbb{E}\{\ln M(\mathbf{x}, a)\} + 2\mathbb{E}\{\ln M(\mathbf{x}, a)\}^3. \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

La concavité de $\zeta(q)$ implique que $c_2 \leq 0$ et on peut montrer que [18] :

$$D(h) = q + \frac{c_2}{2!} \left(\frac{h - c_1}{c_2} \right)^2 + \frac{c_3}{3!} \left(\frac{h - c_1}{c_2} \right)^3 + \dots \quad (\text{II.23})$$

Ce développement permet de lire $D(h)$ comme une approximation parabolique, centrée autour de c_1 et de largeur c_2 , complétée par des corrections successives, pour son asymétrie, c_3 , son aplatissement c_4 ... L'utilisation de ce développement est motivée par le fait que ces log-cumulants, c_p soulignent la différence entre deux grandes classes de processus invariants d'échelle : celle pour laquelle $c_2 = 0$, la distribution est alors monofractale avec un seul exposant de rugosité, versus celle pour laquelle $c_2 < 0$, la distribution est alors multifractale, l'exposant de rugosité prend des valeurs multiples et le champ spatial n'a plus une rugosité homogène.

II.1.5 Corrélation du logarithme des coefficients multirésolution

Toutes les quantités précédentes sont des statistiques à un point et il a été suggéré de regarder la fonction de corrélation à deux points du logarithme des coefficients multirésolution i.e., $\ln M(\mathbf{x}, a)$ [22, 23]

$$\mathcal{C}(a, \Delta x) = \mathbb{E}\{(\ln M(\mathbf{x}, a) - \mathbb{E}\{\ln M(\mathbf{x}, a)\})(\ln M(\mathbf{y}, a) - \mathbb{E}\{\ln M(\mathbf{y}, a)\})\},$$

où $\Delta x = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Le comportement de cette corrélation en fonction de Δx à l'échelle a est très instructif sur le processus sous-jacent aux propriétés multifractales. Par exemple, si le processus possède une dépendance à longue portée, on aura

$$\mathcal{C}(a, \Delta x) \sim \ln \Delta x \quad \Delta x > a. \quad (\text{II.24})$$

On peut montrer que pour les cascades multiplicatives on a [22, 23, 24] :

$$\mathcal{C}(a, \Delta x) \sim c_2 \ln \Delta x, \quad (\text{II.25})$$

où le coefficient de proportionnalité c_2 est le même que celui de $C_2(a)$ (défini dans l'équation. (II.21)), c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}(a, \Delta x = 0) \equiv C_2(a) \sim c_2 \ln a, \quad (\text{II.26})$$

On notera que la présence de multifractalité n'implique pas nécessairement la présence de corrélation longue portée ou que le processus sous-jacent soit de type cascade multiplicative [25].

II.1.6 Propagateur

Pour l'analyse de l'invariance d'échelle, il a été proposé un modèle très général qui relie par une équation fonctionnelle les fonctions de densité de probabilité des coefficients multirésolution à deux échelles différentes. Ce modèle de *cascade abstraite*, originellement proposé pour décrire l'évolution de la statistique des incréments de vitesse turbulente [26, 27], se généralise facilement aux coefficients multirésolution [28].

On définit $P_a(M)$ la fonction de probabilité des coefficients multirésolution $M(\mathbf{x}, a)$ à l'échelle a . On suppose que $\forall a, a'$ tels que $a' > a > 0$, P_a peut s'exprimer en fonction de $P_{a'}$ de la façon suivante [26] :

$$P_a(M) = \int G_{a,a'}(\ln \alpha) P_{a'}\left(\frac{M}{\alpha}\right) \frac{d \ln \alpha}{\alpha} . \quad (\text{II.27})$$

Le noyau (ou propagateur dans les échelles) $G_{a,a'}$ dépend uniquement de a et a' . Ainsi, $P_a(M)$ se décrit comme une somme pondérée de versions dilatées de la fonction de densité de probabilité $P_{a'}$. La plupart des modèles multiplicatifs de cascades conduisent à une telle relation entre la statistique des coefficients multirésolution aux deux échelles a et a' [27] : la forme de G est reliée à la nature même d'une étape de la cascade et la façon dont $G_{a,a'}$ dépend de a et a' permet de déterminer le caractère auto-similaire et invariant d'échelle de la cascade. Suivant les travaux de Castaing et Dubrulle [29], la notion de cascade intervient tout à fait naturellement en remarquant que, quelque soit la séquence d'échelle $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}, a_{i+1} < a_i$, on a :

$$G_{a_n, a_1} = G_{a_n, a_{n-1}} * G_{a_{n-1}, a_{n-2}} * \dots * G_{a_2, a_1} , \quad (\text{II.28})$$

où $*$ représente le produit de convolution. La cascade est qualifiée d'*auto-similaire* s'il existe une fonction G et une suite décroissante $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que [29]

$$G_{a_{n+1}, a_n} = G. \quad (\text{II.29})$$

La cascade est appelé *continûment auto-similaire* s'il existe une fonction $s(a, a') = S(a) - S(a')$ telle que [29]

$$G_{a,a'}(x) = G(x, s(a, a')). \quad (\text{II.30})$$

On appelle cascade *invariante d'échelle* toute cascade auto-similaire telle que [29]

$$S(a) = \ln(a). \quad (\text{II.31})$$

Cette notion de cascade sur les coefficients multirésolution est appelée *cascade*

abstraite car les définitions ne font pas référence à une construction bien définie. Si on note $\phi_a(p) = \mathbb{E}\{e^{ip \ln M(a, \mathbf{x})}\}$ la fonction caractéristique associée au logarithme des coefficients multirésolutions, alors on a [28] :

$$\phi_a(p) = \hat{G}_{a,a'}(p)\phi_{a'}(p), \quad (\text{II.32})$$

où $\hat{G}_{a,a'}$ représente la transformée de Fourier de $G_{a,a'}$.

Ainsi, l'estimation de \hat{G} se résume à une simple déconvolution : si la fonction $\phi_{a'}(p)$ est différente de 0, on peut espérer estimer $\hat{G}_{a,a'}$ comme le rapport des fonctions caractéristiques évaluées à deux échelles différentes [28] :

$$\hat{G}_{a,a'}(p) = \frac{\phi_a(p)}{\phi_{a'}(p)}. \quad (\text{II.33})$$

D'après les propriétés de convolution de G (Eq. (II.28)), l'auto-similarité de la cascade (Eq. (II.30)) et l'additivité de la fonction S , on en déduit que la cascade est continûment auto-similaire si et seulement si

$$\hat{G}_{a,a'}(p) = \left[\hat{G}(p) \right]^{S(a,a')}. \quad (\text{II.34})$$

De cette équation, il ressort que \hat{G} est la fonction caractéristique d'une distribution de probabilité infiniment divisible. Une telle cascade est appelée *cascade log-infiniment divisible* [29, 30].

II.1.7 Formalisme grand canonique

Dans de nombreux problèmes physiques, la caractérisation de l'état du système et de son évolution nécessite la connaissance de plusieurs quantités ou variables d'état. Il est intéressant de pouvoir estimer le degré de corrélation qui existe entre ces diverses variables. En d'autres termes, on va donc s'intéresser aux statistiques jointes de deux ou de plusieurs de ces quantités qui sont individuellement bien caractérisées par le formalisme multifractal "canonique" des mesures et des signaux. Meneveau et *al.* [31] ont été les premiers à proposer une description multifractale *grand canonique* jointe.

Soient f et g deux distributions multifractales coexistant dans une même partie de l'espace. On définit comme en II.13 les coefficients multirésolution associés $T_f(\mathbf{x}, a)$ et $T_g(\mathbf{x}, a)$. On s'intéresse désormais à la distribution de probabilité jointe des exposants de Hölder h_f et h_g c'est-à-dire à $D(h_f, h_g)$ qui est, d'un point de vue géométrique, la dimension fractale de l'ensemble des points b tels que $h_f(b) = h_f$ et $h_g(b) = h_g$. La généralisation du formalisme multifractal repose sur la définition de fonctions de partition *grand-*

canoniques continues :

$$Z(p, q, a) = \mathbb{E}\{M_f(\mathbf{x}, a)^p M_g(\mathbf{x}, a)^q\} \sim a^{\zeta(p, q)} . \quad (\text{II.35})$$

Le spectre des exposants $\zeta(p, q)$ joue donc le rôle d'un potentiel grand-canonique caractérisant la statistique jointe des fluctuations des exposants h_f et h_g . Pour les grandes valeurs de p et de q , l'exposant $\zeta(p, q)$ caractérise en particulier les régions de l'espace où f et g sont toutes les deux très singulières. Si l'on réécrit l'équation (II.35) comme une double intégrale sur les valeurs de h_f et h_g , on obtient en appliquant la méthode du col dans la limite $a \rightarrow 0^+$:

$$Z(p, q, a) \sim \int_{h_f} \int_{h_g} a^{ph_f + qh_g} dh_f dh_g \sim a^{ph_f + qh_g - D(h_f, h_g) + 1} . \quad (\text{II.36})$$

$D(h_f, h_g)$ et $\zeta(p, q)$ sont donc reliés par une double transformation de Legendre :

$$\zeta(p, q) = \min_{h_f, h_g} (ph_f + qh_g - D(h_f, h_g) + 1) , \quad (\text{II.37})$$

Par analogie avec la définition de la fonction de partition *canonique* (II.17)), on peut envisager de calculer les exposants $h_f(p, q)$ et $h_g(p, q)$ ainsi que les dimensions $D(p, q)$, à l'aide de fonctions de partition mettant en jeu l'équivalent d'un poids de Boltzmann :

$$\tilde{M}(\mathbf{x}, a, p, q) = \frac{M_f(\mathbf{x}, a)^p M_g(\mathbf{x}, a)^q}{Z(p, q, a)} . \quad (\text{II.38})$$

et on a :

$$\begin{aligned} h_f(p, q, a) &= \mathbb{E}\{\tilde{M}(\mathbf{x}, a, p, q) \log(M_f(\mathbf{x}, a))\} \sim h_f(p, q) \log a , \\ h_g(p, q, a) &= \mathbb{E}\{\tilde{M}(\mathbf{x}, a, p, q) \log(M_g(\mathbf{x}, a))\} \sim h_g(p, q) \log a , \\ D(p, q, a) &= \mathbb{E}\{\tilde{M}(\mathbf{x}, a, p, q) \log(\tilde{M}(\mathbf{x}, a, p, q))\} \sim D(p, q) \log a . \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

II.2 transformée en ondelettes

II.2.1 transformée en ondelettes continue

La transformée en ondelettes a été introduite il y a maintenant plus de trente ans par le géophysicien Morlet [32, 33]. Intéressé par l'étude des signaux sismiques intervenant dans la recherche pétrolière, il s'aperçoit que les décompositions spectrales classiques (transformée de Fourier et transformée de Fourier à fenêtre glissante) sont inadaptées à l'étude de signaux combinant des échelles très différentes. Pour palier à ces lacunes, il propose une transformation qui permet une représentation du signal simultanément dans l'espace et les échelles. L'idée maîtresse consiste à décomposer le signal f considéré sur des fonctions élémentaires, $\psi_{\mathbf{b},a}$, construites à partir d'une fonction mère ψ , par dilatations et translations de celle-ci [34] :

$$T_\psi[f](\mathbf{x}_0, a) = C_\psi^{-1/2} a^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\psi} \left(R_\theta \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{a} \right) \right) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} . \quad (\text{II.40})$$

où R_θ est une matrice de rotation de \mathbb{R}^d . Dès 1984, Grossman et Morlet formalisent dans un cadre fonctionnel rigoureux les concepts de cette nouvelle représentation espace-échelle [32, 33]. Ils montrent que cette transformation est inversible si la fonction ψ vérifie [32, 35] :

$$C_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2}{|\boldsymbol{\xi}|^d} d\boldsymbol{\xi} < \infty . \quad (\text{II.41})$$

où $\hat{\psi}$ désigne la transformée de Fourier de ψ et $|\boldsymbol{\xi}|^2 = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}$. Cette condition implique une localisation suffisante de l'ondelette dans le domaine fréquentiel mais aussi que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 . \quad (\text{II.42})$$

La fonction analysante ψ est donc de moyenne nulle et doit présenter quelques oscillations et ressembler à une petite onde. C'est ainsi que naît la théorie des ondelettes. De par la richesse des concepts qu'elle met en jeu et l'efficacité de sa mise en oeuvre algorithmique, l'analyse en ondelettes a été exploitée avec succès dans de nombreux domaines [36, 35].

Un des grands avantages de cette transformée repose sur la liberté de choix de la forme de l'ondelette analysante. Un très grand nombre de fonctions vérifie la condition II.41 ; le choix d'une ondelette analysante particulière s'effectue en fonction du problème traité. Pour l'analyse des singularités nous nous limiterons à l'utilisation d'ondelettes isotropes et la dépendance en θ

de la transformée devient triviale et sera omise dans la suite.

Considérons d ondelettes obtenues par dérivation partielle d'une fonction lisse isotrope $\phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$:

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \text{ pour } i = 1, \dots, d. \quad (\text{II.43})$$

La transformée en ondelettes de notre distribution avec l'ondelette a d composantes $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_d)$ s'écrit

$$\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{k}, j) = (T_{\psi_1}[f](\mathbf{k}, j), T_{\psi_2}[f](\mathbf{k}, j), \dots, T_{\psi_d}[f](\mathbf{k}, j)), \quad (\text{II.44})$$

et par simple intégration par partie on obtient :

$$\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{x}, a) = a^{-2} \nabla \left\{ \int d^2 \mathbf{y} \phi(a^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{x})) f(\mathbf{y}) \right\}, \quad (\text{II.45})$$

$$= \nabla \{ T_\phi[f](\mathbf{x}, a) \}, \quad (\text{II.46})$$

$$= \nabla \{ \phi_{\mathbf{b}, a} * f \}. \quad (\text{II.47})$$

Ainsi, si $\phi(\mathbf{x})$ est une fonction lissante comme la Gaussienne alors l'équation II.40 revient à définir la transformée en ondelettes comme le champ de gradient de la distribution scalaire $f(\mathbf{x})$ lissée par différentes versions dilatées $\phi(a^{-1}\mathbf{x})$ du filtre ϕ . Notons encore que le gradient $\nabla \{ \phi_{\mathbf{x}, a} * f \}$ donne la direction de plus grande variation de f à l'échelle de lissage a et que la direction orthogonale est souvent appelée direction de régularité maximale. On passe alors en coordonnées sphériques et on définit le module de la transformée en ondelettes :

$$|\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{x}, a)| = \|T_\psi[f](\mathbf{x}, a)\|_2 \quad (\text{II.48})$$

En dimension 2, on obtient $|\mathbf{T}_\psi|$ et \mathcal{A}_ψ respectivement le module et l'argument du vecteur transformée en ondelettes :

$$\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{x}, a) = (|\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{x}, a)|, \mathcal{A}_\psi[f](\mathbf{x}, a)), \quad (\text{II.49})$$

avec

$$|\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{x}, a)| = \left[(T_{\psi_1}[f](\mathbf{x}, a))^2 + (T_{\psi_2}[f](\mathbf{x}, a))^2 \right]^{1/2} \quad (\text{II.50})$$

et

$$\mathcal{A}_\psi[f](\mathbf{x}, a) = \text{Arg}(T_{\psi_1}[f](\mathbf{x}, a) + iT_{\psi_2}[f](\mathbf{x}, a)). \quad (\text{II.51})$$

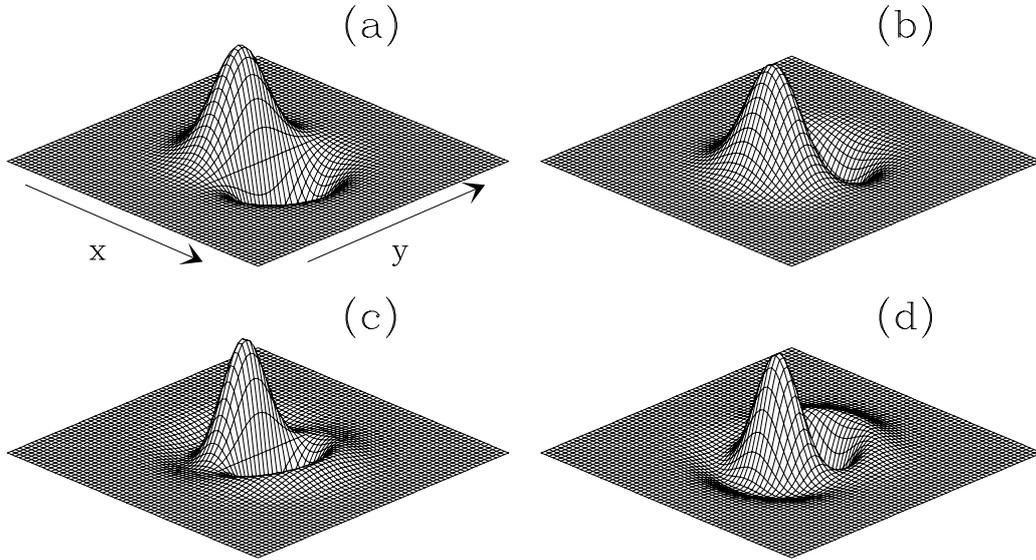


FIGURE II.2 – **transformée en ondelettes 2D : ondelettes analysantes.** Ondelettes du premier ordre obtenues à partir de la fonction lissante Gaussienne $G(\mathbf{x})$ (Eq. (II.52)) : (a) ψ_1 ; (b) ψ_2 . Ondelettes d'ordre 3 obtenues à partir de la fonction lissante “chapeau mexicain isotrope” (Eq. (II.53)) : (c) ψ_1 ; (d) ψ_2 . Figure extraite de [7].

De manière pratique, les échelles calculées sont généralement prises égales à $a = 2^{\frac{j}{n_v}}$ où n_v est le nombre de voies par octave choisi par l'utilisateur. L'espace étant lui aussi discrétisé la variable $\mathbf{x} = \mathbf{k}$ ne prend que des valeurs entières. Nous noterons donc les coefficients en ondelettes par $T_\psi[f](\mathbf{k}, j)$ où $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ et $j \in \mathbb{N}$.

Pour l'analyse des singularités, les ondelettes généralement utilisées font partie de la famille des dérivés successives de la Gaussienne. Par exemple en dimension 2, les ondelettes ψ_i , $i = 1, 2$ sont définies à partir de la fonction Gaussienne :

$$\phi(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}\|_2/2}; \quad (\text{II.52})$$

où de la fonction du *chapeau mexicain isotrope* :

$$\phi(\mathbf{x}) = (2 - \|\mathbf{x}\|_2)e^{-\|\mathbf{x}\|_2/2}. \quad (\text{II.53})$$

Ces ondelettes sont représentées figure II.2.

II.2.2 transformée en ondelettes discrète

La transformée en ondelettes discrète (TOD) à une dimension consiste essentiellement à une restriction de la transformée en ondelettes continue à une grille dyadique :

$$d_\psi[f](\mathbf{k}, j) = T_\psi[f](\mathbf{k}2^j, 2^j) \quad (\text{II.54})$$

Dans ce cas le nombre de voies par octave est $n_v = 1$. La transformée discrète présente plusieurs avantages par rapport à la transformée continue. En effet, suivant le choix de l'ondelette analysante, on peut définir une analyse multirésolution, c'est-à-dire qu'on peut obtenir une base orthogonale de l'espace en utilisant un nombre restreint de dilatées et translatées de l'ondelette. La transformée discrète est alors non-redondante et contient toute l'information du signal. De plus, elle est associée à des algorithmes rapides qui ont un coût de calcul significativement plus faible que ceux associés à la transformée en ondelettes continue [37] et se généralise directement à plusieurs dimensions. En quelques mots, il est possible de trouver un couple de fonctions ϕ , appelée fonction d'échelle, et ψ , l'ondelette, tel que toutes fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ puissent s'écrire :

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{j_0, \mathbf{k}} 2^{j_0/2} \phi(2^{j_0/2} \mathbf{x} - \mathbf{k}) + \sum_{j \geq j_0} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} d_{j, \mathbf{k}} 2^{j/2} \psi(2^{j/2} \mathbf{x} - \mathbf{k}) \quad \forall j_0 \in \mathbb{Z}. \quad (\text{II.55})$$

On peut donc écrire toute distribution comme une approximation de la distribution à l'échelle j_0 (le premier terme) à laquelle on rajoute des détails de plus en plus fins. L'ensemble des fonctions $\psi_{j, \mathbf{k}} = \{\psi(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k})\}$, $j \in \mathbb{N}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ forme une base de $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui peut être orthogonale ou non. Les ondelettes que nous utiliserons font partie de la classe des ondelettes orthogonales de Daubechies notée DN , où $N \in \mathbb{N}$ correspond au nombre de moments nuls de l'ondelette [35].

Une propriété importante de la TOD c'est que l'on peut définir une transformée en ondelettes multidimensionnelle en utilisant une base d'ondelettes séparables définie par produit séparable des fonctions ϕ et ψ de la base à une dimension. En deux dimensions par exemple, la transformée en ondelettes discrète a 3 composantes

$$d_\psi[f](\mathbf{k}, j) = (d_{\psi_1}[f](\mathbf{k}, j), d_{\psi_2}[f](\mathbf{k}, j), d_{\psi_3}[f](j, \mathbf{k})) \quad (\text{II.56})$$

avec les ondelettes

$$\begin{aligned}\psi_1(\mathbf{x}) &= \psi(x_1)\phi(x_2), \\ \psi_2(\mathbf{x}) &= \phi(x_1)\psi(x_2), \\ \psi_3(\mathbf{x}) &= \psi(x_1)\psi(x_2)\end{aligned}\tag{II.57}$$

Ces ondelettes correspondent à un découpage en fréquence de type (H,L), (L,H) et (H,H) ou H correspond à un filtrage passe-haut et L à un filtrage passe-bas. Ceci est facilement généralisable à plusieurs dimensions : on a alors $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ et on obtient $2^d - 1$ ondelettes de bases. Pour une présentation plus détaillée de la transformée en ondelettes le lecteur est renvoyé à [38].

II.2.3 Analyse des singularités

Pour l'analyse multifractale le paramètre important dans le choix de l'ondelette est son nombre de moment nul n_ψ qui est défini par :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\mathbf{x})\mathbf{x}^q d\mathbf{x} = 0, \quad 0 \leq q < n_\psi, \quad (q \in \mathbb{N}). \tag{II.58}$$

Si on suppose que la distribution f a un exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0)$ au point \mathbf{x}_0 et si a est suffisamment petit, ψ suffisamment localisé, on peut développer f autour de \mathbf{x}_0 (eq. II.2) et écrire :

$$\frac{T_\psi(\mathbf{x}_0, a)}{a^{\frac{d}{2}}} = b_0 m_0 + b_1 a m_1 + \dots + b_k a^k m_k + c \int \psi(\mathbf{x}) |a\mathbf{x}|^{h(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \tag{II.59}$$

où m_0, \dots, m_k représentent les moments successifs de l'ondelette ψ et les b_k , $k \geq 1$ les coefficients du polynôme $P_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$ de l'équation II.2. Si l'on suppose que l'ondelette vérifie $n_\psi > k+1$ c'est-à-dire $m_i = 0, \forall i \in [0, k]$, alors [39, 40] :

$$\frac{|T_\psi[f](\mathbf{x}_0, a)|}{a^{\frac{d}{2}}} \simeq a^{h(\mathbf{x}_0)}. \tag{II.60}$$

Ainsi le comportement singulier $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{h(\mathbf{x}_0)}$ de f se traduit par un comportement en loi de puissance dans les échelles ($a \rightarrow 0^+$) de la T.O. de f au point \mathbf{x}_0 avec un exposant $h(\mathbf{x}_0)$. Par contre, si f est très régulière, son développement autour de \mathbf{x}_0 est donné par sa série de Taylor et sa T.O. au

point \mathbf{x}_0 va s'écrire de façon générique sous la forme [39, 40] :

$$\frac{|T_\psi[f](\mathbf{x}_0, a)|}{a^{\frac{d}{2}}} = \frac{f^{(n_\psi)}(\mathbf{x}_0)}{n_\psi!} m_{n_\psi} a^{n_\psi} . \quad (\text{II.61})$$

Un comportement régulier sera donc caractérisé par une décroissance en loi de puissance dans les échelles des coefficients en ondelettes avec un exposant égal au nombre de moments nuls de l'ondelette analysante.

Ces idées peuvent en fait s'énoncer de façon précise comme l'ont démontré rigoureusement Jaffard [39] ainsi qu'Holschneider et Tchamitchian [40].

II.2.4 Relation avec la transformée de Fourier

La définition de la transformée en ondelettes peut se voir comme le produit de convolution de la distribution f avec une ondelette $\psi_a(\mathbf{x}) = \psi(\frac{\mathbf{x}}{a})$. Ainsi la transformée de Fourier de la transformée en ondelettes est reliée à la transformée de Fourier de la distribution. A une dimension, si f est un processus stationnaire du second ordre alors $\mathbb{E}|T_\psi[f](x, a)|^2$ est une mesure du contenu de f autour de la fréquence ξ_0/a , appelée spectre en ondelette et définie par [41] :

$$\mathbb{E}|T_\psi[f](\mathbf{x}, a)|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_f(\boldsymbol{\xi}) |\tilde{\psi}(a\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{II.62})$$

où $\tilde{\psi}(\boldsymbol{\xi})$ est la transformée de Fourier de ψ . $\boldsymbol{\xi}_0$ est une constante dépendant de l'ondelette

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{\xi} |\tilde{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2}{\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2} \quad (\text{II.63})$$

appelée fréquence centrale de l'ondelette. Les processus à longue dépendance, dont le spectre obéit à une loi de puissance

$$\mathbb{E}|\tilde{f}(\boldsymbol{\xi})|^2 \sim |\boldsymbol{\xi}|^{-\beta}, \quad (\text{II.64})$$

présentent donc un comportement en loi de puissance des coefficients en ondelettes :

$$\mathbb{E}|T_\psi[f](\mathbf{x}, a)|^2 \sim a^{\zeta(q=2)}, \quad a \rightarrow +\infty, \quad (\text{II.65})$$

avec, si $\max_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}) < n_\psi$, $\zeta(q=2) = \beta - 1$ en dimension un [42] et $\zeta(q=2) = \beta - 4$ en dimension deux [7].

II.2.5 Intégration et intégration fractionnaire

Si on a affaire à une distribution localement non bornée, nous avons vu qu'il fallait intégrer cette distribution pour se ramener à une distribution bornée. Cette intégration peut être entière ou fractionnaire. On définit l'intégrée fractionnaire d'ordre $s > 0$ d'une distribution f à partir de sa transformée de Fourier :

$$(\widehat{\mathcal{I}^s f})(\boldsymbol{\xi}) = (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{-s/2} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}). \quad (\text{II.66})$$

Si f est telle que $h_{\min} \leq 0$, alors $\mathcal{I}^s f$ est une fonction uniformément Hölderienne si :

$$s > -h_{\min}; \quad (\text{II.67})$$

Si f est une distribution de \mathbb{R}^2 une intégration fractionnaire de $s > 2$ suffit toujours pour que $\mathcal{I}^s f$ soit une fonction uniformément Hölderienne.

Dans la pratique, le calcul de cette intégration peut se révéler difficile. Au lieu d'effectuer réellement une intégration fractionnaire sur une distribution puis de lui appliquer une transformée en ondelettes, on effectue de préférence la transformée en ondelettes de la distribution et on remplace les coefficients $T_{\psi_m}[f](\mathbf{k}, j)$ par

$$T_{\psi_m}^s[f](\mathbf{k}, j) = 2^{sj} T_{\psi_m}[f](\mathbf{k}, j) \quad (\text{II.68})$$

On obtient ainsi les coefficients d'ondelettes d'une pseudo intégrée fractionnaire $(\tilde{\mathcal{I}}^s f)(\mathbf{x})$ de f qui a exactement les mêmes propriétés de régularité globale et locale que $(\mathcal{I}^s f)(\mathbf{x})$: si $s > h_{\min}$, $(\tilde{\mathcal{I}}^s f)(\mathbf{x})$ et $(\mathcal{I}^s f)(\mathbf{x})$ ont la même fonction d'échelle et le même exposant de Hölder en tout point [12].

II.3 Formalisme multifractal : estimation

Les différentes fonctions de partition de la section II.1 sont définies à partir de l'espérance mathématique. En supposant la stationnarité spatiale des coefficients multirésolution $M(\mathbf{k}, j)$ à l'échelle $a = 2^{\frac{j}{n_v}}$, on estime les équations

(II.14), (II.17) par des sommes finies :

$$\begin{aligned}
\hat{Z}(q, j) &= \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} M(\mathbf{k}, j)^q; \\
\hat{H}(q, j) &= \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \tilde{M}(\mathbf{k}, j, q) \ln(|M(\mathbf{k}, j)|^q); \\
\hat{D}(q, j) &= \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \tilde{M}(\mathbf{k}, j, q) \ln(\tilde{M}(\mathbf{k}, j, q)).
\end{aligned} \tag{II.69}$$

avec $\tilde{M}(\mathbf{k}, j, q) = M(\mathbf{k}, j)^q / \hat{Z}(q, j)$. Les cumulants du logarithme des coefficients multirésolution, équation (II.22), sont estimés à partir de leurs moments $\hat{M}_q^{\log}(j) = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} (\log M(\mathbf{k}, j))^q$.

Comme suggéré par les équations (II.15), (II.17) et (II.21), l'estimation des pentes $\zeta(q)$, $h(q)$, $d(q)$ et c_p sont obtenues par régression linéaire dans la gamme $j \in [j_1, j_2]$:

$$\hat{\zeta}(q) = \frac{1}{N_v} \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 \hat{Z}(q, j), \tag{II.70}$$

$$\hat{h}_q = \frac{1}{N_v} \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{H}(q, j), \tag{II.71}$$

$$\hat{d}_q = d_f + \frac{1}{N_v} \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{D}(q, j), \tag{II.72}$$

$$\hat{c}_p = \frac{(\log_2 e)}{N_v} \cdot \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}_p(j), \tag{II.73}$$

Les poids w_j satisfont les contraintes habituelles $\sum_{j_1}^{j_2} j w_j \equiv 1$ and $\sum_{j_1}^{j_2} w_j \equiv 0$ et peuvent être exprimés comme $w_j = b_j \frac{V_0 j - V_1}{V_0 V_2 - V_1^2}$ avec $V_i = \sum_{j_1}^{j_2} j^i b_j$, $i = 0, 1, 2$ [43]. Les nombres positifs b_j peuvent être choisis librement et reflètent la confiance attribuée à chacune des estimées $\log_2 \hat{Z}(q, j)$, $\hat{H}(q, j)$, $\hat{D}(q, j)$ et $\hat{C}_p(j)$.

II.3.1 coefficients en ondelettes

On définit naturellement le formalisme multifractal à partir des coefficients multirésolution données par la transformée en ondelettes continue :

$$M_f(\mathbf{k}, j) = \frac{|T_\psi[f](\mathbf{k}, j)|}{2^{\frac{j d}{2n_\psi}}}, \quad (\text{II.74})$$

et pour la transformée en ondelettes discrète :

$$M_f(\mathbf{k}, j) = \max_{i=1,2,\dots,2^d-1} \frac{|d_{\psi_i}[f](\mathbf{k}, j)|}{2^{\frac{j d}{2}}}, \quad (\text{II.75})$$

En effet, nous avons vu précédemment (Eq. II.60) que ces coefficients se comportent en loi de puissance :

$$M_f(\mathbf{k}, j) \sim a^{h(\mathbf{x}_0)}, \quad (\text{II.76})$$

où \mathbf{k} est l'entier le plus proche de \mathbf{x}_0 .

Validité du formalisme.

- Le nombre de points pris en compte dans les équations II.69 ne dépend que de la méthode (continue ou dyadique) et non du signal. Il est impossible de déterminer la dimension fractale D_f du support de l'ensemble des singularités. On suppose en général que les singularités remplissent l'espace et donc $\max_h(D(h)) = d$.
- La densité de probabilité des coefficients en ondelettes est finie en zéro. Ceci implique que les équations II.69 divergent pour les valeurs de $q < 0$ négatives et ne sont donc définies que pour $q \geq 0$. Ces valeurs positives donnent seulement accès à la partie croissante du spectre $\mathcal{L}(h)$, la partie correspondante aux singularités les plus fortes.
- En l'absence de singularités oscillantes et si $n_\psi > h_{\max}$, on peut seulement montrer que $\mathcal{L}(h)$, le spectre obtenu par transformée de Legendre de $\hat{\zeta}(q)$, est une fonction concave telle que $\mathcal{L}(h) \geq D(h)$. Si la distribution a un spectre $D(h)$ dégénéré restreint à un point (cas monofractal) alors l'égalité est atteinte.

Remarques pratiques.

- L'analyse multifractale est très sensible aux effets de bord car ceux-ci correspondent en général à des singularités fortes. Il faut absolument enlever tout effet de bord dans l'estimation des fonctions de partition.
- Il faut vérifier la non dépendance des spectres multifractals en fonction du nombre de moments nuls de l'ondelette analysante. En effet, toute

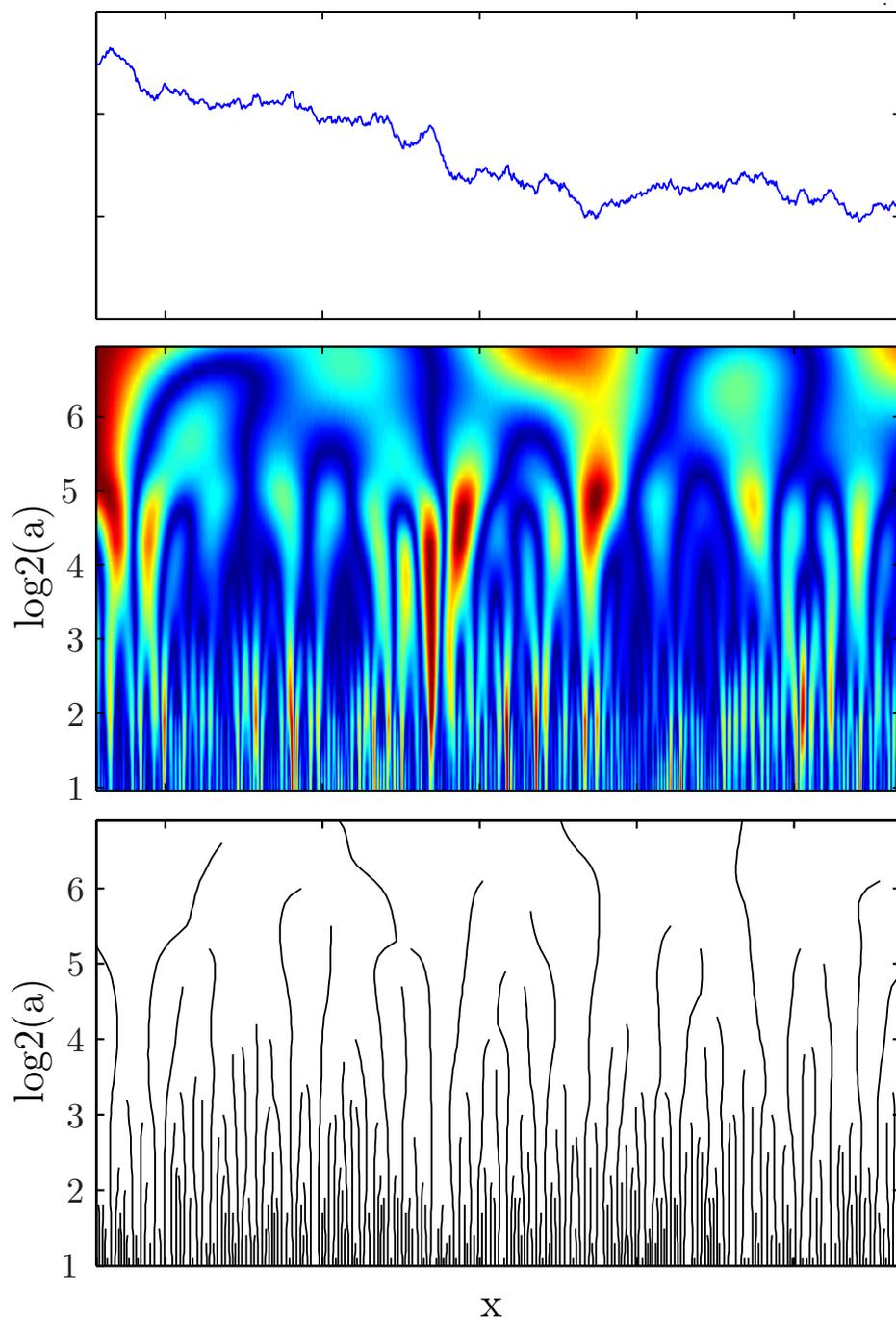


FIGURE II.3 – **WTMM 1D.** a) Processus Brownien $B_{H=1/2}(\mathbf{x})$. b) transformée en ondelettes continue obtenue avec la dérivée seconde de la Gaussienne. c) Squelette de la transformée en ondelettes continue. défini par l'ensemble des lignes de maxima du module de la transformée en ondelettes continue.

- évolution de la partie décroissante du spectre dénote la présence de région de l'espace avec une régularité supérieure à celle de l'ondelette.
- La méthode des fonctions de structure proposée par Frisch et Parisi [2] revient à une analyse en ondelette continue avec *l'ondelette du pauvre* $\psi(x) = \delta(x + 1) - \delta(x)$ [44, 45, 46] où δ représente la masse de Dirac.

II.3.2 Les maxima du module de la TOC

Pour rendre possible la mesure du spectre de singularités dans sa totalité il a été proposé [47] d'utiliser comme coefficients multirésolution les maxima des coefficients multirésolution définis équation II.74. En effet, on peut montrer [48, 49] que pour une singularité non oscillante isolée d'exposant $h(\mathbf{x}_0)$, les maxima de ces coefficients se situent sur des courbes connexes pointant vers la singularité en \mathbf{x}_0 . Le long de ces lignes, le module des coefficients multirésolution se comporte en loi de puissance avec un exposant $h(\mathbf{x}_0)$. Ce résultat affirme que les maxima du module de la transformée en ondelettes, permettent non seulement de mettre en évidence une singularité isolée, mais aussi d'estimer l'exposant de Hölder qui la caractérise en examinant le comportement dans les échelles de $M(\mathbf{k}, j)$ le long des lignes de maxima. On définit alors le *squelette* de la transformée en ondelettes comme l'ensemble de ces lignes de maxima et on estime les fonctions de partition II.69 par :

$$\begin{aligned}\hat{Z}(q, j) &= \frac{1}{N_j} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{S}(j)} M(\mathbf{k}, j)^q; \\ \hat{H}(q, j) &= \frac{1}{N_j} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{S}(j)} \hat{M}(\mathbf{k}, j, q) \ln(M(\mathbf{k}, j)^q); \\ \hat{D}(q, j) &= \frac{1}{N_j} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{S}(j)} \hat{M}(\mathbf{k}, j, q) \ln(\hat{M}(\mathbf{k}, j, q)).\end{aligned}\tag{II.77}$$

où les sommes sont restreintes à $\mathcal{S}(j)$, l'ensemble des maxima présents à l'échelle j et appartenant au *squelette* de la transformée en ondelettes. De la même façon, on obtient les différents cumulants du logarithme en utilisant des sommes restreintes au *squelette* de la transformée en ondelettes. Ce *squelette* de la transformée en ondelettes réalise un partitionnement espace-échelle qui contient à priori toute l'information concernant les fluctuations de la régularité locale de la fonction f . A l'échelle j , le nombre de coefficient N_j pris en compte est déterminé par le signal. Ce nombre se comporte en loi de puissance $N_j \sim 2^{-d_f j}$ dont la mesure donne accès à la dimension fractale de l'ensemble des singularités $d_f = \max_h(D(h))$. On définit alors la fonction

de partition $\hat{Z}(q, a)$ en $q = 0$ par

$$\hat{Z}(0, j) = N_j. \quad (\text{II.78})$$

Ainsi cette méthode donne accès non seulement à la dimension fractale de l'ensemble des singularités mais aussi à la totalité des spectres multifractals. En effet, les maxima étant non nuls par définition, les fonctions de partitions équations II.77 sont valides $\forall q \in \mathbb{R}$.

La difficulté de cette méthode réside donc dans l'obtention des maxima du module et de l'extraction du *squelette*. Plus le nombre de dimension est grand et plus la complexité de l'algorithme augmente. Je présente rapidement la méthodologie en dimension une et deux. Cette méthode peut se généraliser en dimensions supérieures mais elle devient très compliquée à mettre en oeuvre. Kestener et al [50, 51] ont développé cette méthode à 3 dimensions pour des champs scalaires et vectoriels.

Squelette 1D. L'obtention du *squelette* nécessite plusieurs étapes :

- Pour chaque échelle j , on recherche les maxima de $M(\mathbf{k}, j)$.
- Ensuite, une opération de liaison de ces maxima à travers les échelles doit être entreprise. Les seules lignes que l'on garde sont celles qui atteignent la plus petite échelle. L'ensemble de ces lignes forme le squelette de la transformée en ondelettes continue 1D.
- Pour chaque ligne du squelette, on remplace le coefficient multiresolution $M(\mathbf{k}, j)$ à l'échelle j par le maximum des coefficients qui se trouvent sur la même ligne aux échelles $j' \leq j$.

Un exemple de squelette est présenté figure II.3.

Squelette 2D. La généralisation de la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes en dimension deux a été réalisée durant les deux années de mon stage post doctoral. Ce travail a abouti à un logiciel d'analyse multifractale d'images appelé *xsmurf*. Nous renvoyons le lecteur aux références originales sur la méthode [7, 52]. Nous nous contentons de rappeler ici que dans l'esprit de la procédure de détection de contour de Canny [53], à une échelle j donnée, les maxima du module de la transformée en ondelettes (WTMM) sont définis comme les points \mathbf{x} où le module de la transformée en ondelettes $|M_\psi[f](\mathbf{b}, a)|$ est localement maximum dans la direction du gradient donnée par l'angle $\mathcal{A}_\psi[f](\mathbf{b}, a)$. La méthode proposée se décompose en plusieurs étapes illustrées figure II.4 :

- recherche des maxima du module dans la direction du gradient. Ces points forment des chaînes appelées contours ou chaînes de maxima [7, 54, 52].

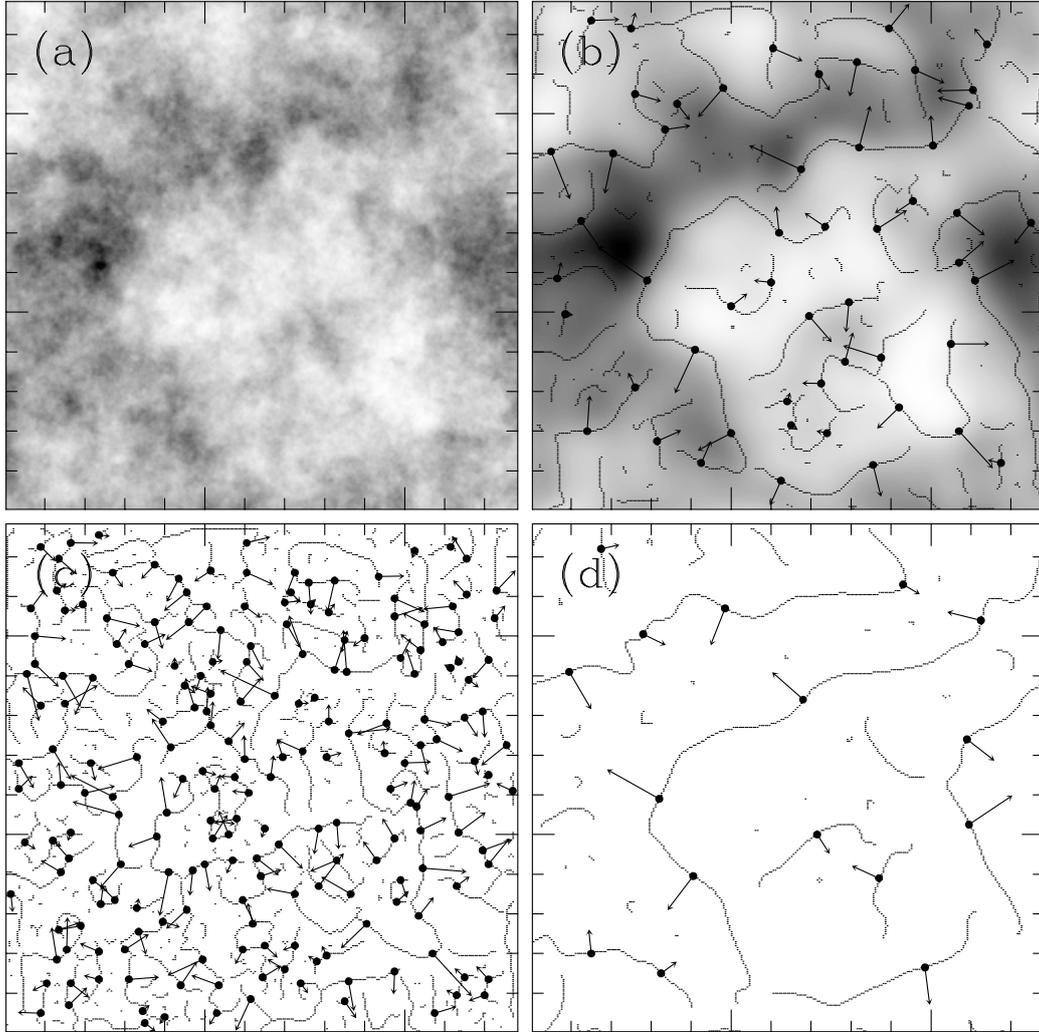


FIGURE II.4 – **WTMM 2D**. ψ est l'ondelette du 1er ordre (Fig. II.2). a) Surface Brownienne $B_{H=1/2}(\mathbf{x})$ (codée avec 32 niveaux de gris). b) image d'origine lissée à une échelle $a = 2\sigma_w$; les WTMMM sont représentés par \bullet . Les flèches représentent l'amplitude $|M_\psi[f](\mathbf{b}, a)|$ et le module $\mathcal{A}_\psi[f](\mathbf{b}, a)$ de la TO en ces points sous forme de vecteur. (c) WTMMM pris en compte à une échelle $a = 2^{0.1}\sigma_w$ et (d) pour $a = 2^{1.9}\sigma_w$. σ_w représente la taille de l'ondelette ψ à l'échelle la plus petite. Figure extraite de [7].

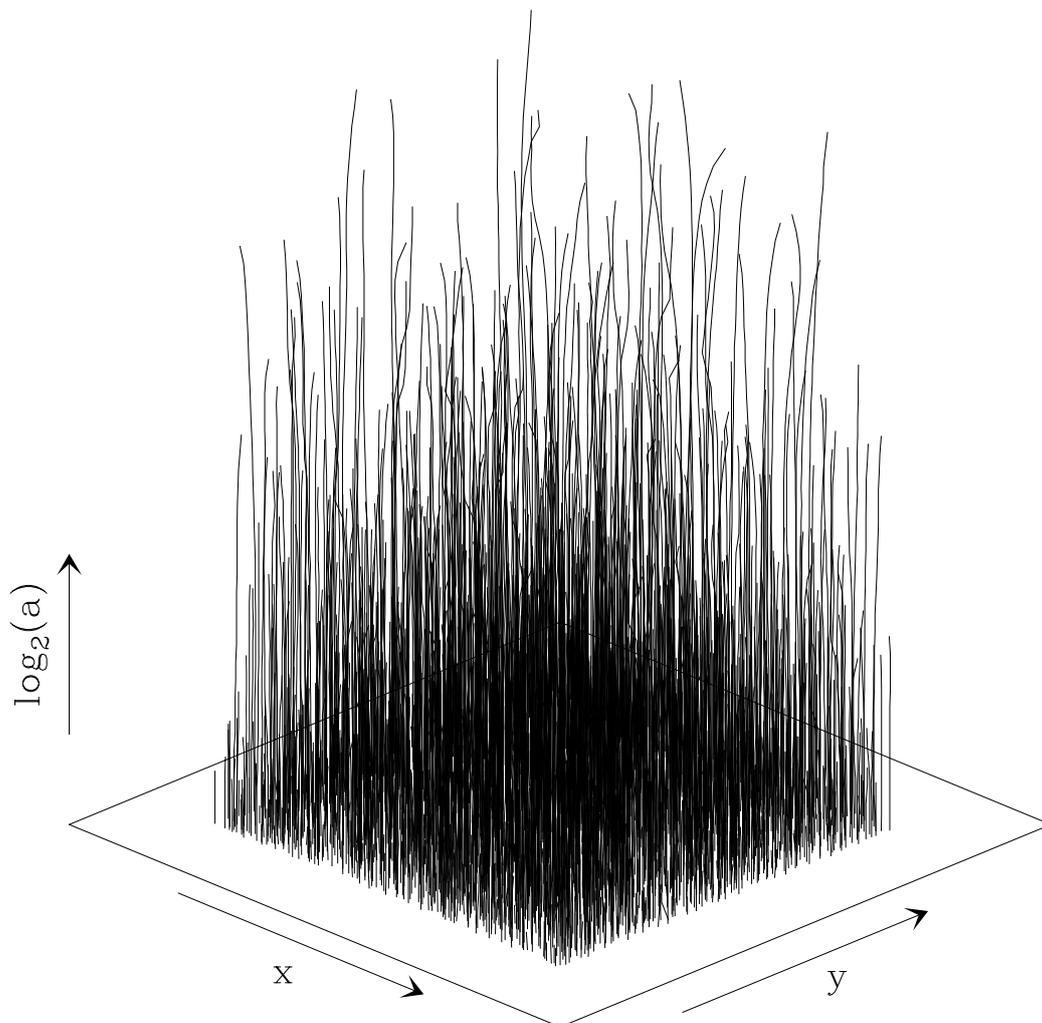


FIGURE II.5 – **WTMM 2D.** *Squelette* de la transformée en ondelettes 2D obtenu sur une surface Brownienne $B_{H=1/2}(\mathbf{x})$. Ce *squelette* est obtenu en reliant les WTMM à travers les échelles. Figure extraite de [7].

- Pour chaque contour, on recherche le maximum sur le contour et on conserve sa position ainsi que les valeurs du module, $|M_\psi[f](\mathbf{k}, a)|$, et de l'angle, $\mathcal{A}_\psi[f](\mathbf{k}, a)$, associées. Ces maxima (appelé WTMMM) se disposent sur des lignes à travers les échelles, appelées lignes de maxima. On définit le *squelette* de la transformée en ondelettes comme l'ensemble des lignes de maxima qui convergent jusqu'en un point du plan \mathbf{x} dans la limite $j \rightarrow 0$. Un exemple de *squelette* obtenu sur un champ Brownien fractionnaire est représenté figure II.5.
- Pour chaque ligne du *squelette*, on remplace le coefficient multiresolution $M(\mathbf{k}, j)$ à l'échelle j par le maximum des coefficients qui se trouvent sur la même ligne aux échelles $j' \leq j$.

Validité du formalisme.

- Il n'y a pas de résultat théorique général. Les conditions de validité sont les mêmes que celles énoncées pour le formalisme à base des coefficients d'ondelettes. Si il n'y a pas de singularités oscillantes, le spectre $\mathcal{L}(h)$ obtenu est concave tel que $\mathcal{L}(h) \geq D(h)$. Si le processus analysé est monofractal, l'égalité est atteinte.
- Ce formalisme n'est pas valide si la distribution est non bornée ($h_{\min} < 0$). En effet, l'opération consistant à prendre les maxima à travers les échelles sur les lignes du *squelette* rend impossible toute mesure de h négatif. Il faut alors pratiquer une pseudo intégration fractionnaire en remplaçant les coefficients multirésolution par

$$M_f(\mathbf{k}, j) = 2^{\frac{s_j}{n_v}} \frac{|T_\psi[f](\mathbf{k}, j)|}{2^{\frac{j d}{2 n_v}}}, \quad (\text{II.79})$$

où $s > -h_{\min}$. Si il n'y a pas présence de singularités oscillantes le spectre du signal intégré est simplement le spectre initial translaté de $s : D(h + s)$. Le formalisme multifractal est alors valide.

Remarque. La méthode du comptage de boîtes de Mandelbrot revient à une analyse reposant sur les maxima du module de la transformée en ondelettes en utilisant l'ondelette $\psi(x) = \Pi(x)$ où $\Pi(x)$ est la fonction porte.

II.3.3 Les coefficients dominants de la TOD

Pour l'analyse multifractale isotrope, l'apport des coefficients dominants a été démontré des points de vue théorique et pratique [13, 55]. La généralisation au dimension supérieure est triviale et nous l'énonçons donc ici pour une dimension d quelconque. Les coefficients dominants sont notés $L(\mathbf{k}, j)$ et sont obtenus à l'échelle j comme le maximum des coefficients en ondelettes

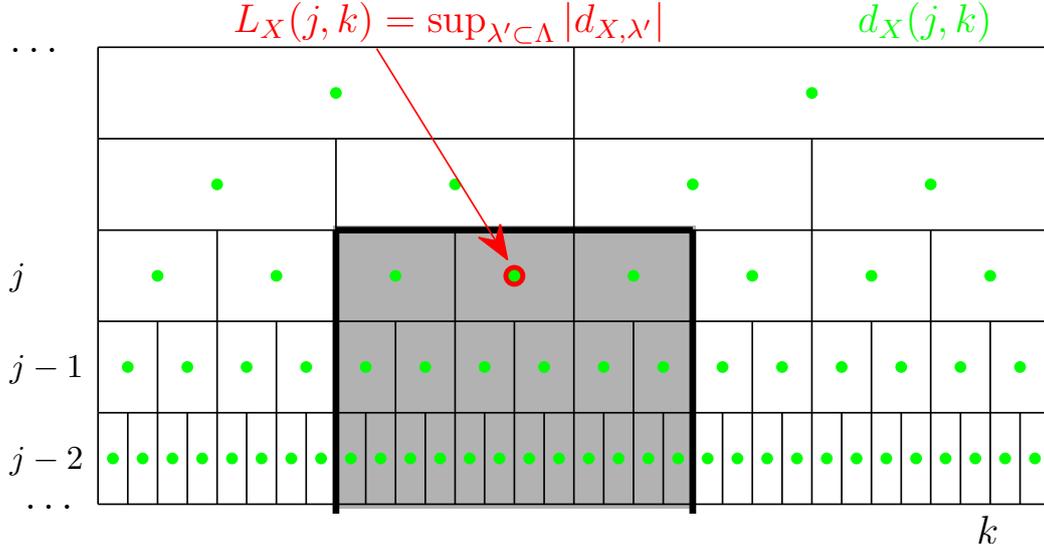


FIGURE II.6 – **Définition des coefficients dominants 1D.** Le coefficient dominant $L[f](\mathbf{k}, j)$ (point rouge) est défini comme le maximum des coefficients en ondelettes $d_\psi[f](\mathbf{k}', j')$ (point vert) pris dans un voisinage spatial de \mathbf{k} pour toutes les échelles $j' < j$ (surface en gris). Figure extraite de [12].

contenus dans un voisinage spatial de \mathbf{k} à toutes les échelles plus fines $j' < j$. On introduit une indexation dyadique des hypercubes de dimension d :

$$\lambda_{j,\mathbf{k}} = \{[k_1 2^j, (k_1 + 1)2^j), [k_2 2^j, (k_2 + 1)2^j), \dots, [k_d 2^j, (k_d + 1)2^j)\}.$$

L'union des 3^d intervalles voisins est noté :

$$3^d \lambda_{j,\mathbf{k}} = \bigcup_{n_1, \dots, n_d = \{-1, 0, 1\}} \lambda_{j, k_1 + n_1, \dots, k_d + n_d}.$$

Les coefficients dominants sont alors définis théoriquement par [13] :

$$L[f](\mathbf{k}, j) = \sup_{\lambda' \subset 3^d \lambda_{j,\mathbf{k}}} \frac{M[f](\lambda')}{2^{\frac{j d}{2}}}, \quad (\text{II.80})$$

On a représenté schématiquement la transformée en ondelettes discrète ainsi que les coefficients dominants en dimension une et deux, figures II.6 et II.7.

On montre théoriquement que si f est uniformément Hölderienne ($h_{\min} > 0$) et possède un exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0)$ en \mathbf{x}_0 alors les coefficients dominants le reproduisent. Si $2^{-j}\mathbf{k}$ est le point dyadique le plus proche de \mathbf{x}_0 , on

a $\forall \epsilon > 0$

$$L[f](\mathbf{k}, j) \leq 2^{j(h(\mathbf{x}_0) - \epsilon)}, \quad 2^j \rightarrow 0, \quad (\text{II.81})$$

et cette majoration est fautive si $\epsilon < 0$. C'est sur ce résultat théorique fondamental que repose l'usage des coefficients dominants pour l'analyse multifractale [13]. On notera que cette relation est aussi valable si la singularité est oscillante contrairement aux maxima de la transformée en ondelettes continue. Cette remarque montre le caractère plus général des coefficients dominants dans l'analyse multifractale.

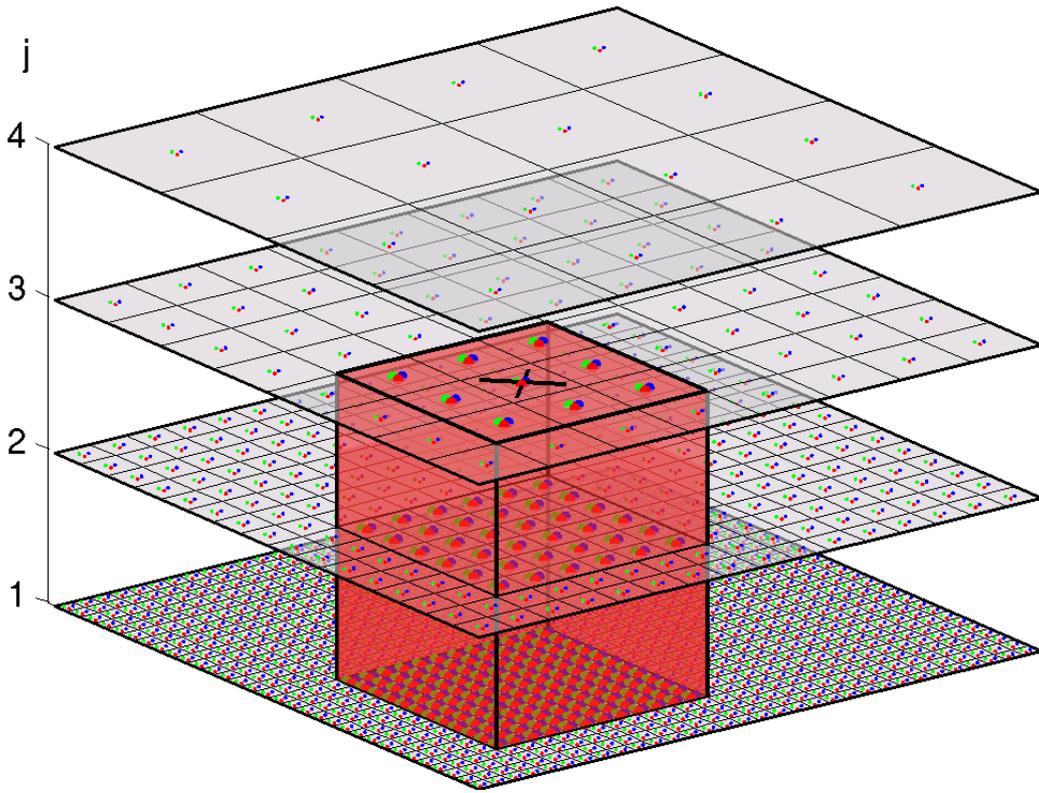


FIGURE II.7 – **Définition des coefficients dominants 2D.** Le coefficient dominant $L[f](\mathbf{k}, j)$ (croix noire) est défini comme le maximum des coefficients en ondelettes $d_{\psi_m}[f](\mathbf{k}', j)$, $m = 1, 2, 3$ (points rouges, verts et bleus) pris dans un voisinage spatial de \mathbf{k} et pour toutes les échelles $j' < j$ (volume en rouge). Les coefficients pris en compte pour le maximum sont représentés en gras. Figure extraite de [55].

Validité du formalisme. Le formalisme basé sur les coefficients dominants possède un cadre théorique bien établi que ce soit en une [13, 56, 57]

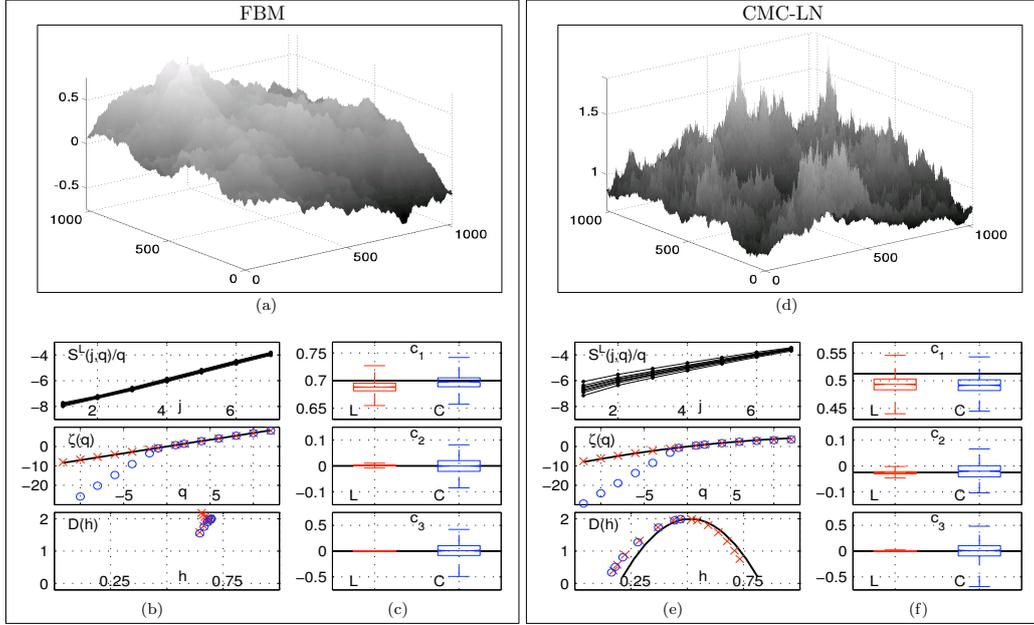


FIGURE II.8 – **Comparaison performance d’estimation DWT2D vs LWT2D.** (a) et (d) : Une réalisation de FBM et de CMC-LN, respectivement. (b) et (e) : Fonctions de structure $\hat{Z}(q, j)$ (en haut), estimations de $\hat{\zeta}(q)$ (au milieu) et de $\hat{D}(h)$ (en bas), obtenues à partir des coefficients en ondelettes \circ et des coefficients dominants (\times) pour FBM et CMC-LN, respectivement (la courbe noire continue rend compte des valeurs théoriques). Les coefficients dominants permettent d’obtenir de bonnes estimations des $\zeta(q)$ et de la totalité de $D(h)$ quand les coefficients en ondelettes ne fonctionnent que pour $q > 0$ et la partie croissante du spectre $D(h)$. (c) et (f) : De haut en bas : estimations de c_1 , c_2 et c_3 , (1000 réalisations) pour FBM et CMC-LN, respectivement (valeurs théoriques en trait continu). Les estimations reposant sur les coefficients dominants (à gauche) et sur les coefficients en ondelettes (à droite) sont tracées avec les mêmes échelles. On observe notamment que les estimations pour c_2 et c_3 , obtenues avec les coefficients dominants ont une variance beaucoup plus faible que celles produites avec les coefficients en ondelettes. Figure extraite de [43].

ou deux dimensions [43, 58, 55]. Il permet de déterminer les spectres multifractals dans leur totalité.

- Pour les distributions uniformément Hölderiennes ($h_{\min} > 0$), le spectre $\mathcal{L}(h)$ obtenu est une fonction concave telle que $\mathcal{L}(h) \geq D(h)$. L'égalité est rigoureusement exacte pour deux catégories de processus : pour les processus dont le spectre $D(h)$ est dégénéré restreint à un point (cas monofractal) ; pour les processus de séries d'ondelettes aléatoires dont les coefficients sont de la forme :

$$d_{\psi_m}[f](\mathbf{k}, j) = \mu(\mathbf{k}, \lambda_j), \quad (\text{II.82})$$

où μ est une martingale multiplicative (telles que les cascades multiplicatives de Mandelbrot [1, 59]) ou une de leurs extensions construites à partir de processus de Poisson composé [60]).

- Pour les distributions uniformément Hölderienne, le formalisme reste valable en présence de singularités oscillantes.
- Si la distribution f n'est pas uniformément Hölderienne ($h_{\min} < 0$) alors on montre que l'intégrée fractionnaire d'ordre s de la distribution est uniformément Hölderienne si $s > -h_{\min}$. On a alors $D_{I^s}[f](h) = D_{[f]}(h + s)$ si et seulement si il n'y a pas de singularités oscillantes. On détermine h_{\min} par régression linéaire de $\log_2(\sup_{i, \mathbf{k}}(d_{\psi_i}[f](j, \mathbf{k}))$ versus j . En prenant $s > -h_{\min}$, le formalisme reste valable en utilisant dans la définition des coefficients dominants, équation II.80, les coefficients en ondelettes de la pseudo intégration fractionnaire :

$$M_f(\mathbf{k}, j) = \max_{i=1,2,\dots,2^d-1} 2^{js} \frac{M[f](\mathbf{k}, j)}{2^{\frac{jd}{2}}}. \quad (\text{II.83})$$

II.3.4 Autres méthodes : MF DFA

Une autre méthode, appelée *Detrended fluctuation analysis* [61, 62] propose d'utiliser la quantité suivante comme coefficient multirésolution :

$$M(x, a) = f(x) - P^N(x), \quad (\text{II.84})$$

où $P^N(x)$ est un polynôme de degrés N , obtenu par ajustement polynomial des données entre $x - a/2$ et $x + a/2$. À partir de ces coefficients multirésolution, les auteurs proposent de définir de la même manière que l'équation II.69 le moment d'ordre q à partir de tous les coefficients accessibles (N est

le nombre total de points du signal considéré) :

$$\hat{Z}(q, j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N M(k, j)^q; \quad (\text{II.85})$$

où en ne prenant à l'échelle a , que des points distants de a ,

$$\hat{Z}(q, j) = \frac{1}{N/a} \sum_{k=1}^{N/a} M(ka, j)^q. \quad (\text{II.86})$$

Cette méthode est largement utilisée dans un grand nombre de domaines [63, 64, 65, 66, 67, 68] pour déterminer les propriétés d'invariance d'échelle. Par contre cette méthode souffre des mêmes limitations que celle reposant sur les coefficients en ondelettes : les moments d'ordres q ne sont définis que pour des valeurs de q positives et cette méthode ne permet donc de déterminer qu'une partie seulement des spectres multifractals. En 2002, Kantelhardt *et al* [69] proposent de généraliser cette méthode en utilisant comme coefficient multirésolution la quantité suivante :

$$M(x, a) = \left(\sum_{i=1}^a (f(x+i) - P_x^N(i))^2 dx \right)^{1/2}; \quad (\text{II.87})$$

où le polynôme P_x^N et un polynôme d'ordre N obtenu par ajustement polynomial des données entre x et $x+a$. À partir de ces coefficients multirésolution, le moment d'ordre q est estimé par :

$$\hat{Z}(q, j) = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N/a} M(ka, j)^q; \quad (\text{II.88})$$

Cette méthode appelée *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* permet alors de déterminer la totalité des spectres multifractals et donne des résultats tout à fait comparables à ceux obtenus avec la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes [70, 71]. Cette méthode a été généralisée en plusieurs dimensions dans [72] et appliquée à des images de mammographie [72].

II.3.5 Performances d'estimations

Les performances d'estimation du formalisme multifractal basées sur les leaders ont été étudiées en dimension une [56, 73, 74] et deux [55, 12, 58, 75].

Les processus pris en compte sont de la famille des processus monofractals (Brownien) et des cascades multiplicatives (de loi log-normale ou log-poisson). Figure II.8, nous présentons une comparaison des résultats obtenus à partir de la méthode discrète et des coefficients dominants. La comparaison des performances d'estimation des méthodes continues, maxima et coefficients dominants a été effectuée dans [76, 77] pour une dimension. Nous montrons que les performances statistiques des méthodes reposant sur les coefficients dominants ou les maxima du module sont systématiquement meilleures que celles obtenues avec les coefficients de la transformée en ondelettes continue ou dyadique. Notre étude indique aussi que la méthode des maxima du module est préférable pour les signaux courts et $q > 0$; La méthode des coefficients dominants étant meilleure pour les $q < 0$ et ceci quelque soit la taille des signaux et la valeur des paramètres. Il faut noter que les quatre estimateurs présentés ont tous un biais systématique. Pour c_1 fixé, ce biais augmente avec c_2 . Ce biais étant moindre pour les méthodes des coefficients dominants et des maxima du module.

II.4 Singularité oscillante : β -Leaders

En dimension 1, l'exemple typique de singularité oscillante (ou chirp) est la fonction :

$$f(x) = |x - x_0|^{h(x_0)} \sin\left(\frac{1}{|x - x_0|^\beta}\right), \quad h \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^{*+} \quad (\text{II.89})$$

Le cas $\beta = 0$ correspond aux singularités de type *chirp* ou oscillante tandis que le cas particulier $\beta = 0$ correspond à des singularités de type *cusps*. Par définition, l'analyse multifractale proposée précédemment se concentre sur la régularité h mais ne rend pas compte du caractère potentiellement oscillatoire des singularités présentes dans le signal. Toutefois, la détection et la caractérisation de ce type de singularités est d'importance dans différents domaines, de la détection d'ondes gravitationnelles [78] à la turbulence hydrodynamique [4].

II.4.1 Coefficient d'oscillation local

Il faut définir l'exposant d'oscillation local qui présente qualitativement le même comportement que dans II.89, sans en reproduire la forme exacte : en effet, suivant l'esprit de l'analyse multifractale, on souhaite prendre en compte des superpositions de tels comportements et la présence de bruit. Il faut donc identifier une propriété caractéristique de β que l'on utilisera

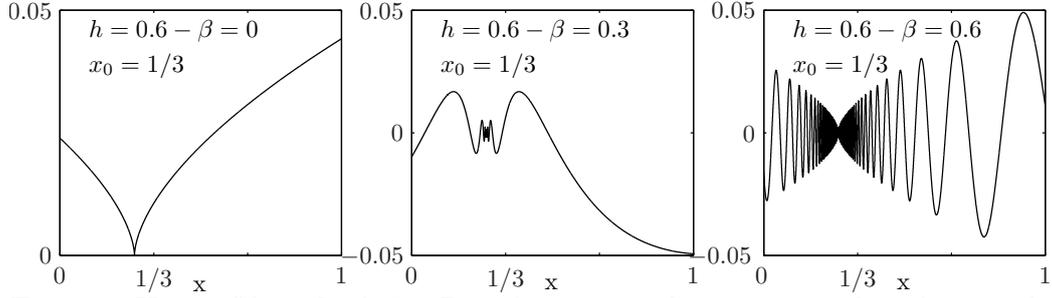


FIGURE II.9 – **Singularités.** Représentation de trois singularités avec le même exposant de Hölder ($H = 0.6$) et trois exposants d’oscillation différents ($\beta = 0, 0.3, 0.6$ de gauche à droite).

comme définition dans le cas général. Cette propriété est la suivante : toute intégration fractionnaire de paramètre s de f , $\mathcal{I}^s[f]$ possède un exposant de Hölder :

$$h_{\mathcal{I}^s[f]}(\mathbf{x}_0) = h_f(\mathbf{x}_0) + (1 + \beta)s; \quad (\text{II.90})$$

où $h_f(\mathbf{x}_0)$ est l’exposant de Hölder de f en \mathbf{x}_0 . Heuristiquement, on demande que, après une intégration fractionnaire d’ordre s suffisamment petit, l’accroissement de l’exposant de Hölder soit $s(1 + \beta)$. Formellement, on définit l’exposant d’oscillation de la façon suivante :

$$\beta(\mathbf{x}_0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s} (h_{\mathcal{I}^s[f]}(\mathbf{x}_0)) - 1, \quad (\text{II.91})$$

Le lecteur est renvoyé à [79] pour les propriétés de cet exposant et à [43] pour d’autres définitions. On dit que f a une singularité de type *cusp* en \mathbf{x}_0 si $\beta(\mathbf{x}_0) = 0$.

II.4.2 Formalisme multifractal sur intégrée fractionnaire

Une première méthode pour déterminer s’il existe des singularités oscillantes dans un signal est d’étudier comment les spectres multifractals se transforment par intégration fractionnaire.

Soit f une fonction localement bornée. Ses *spectres de singularités intégrés* sont les fonctions $D_{\mathcal{I}^s f}(h)$. Si f ne contient que des cusps, les spectres de singularités intégrés se déduisent les uns des autres par une simple translation :

$$D_{\mathcal{I}^s f}(h) = D_f(h - s). \quad (\text{II.92})$$

En pratique, on ne peut avoir accès au spectre d’un signal que par l’intermé-

diaire d'un formalisme multifractal. On a vu dans la section précédente que le formalisme basé sur les coefficients dominants donne un spectre $\mathcal{L}(h)$ qui vérifie pour les fonctions uniformément Hölderiennes :

$$\mathcal{L}_f(h) \geq D(h). \quad (\text{II.93})$$

De plus, le spectre obtenu à partir des coefficients dominants de la pseudo intégrée fractionnaire de f , $\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{I}}^s f}(h)$, coïncide avec le spectre $\mathcal{L}_{\mathcal{I}^s f}(h)$ du signal réellement intégré et on a, toujours si f est uniformément Hölderienne :

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{I}}^s f}(h) = \mathcal{L}_f(h - s). \quad (\text{II.94})$$

Si l'hypothèse de cusp uniforme n'est pas vérifiée, $\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{I}}^s f}(h)$ peut varier en fonction de s d'une façon qui révèle la présence de singularités oscillantes. Cependant, même si les spectres de Legendre intégrés satisfont (II.94), il n'est pas possible de conclure que le signal ne présente que des cusps. Des contre-exemples élémentaires peuvent être construits par perturbation de Séries d'Ondelettes Lacunaires. Ces séries aléatoires $X_{\alpha,\gamma}$ (pour $\alpha > 0$ et $\gamma < d$) sont obtenues en tirant au hasard (et uniformément) $2^{\gamma j}$ cubes dyadiques parmi les 2^{dj} cubes dyadiques de largeur 2^{-j} inclus dans $[0, 1]^d$. Les coefficients d'ondelettes correspondants ont la valeur $2^{-\alpha j}$ et les autres sont nuls (cf. [80] pour leur analyse multifractale). De tels processus ont des singularités oscillantes, ce qui se reflète dans l'évolution de leurs spectres de Legendre intégrés, qui ne se déduisent pas de $\mathcal{L}_f(h)$ par translation de s , cf. [81]. En effet les spectres de Legendre intégrés de $X_{\alpha,\gamma}$, $D_{\mathcal{I}^s X_{\alpha,\gamma}}(h)$ vérifient :

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{I}^s X_{\alpha,\gamma}}(h) &= \frac{\gamma h}{\alpha + s} \quad \text{si } h \in \left[\alpha + s, \frac{d(\alpha + s)}{\gamma} \right] \\ &= -\infty \quad \text{sinon.} \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

Soit $a > 0$ tel que $a \notin \mathbb{N}$; on note B_a le mouvement brownien fractionnaire d'ordre a (si $a > 1$, B_a est, par définition, la primitive de B_{a-1} qui s'annule en 0, obtenue trajectoire par trajectoire). Considérons

$$Y_{a,\alpha,\gamma} = X_{\alpha,\gamma} + B_a \quad (\text{II.96})$$

(avec $X_{\alpha,\gamma}$ et B_a indépendants). Le spectre de ce processus se déduit de celui de $X_{\alpha,\gamma}$ en utilisant des résultats généraux sur la régularité de la somme d'un mouvement brownien fractionnaire et d'un autre processus, cf [12] : si

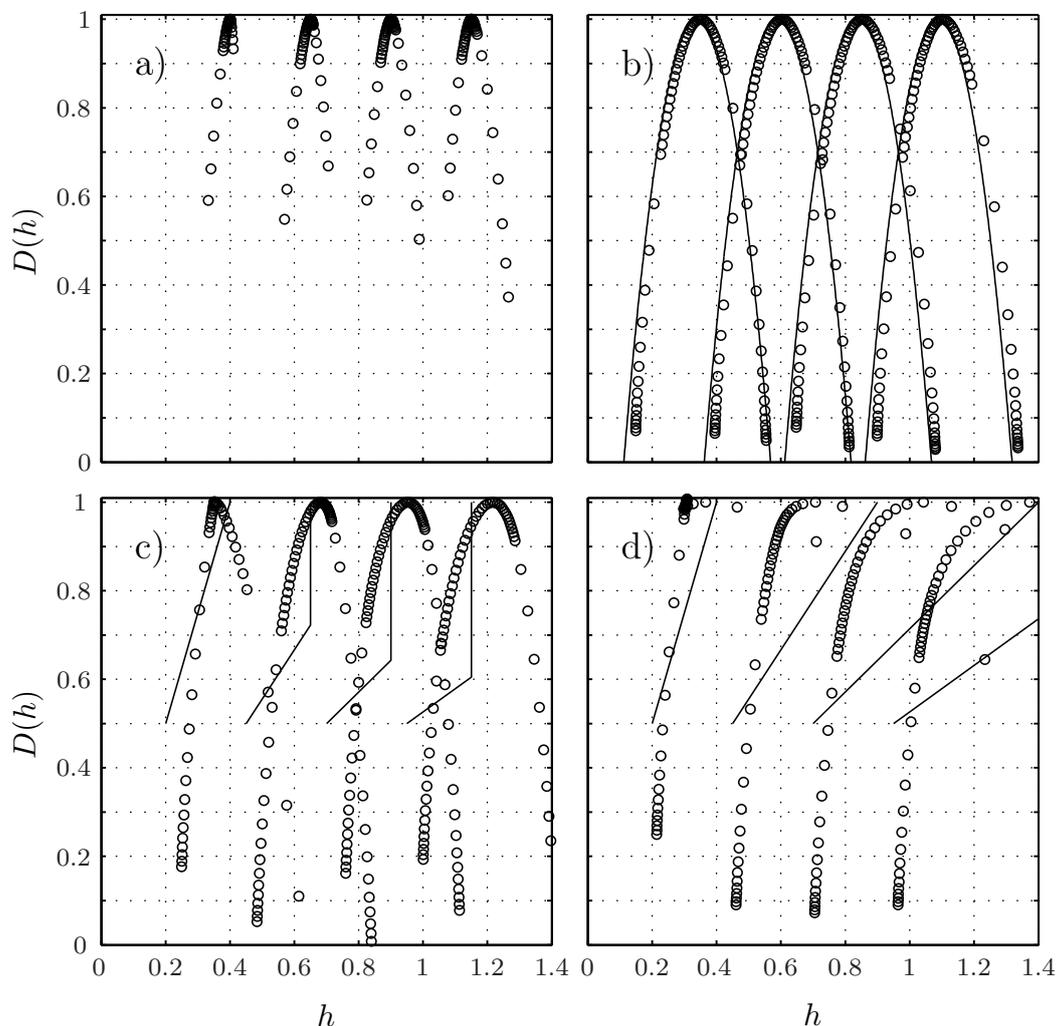


FIGURE II.10 – **Spectres d'intégrés fractionnaires.** Spectres multifractals théoriques et estimés (moyenne sur 500 réalisations) d'intégrés fractionnaires avec $s = 0, 0.25, 0.50, 0.75$, pour a) un mouvement brownien fractionnaire; b) une cascade aléatoire multiplicative d'ondelettes; c) une série d'ondelettes lacunaire et d) une série d'ondelettes lacunaire superposée à un mouvement brownien fractionnaire. Les deux premiers processus sont uniformément de type cusp (tous les spectres sont translatés de s sans déformation) tandis que les deux derniers contiennent des singularités oscillantes (pourtant les spectres d'intégrés fractionnaires du dernier sont translatés de s sans déformation).

$a \in [\alpha, d\alpha/\gamma]$, le spectre de $Y_{a,\alpha,\gamma}$ est

$$\begin{aligned} D_{Y_{a,\alpha,\gamma}}(h) &= \gamma h/\alpha && \text{si } h \in [\alpha, a], \\ &= d && \text{si } h = a, \\ &= -\infty && \text{sinon.} \end{aligned} \tag{II.97}$$

Le spectre de Legendre de $Y_{a,\alpha,\gamma}$ est un segment de droite reliant les points (α, γ) et (a, d) . Pour $H \in [\alpha, a]$, les singularités correspondantes ont un exposant d'oscillation strictement positif. Cependant, par construction, les spectres de Legendre intégrés vérifient (II.94) (cf. figure II.10). On ne peut donc détecter la présence de singularités oscillantes sur $Y_{a,\alpha,\gamma}$ en examinant ces derniers. Cette observation motive la méthode que nous allons maintenant décrire, dont le but est de détecter d'éventuelles singularités oscillantes dans les situations où les spectres de Legendre intégrés ne permettent pas de les mettre en évidence. Cette situation est illustrée sur la figure II.11 où nous avons représenté les spectres multifractals théoriques et estimés des intégrées fractionnaires (avec $s = 0, 0.25, 0.50, 0.75$) des processus $X_{\alpha,\gamma}$ et $Y_{a,\alpha,\gamma}$ contenant des singularités oscillantes. Pour comparaison, ces spectres intégrés sont aussi représentés pour des processus sans singularité oscillante : les browniens fractionnaires et les cascades multiplicatives d'ondelettes. Ces deux processus donnent bien des spectres intégrés qui sont des translatés sans déformation du spectre initial. Par contre, les spectres intégrés du processus $Y_{a,\alpha,\gamma}$, qui présente des singularités oscillantes, se translatent aussi sans déformation à l'opposé des spectres de $X_{\alpha,\gamma}$ qui montrent une déformation claire. Nous allons donc définir un nouveau formalisme pour détecter les singularités oscillantes présentes dans le processus $Y_{a,\alpha,\gamma}$.

II.4.3 Formalisme multifractal pour l'exposant d'oscillation

β -spectre de singularité. Pour définir le formalisme multifractal pour l'exposant d'oscillation, nous avons besoin d'introduire le spectre de l'exposant d'oscillation, le β -spectre :

$$D(\beta) = d_H(\{x_0 : \beta_f(x_0) = \beta\}), \tag{II.98}$$

où d_H désigne la dimension de Hausdorff. Une fonction f n'a que des cusps si et seulement si son spectre est dégénéré, c'est-à-dire porté uniquement par le point $\beta = 0$.

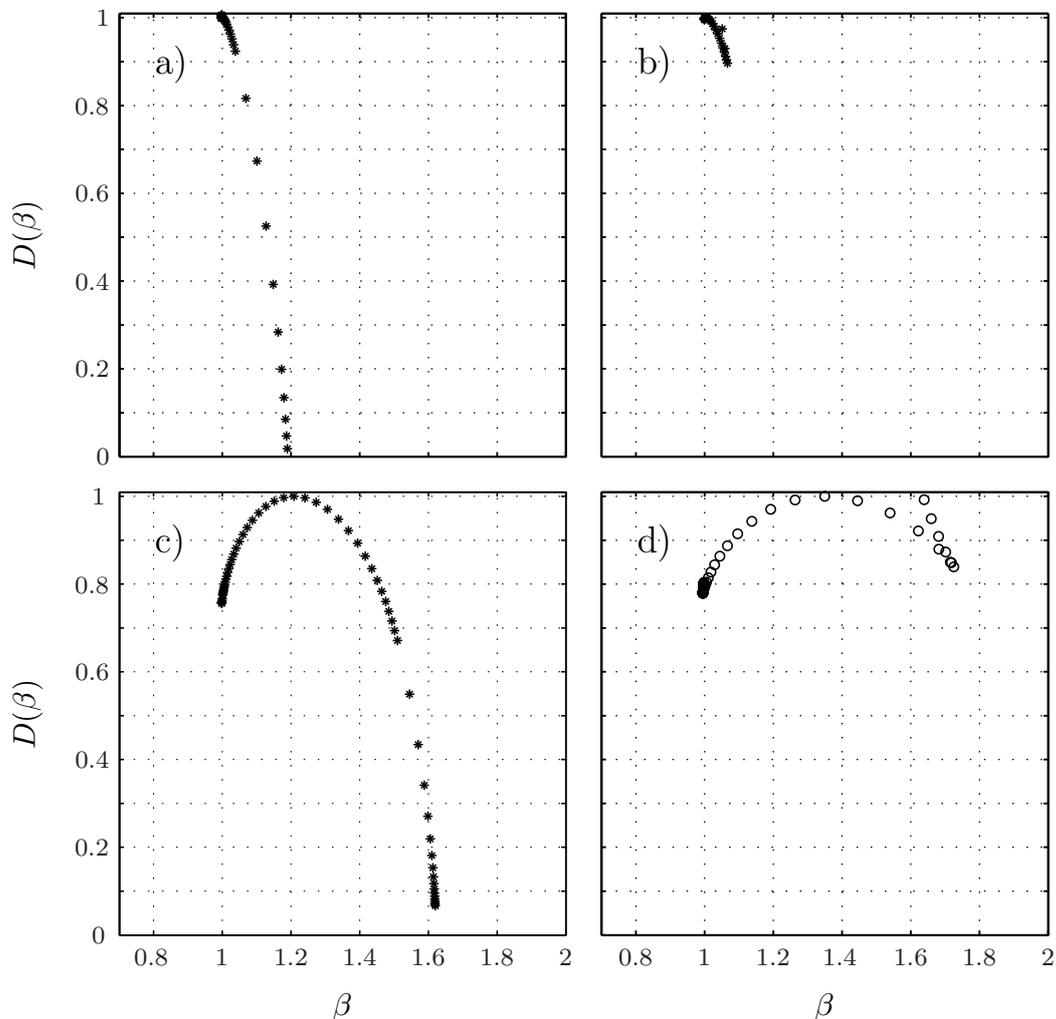


FIGURE II.11 – **Spectres d'oscillations.** Spectres d'oscillations théoriques et estimés (moyenne sur 500 réalisations) pour $s = 0.50$ et pour a) un mouvement brownien fractionnaire; b) une cascade aléatoire multiplicative d'ondelettes; c) une série d'ondelettes lacunaire et d) une série d'ondelettes lacunaire superposée à un mouvement brownien fractionnaire. Les deux premiers processus sont uniformément cusp (et leurs spectres d'oscillations sont dégénérés, concentrés en $\beta = 0$) tandis que les deux derniers contiennent des singularités oscillantes (et leurs spectres d'oscillations sont larges). Cette figure est à mettre en regard de la figure II.10

β formalisme. L'obtention du formalisme multifractal suit l'heuristique suivante : soit $s > 0$ fixé assez petit ; si f a une singularité oscillante d'exposants (h, β) en \mathbf{x}_0 , alors on a vu que si $2^{-j}\mathbf{k}$ est le point dyadique le plus proche de \mathbf{x}_0 , on a $\forall \epsilon > 0$:

$$L[f](\mathbf{k}, j) \sim 2^{-h(\mathbf{x}_0)j}, \quad 2^{-j} \rightarrow 0. \quad (\text{II.99})$$

De même, si on estime les leaders à partir de la pseudo intégration de f , on a aussi

$$L[\tilde{\mathcal{I}}^s f](\mathbf{k}, j) \sim 2^{-(h(\mathbf{x}_0)+s(1+\beta))j}, \quad 2^{-j} \rightarrow 0. \quad (\text{II.100})$$

Par élimination on obtient que les β -coefficients dominants

$$B(\mathbf{k}, j) = 2^j \left(\frac{L[\tilde{\mathcal{I}}^s f](\mathbf{k}, j)}{L[f](\mathbf{k}, j)} \right)^{1/s} \quad (\text{II.101})$$

vérifient

$$B_{(\mathbf{x}_0, j)} \sim 2^{-\beta(\mathbf{x}_0)j}. \quad (\text{II.102})$$

On peut alors définir le formalisme multifractal défini par les fonctions de partition [II.69](#) à partir de ces coefficients β -dominants. On définit ainsi $\zeta_\beta(q)$, $h_\beta(q)$, $d_\beta(q)$. La transformée de Legendre $\mathcal{L}(\beta)$ de $\zeta_\beta(q)$ nous donne une estimée du spectre de singularités oscillantes $D(\beta)$ de f .

On remarquera que $\mathcal{L}(\beta)$ dépend du paramètre s choisi. Mathématiquement, il est nécessaire de faire tendre s vers 0 pour avoir accès à l'information sur les singularités oscillantes, car celles-ci sont définies dans cette limite. En pratique, on choisit une valeur de s suffisamment petite, mais ne conduisant cependant pas à des instabilités numériques.

Le β -formalisme est conforté par plusieurs résultats mathématiques qui sont développés dans [81] : il est vérifié pour les fonctions de type cusp uniforme, auquel cas on retrouve bien que le spectre est porté par le seul point $\beta = 0$. Il est aussi valide pour les séries d'ondelettes lacunaires, ainsi que pour les processus $Y_{a,\alpha,\gamma}$, définis en [\(II.96\)](#) (en particulier, pour ces derniers, le β -spectre ne se réduit pas à un point). Ce dernier résultat montre l'avantage du β -formalisme par rapport à l'étude des spectres d'intégrées fractionnaires. La figure [II.11](#) montre le spectre $D(\beta)$ obtenu pour les processus de la figure [II.10](#). La non dégénérescence des β -spectres des séries d'ondelettes lacunaires et des processus $Y_{a,\alpha,\gamma}$ peut effectivement être observée numériquement. Le β -spectre fournit donc une procédure pratique permettant la détection de la

présence de singularités oscillantes.

Un formalisme grand canonique. Il est naturel d'introduire un *formalisme multifractal grand canonique* dont le but est d'accéder au *spectre de singularités cusp et oscillante* :

$$D_f(h, \beta) = \dim(\{x_0 : h_f(x_0) = h \text{ et } \beta_f(x_0) = \beta\})$$

Son obtention suit celle des formalismes multifractals à un seul paramètre : Si f a une singularité oscillante d'exposants (h, β) en \mathbf{x}_0 , alors

$$L_{(\mathbf{x}_0, j)} \sim 2^{-hj} \quad \text{et} \quad B_{(\mathbf{x}_0, j)} \sim 2^{-\beta j}.$$

On peut donc construire les fonctions de structure grand-canonique, équations II.36 et II.39, à partir de ces quantités. Comme dans les cas précédents, ce formalisme est vérifié pour les fonctions de type cusp uniforme, et les séries d'ondelettes lacunaires, cf. [81]. Dans [82], une première formulation du formalisme grand canonique avait été proposée, mais elle était adaptée à une famille paramétrique, et le formalisme était défini directement sur les paramètres et non sur la fonction elle-même ; il n'était donc pas adaptable à une situation générale. Un autre formalisme grand canonique est proposé dans [83] ; mais il est construit sur la fonction d'échelle intégrée et il est donc soumis aux limitations mentionnées dans le paragraphe "Formalisme multifractal sur intégrée fractionnaire".

II.5 Invariance d'échelle Anisotrope

Dans cette section, nous proposons d'utiliser la transformée discrète hyperbolique 2D (HWT) pour l'analyse de champs invariants d'échelles anisotropes. En effet, la transformée hyperbolique permet l'usage conjoint de deux facteurs de dilatation différents selon les axes horizontaux et verticaux. À partir des coefficients de cette transformée, une procédure d'estimation conjointe du paramètre d'anisotropie et des spectres multifractals est proposée.

II.5.1 Transformée hyperbolique en ondelettes

La transformée hyperbolique 2D en ondelettes est construite comme produit tensoriel d'une base d'ondelettes, issue d'une analyse multirésolution 1D avec elle-même (cf. e.g., [38]). On note ϕ , ψ respectivement la fonction d'échelle et l'ondelette mère (ici Daubechies 3). On définit alors pour tous

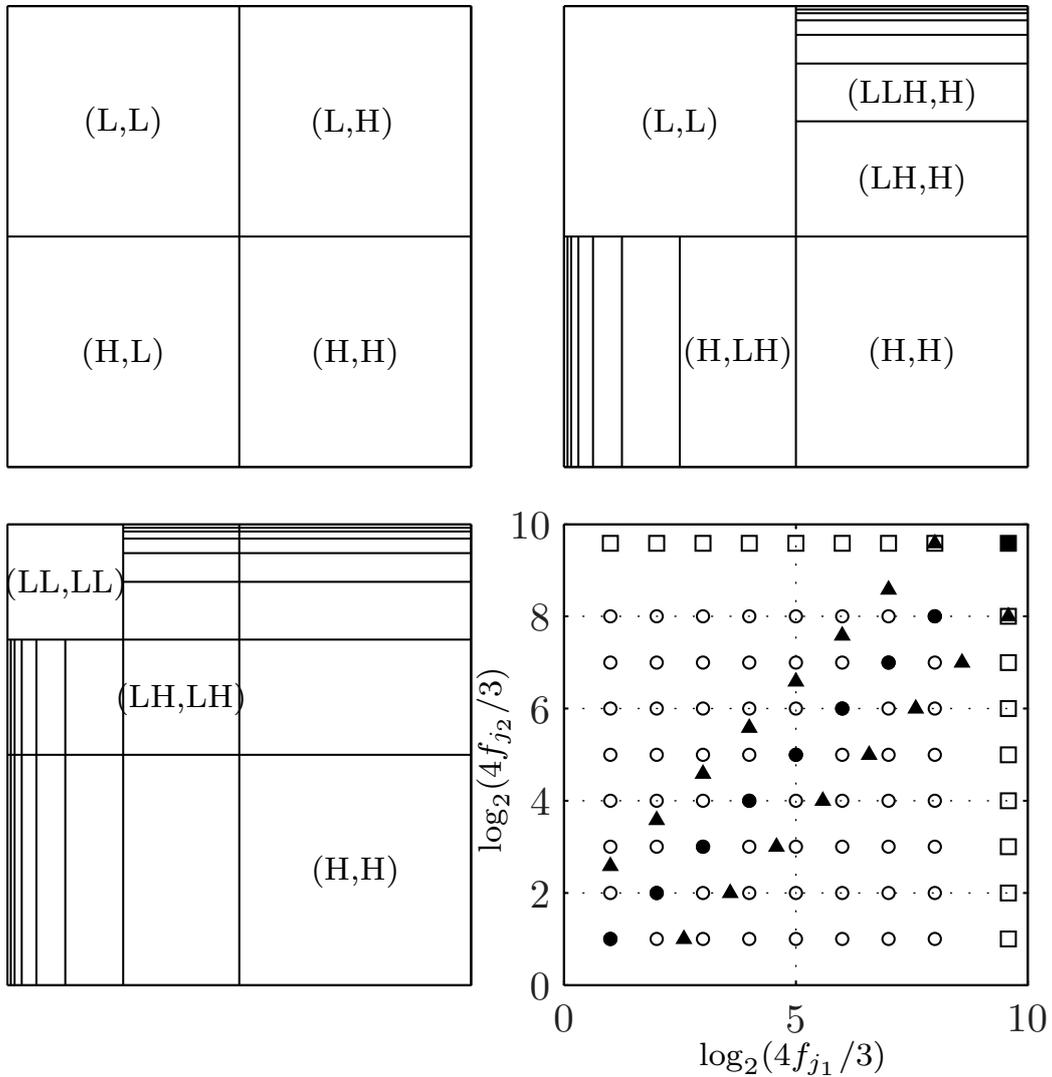


FIGURE II.12 – **Transformée hyperbolique en ondelettes.** Une étape de la HWT (en haut à droite) correspond à une étape de la DWT 2D (en haut à gauche) plus l'ensemble des DWT 1D suivant les lignes pour (H,L) et suivant les colonnes pour (L,H). Deux étapes successives de la HWT sont présentées en bas à gauche. En bas à droite, position dans le plan fréquence des coefficients de la HWT (symboles vides) versus ceux de la DWT2D (symboles pleins). Les cercles correspondent aux coefficients ψ_{j_1, j_2} $j_1, j_2 \geq 0$, les triangles et carrés aux coefficients de la DWT-2D $\psi_1(j)$ et $\psi_2(j)$ (II.57) et les carrés pleins aux coefficients d'approximation ψ_{-1, j_2} , $\psi_{j_1, -1}$ et $\psi_{-1, -1}$. Figure extraite de [84].

$\mathbf{j} = (j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$ et $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, la collection :

$$\begin{aligned}\psi_{j_1, j_2, k_1, k_2}(x_1, x_2) &= 2^{\frac{(j_1+j_2)}{2}} \psi(2^{j_1}x_1 - k_1)\psi(2^{j_2}x_2 - k_2), \\ \psi_{-1, j_2, k_1, k_2}(x_1, x_2) &= 2^{\frac{j_1}{2}} \varphi(x_1 - k_1)\psi(2^{j_2}x_2 - k_2), \\ \psi_{j_1, -1, k_1, k_2}(x_1, x_2) &= 2^{\frac{j_2}{2}} \psi(2^{j_1}x_1 - k_1)\varphi(x_2 - k_2), \\ \psi_{-1, -1, k_1, k_2}(x_1, x_2) &= \varphi(x_1 - k_1)\varphi(x_2 - k_2),\end{aligned}$$

qui définit la base de $L^2(\mathbb{R})$ sous-jacente à la HWT (cf. [85]). Les coefficients (en norme L^2) de la HWT d'une image f sont alors définis par :

$$d_f(\mathbf{k}, \mathbf{j}) = 2^{\frac{(j_1+j_2)}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

Ces coefficients peuvent être calculés par un algorithme pyramidal récursif à temps discret. Le pavage de l'espace de Fourier correspondant aux deux premières itérations est illustré sur la figure II.12. De manière pratique, une itération de la HWT d'une image de taille $N \times N$ s'obtient en combinant une itération de l'algorithme 2D-DWT à $N/2$ 1D-DWT pour chaque ligne de la sous-bande LH et à $N/2$ 1D-DWT pour chaque colonne de la sous-bande HL.

II.5.2 Vers une analyse multifractale anisotrope

Nous avons vu qu'une fonction f possède des propriétés d'invariance d'échelle anisotrope si :

$$\{f(a^E \mathbf{x})\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{a^{h(\mathbf{x})} f(\mathbf{x})\}, \quad (\text{II.103})$$

où la matrice E est différente de la matrice identité. L'analyse multifractale anisotrope peut se formaliser pour une matrice $E = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & 2 - \alpha_0 \end{pmatrix}$, $0 < \alpha_0 \leq 1$ en utilisant les espaces de Besov anisotropes [86]. La transformée hyperbolique en ondelettes permet de caractériser ces espaces et on peut montrer que si l'image f a un exposant de Hölder anisotrope $0 < h_{\alpha_0}(\mathbf{x}_0) < \alpha_0$ en X_0 alors pour \mathbf{k} voisin de \mathbf{x}_0 et pour le choix des échelles $\mathbf{j} = (\alpha j, (2 - \alpha)j)$, $j \rightarrow +\infty$, les coefficients hyperboliques en ondelettes se comportent en loi de puissance comme [86] :

$$|d_f(\mathbf{k}, j)| \sim 2^{-j h_{\alpha_0}(\mathbf{x}_0) \min(\frac{\alpha}{\alpha_0}, \frac{2-\alpha}{2-\alpha_0})}. \quad (\text{II.104})$$

Ainsi dans la direction $\alpha = \alpha_0$, l'exposant de la loi de puissance est maximal et est égal à l'exposant de Hölder anisotrope $h_{\alpha_0}(\mathbf{x}_0)$. Quand $\alpha \neq \alpha_0$ on a

$h_\alpha(\mathbf{x}_0) = h_{\alpha_0}(\mathbf{x}_0) \min(\frac{\alpha}{\alpha_0}, \frac{2-\alpha}{2-\alpha_0})$ qui est toujours supérieur ou égal à 0.

Coefficients dominants de la HWT. Pour l'analyse multifractale isotrope, l'apport des coefficients dominants a été démontré des points de vue théorique et pratique [13, 55]. On généralise leur définition à la transformée hyperbolique en ondelettes en introduisant, pour tous (\mathbf{k}, \mathbf{j}) , le rectangle dyadique $\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{j})$ [86]

$$\lambda = \lambda(\mathbf{k}, \mathbf{j}) =]\frac{k_1}{2^{j_1}}, \frac{k_1+1}{2^{j_1}}] \times]\frac{k_2}{2^{j_2}}, \frac{k_2+1}{2^{j_2}}], \quad (\text{II.105})$$

et dénotons l'union de 9 intervalles $\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{j})$ voisins par

$$3^2 \lambda(\mathbf{k}, \mathbf{j}) =]\frac{2^{j_1} k_1 - 1}{2^{j_1}}, \frac{2^{j_1} k_1 + 2}{2^{j_1}}] \times]\frac{2^{j_2} k_2 - 1}{2^{j_2}}, \frac{2^{j_2} k_2 + 2}{2^{j_2}}].$$

À partir des coefficients $d_f(\mathbf{k}, \mathbf{j})$, on définit les coefficients dominants par

$$L_f(\mathbf{k}, \mathbf{j}) = \sup_{\lambda' \subset 3^2 \lambda(\mathbf{k}, \mathbf{j})} |d_X(\lambda')|, \quad (\text{II.106})$$

où $d_f(\lambda)$ est une notation raccourcie de $d_f(\mathbf{k}, \mathbf{j})$. Notons que ce supremum est fini dès que f est bornée. En termes pratiques, le coefficient dominant $L_f(\mathbf{k}, \mathbf{j})$ remplace le coefficient en ondelettes $d_f(\mathbf{k}, \mathbf{j})$ par celui possédant la plus grande valeur absolue parmi tous les coefficients en ondelettes dans un voisinage spatial de \mathbf{k} à toutes les échelles $2^{j'} = (2^{j'_1}, 2^{j'_2})$ telles que $j'_1 \leq j_1$ et $j'_2 \leq j_2$.

Pour $j_1 = j_2$, la définition obtenue par (II.106) est proche de celle des coefficients dominants obtenue à partir de la transformée en ondelettes 2D classique (II.80). La différence vient du fait que, dans la définition classique, le maximum est pris dans le même voisinage spatial mais pour les échelles $2^{j'}$ avec $(j'_1 \leq j_1, \forall j'_2)$ et $(\forall j'_1, j'_2 \leq j_2)$.

On peut montrer que, si f possède un exposant de régularité anisotrope $h_{\alpha_0}(\mathbf{x}_0) > 0$, alors, pour $\mathbf{j} = (\alpha j, (2-\alpha)j)$, $j \rightarrow -\infty$ et \mathbf{k} voisin de \mathbf{x}_0 , on a [86] :

$$L_f(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \leq 2^{-j h_{\alpha_0}(\mathbf{x}_0) \min(\frac{\alpha}{\alpha_0}, \frac{2-\alpha}{2-\alpha_0})}. \quad (\text{II.107})$$

Ainsi nous trouvons le même résultat que pour les coefficients en ondelettes (équation II.104) : le comportement local en loi de puissance est maximal dans la direction de l'anisotropie et égal à l'exposant de Hölder anisotrope.

Formalisme multifractal anisotrope. Par analogie avec le formalisme multifractal classique, on reformule la définition des fonctions de partition (Eq. II.14) à des coefficients multirésolution dépendant de deux échelles

$\mathbf{j} = (j_1, j_2)$. Ces coefficients multirésolution sont au choix la valeur absolue des coefficients de la transformée en ondelettes $M(\mathbf{k}, \mathbf{j}) = |d_f(\mathbf{k}, \mathbf{j})|$ ou ses coefficients dominants $M(\mathbf{k}, \mathbf{j}) = L_f(\mathbf{k}, \mathbf{j})$:

$$Z(q, \mathbf{j}) = \mathbb{E}\{M(\mathbf{k}, \mathbf{j})^q\}; \quad (\text{II.108})$$

Si l'image analysée présente des propriétés multifractales anisotropes alors pour $\mathbf{j} = (\alpha j, (2 - \alpha)j)$ $j \rightarrow \infty$, ces fonctions de partition se comportent en loi de puissance :

$$Z(q, \alpha, j) \sim Z_0(q)2^{j\zeta(q, \alpha)}. \quad (\text{II.109})$$

Si on définit $\mathcal{L}(h, \alpha)$ par transformée de Legendre de $\zeta(q, \alpha)$:

$$\mathcal{L}(h, \alpha) = \min_q(qh - \zeta(q, \alpha)) + 2. \quad (\text{II.110})$$

Alors, pour le choix particulier $\alpha = \alpha_0$ on peut montrer que $\mathcal{L}(h, \alpha_0)$ est une fonction concave telle que [86] :

$$\mathcal{L}(h, \alpha_0) \geq D_{\alpha_0}(h). \quad (\text{II.111})$$

Si l'image analysée est monofractale isotrope ou anisotrope, on peut montrer que cette inégalité devient une égalité [86, 84] :

$$\mathcal{L}(h, \alpha_0) = D_{\alpha_0}(h). \quad (\text{II.112})$$

De plus, on peut inférer d'après le comportement local des coefficients multirésolution, équations II.104 et II.107, que pour $\alpha \neq \alpha_0$ on a

$$\text{sign}(q)\zeta(q, \alpha) < \text{sign}(q)\zeta(q, \alpha_0). \quad (\text{II.113})$$

et le paramètre d'anisotropie vérifie

$$\alpha_0 = \text{argmax}_\alpha \{\text{sign}(q)\zeta(q, \alpha)\}, \quad \forall q \in \mathbb{R}. \quad (\text{II.114})$$

Estimations. Pour l'estimation pratique sur une image de taille $N \times N$, on effectue les étapes suivantes, illustrées figure II.13 :

- 1) On calcule les coefficients de la transformée hyperbolique en ondelettes ($d(\mathbf{k}, \mathbf{j})$) ainsi que ses coefficients dominants ($L(\mathbf{k}, \mathbf{j})$) pour toutes les échelles ($1 \leq j_1 \leq J, 1 \leq j_2 \leq J$) disponibles.

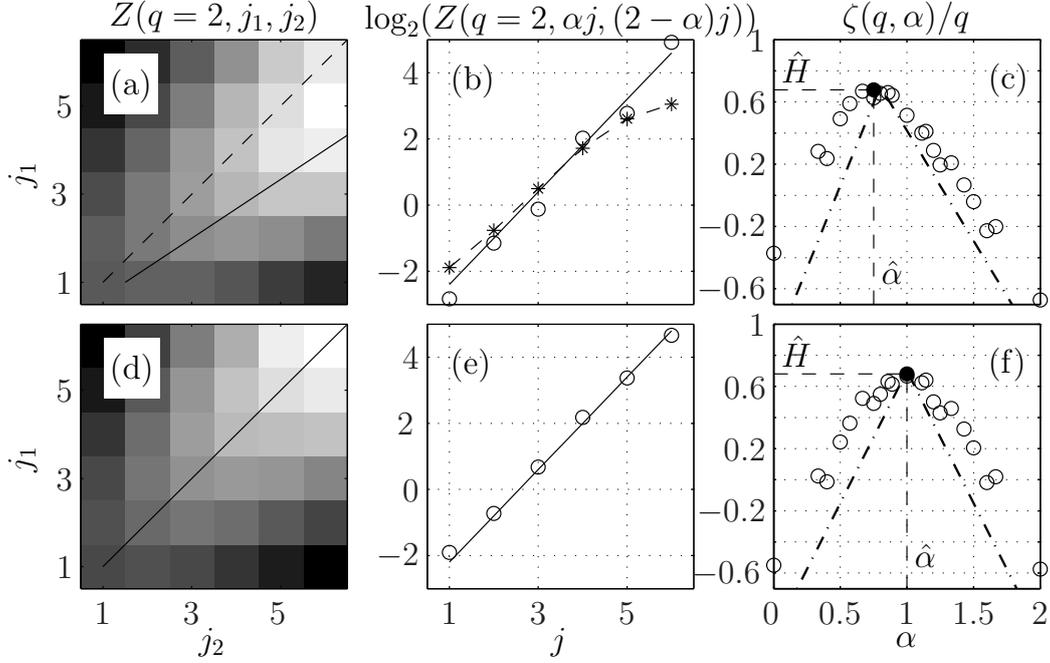


FIGURE II.13 – **Formalisme anisotrope : procédure d'estimation.** Pour deux processus monofractals $X_{\theta_0, \alpha_0, H_0, \lambda_0=0}$ (eq. II.121) avec $\theta_0 = 0$ et $H_0 = 0.7$, l'un anisotrope avec $\alpha_0 = 0.8$ (en haut), et l'autre isotrope $\alpha_0 = 1$ (en bas). A gauche : fonction de structure $Z(q = 2, j_1, j_2)$. La ligne continue correspond à la direction $\hat{\alpha}$ et la ligne discontinue à la direction $\alpha = 1$ seule direction accessible à la TOD 2D. Au milieu, estimation de $h(q = 2, \alpha)$, basée sur l'estimation de $\zeta(q = 2, \alpha = \hat{\alpha})$ par régression linéaire de $\log_2 S(q, \alpha j, (2 - \alpha)j)$ versus j (\circ). La ligne continue correspond au résultat théorique $\zeta(q = 2, \alpha_0)$. Les étoiles (dans (b)) correspondent à l'estimation biaisée obtenue pour $\zeta(q = 2, \alpha = 1)$ et qui correspondent à l'estimation usuelle en utilisant la TOD-2D. A droite, $\hat{H}_2(\alpha) = \zeta(2, \alpha)/2$ versus α . Le symbole plein correspond au maximum de $\hat{H}_2(\alpha)$ qui donne les estimés $\hat{\alpha}$ et \hat{H} . La ligne discontinue correspond à la prédiction théorique. Figure extraite de [84].

- 2) On reformule la définition des différentes fonctions de partition, équation II.69, pour chaque échelle (j_1, j_2) :

$$\begin{aligned}\hat{Z}(q, \mathbf{j}) &= \frac{1}{N_{\mathbf{j}}} \sum_{k=1}^{N_{\mathbf{j}}} M(\mathbf{k}, \mathbf{j})^q; \\ \hat{H}(q, \mathbf{j}) &= \frac{1}{N_{\mathbf{j}}} \sum_{k=1}^{N_{\mathbf{j}}} \tilde{M}(\mathbf{k}, \mathbf{j}, q) \ln(|M(\mathbf{k}, \mathbf{j})|^q); \\ \hat{D}(q, \mathbf{j}) &= \frac{1}{N_{\mathbf{j}}} \sum_{k=1}^{N_{\mathbf{j}}} \tilde{M}(\mathbf{k}, \mathbf{j}, q) \ln(\tilde{M}(\mathbf{k}, \mathbf{j}, q)).\end{aligned}\quad (\text{II.115})$$

avec $\tilde{M}(\mathbf{k}, \mathbf{j}, q) = M(\mathbf{k}, \mathbf{j})^q / \hat{Z}(q, \mathbf{j})$. Les cumulants du logarithme des coefficients multirésolution, équation (II.22), sont estimés à partir de leurs moments $\hat{M}_q^{\log}(\mathbf{j}) = \frac{1}{N_{\mathbf{j}}} \sum_{k=1}^{N_{\mathbf{j}}} (\log M(\mathbf{k}, \mathbf{j}))^q$. Pour le choix particulier $(j_1 = \alpha j, (2 - \alpha)j)$ ces fonctions se comportent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\log_2 \hat{Z}(q, \alpha j, (2 - \alpha)j) &\sim \zeta(q, \alpha)j; \\ \hat{D}(q, \alpha j, (2 - \alpha)j) &\sim d(q, \alpha)j; \\ \hat{H}(q, \alpha j, (2 - \alpha)j) &\sim h(q, \alpha)j; \\ \hat{C}(p, \alpha j, (2 - \alpha)j) &\sim c(p, \alpha)j.\end{aligned}\quad (\text{II.116})$$

- 3) On détermine l'ensemble des paramètres α tel que la direction $(\alpha j, (2 - \alpha)j)$ connecte au minimum deux paires d'échelles dyadiques, i.e., $(a_1 = 2^{j_1}, a_2 = 2^{j_2})$ avec $(j_1, j_2) = [1, 2, \dots, J]^2$. La résolution en α , et donc celle de nos estimés $\hat{\alpha}$, dépend de la taille de l'image analysée.
- 4) Pour tous les paramètres α de l'étape précédente, on interpole les surfaces $\log_2 \hat{Z}(q, \mathbf{j})$, $\hat{H}(q, \mathbf{j})$, $\hat{D}(q, \mathbf{j})$ et $C(p, \mathbf{j})$ (par une méthode de plus proche voisin) dans la direction $\alpha j + 1 = (2 - \alpha)j + 1$. La régression linéaire des résultats versus j (équation II.71), nous donne les estimés $\hat{\zeta}(q, \alpha)$, $\hat{d}(q, \alpha)$, $\hat{h}(q, \alpha)$ et $\hat{c}(p, \alpha)$.
- 5) On détermine ensuite le maximum de ces courbes $\forall q \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_0^{\hat{\zeta}}(q) &= \operatorname{argmax}_{\alpha} \{\operatorname{sign}(q) \hat{\zeta}(q, \alpha)\}; \\ \hat{\alpha}_0^{\hat{d}}(q) &= \operatorname{argmax}_{\alpha} \{\hat{d}(q, \alpha)\}; \\ \hat{\alpha}_0^{\hat{h}}(q) &= \operatorname{argmax}_{\alpha} \{\hat{h}(q, \alpha)\}; \\ \hat{\alpha}_0^{\hat{c}}(1) &= \operatorname{argmax}_{\alpha} \{\hat{c}(1, \alpha)\}; \\ \hat{\alpha}_0^{\hat{c}}(2) &= \operatorname{argmax}_{\alpha} \{-\hat{c}(2, \alpha)\}.\end{aligned}$$

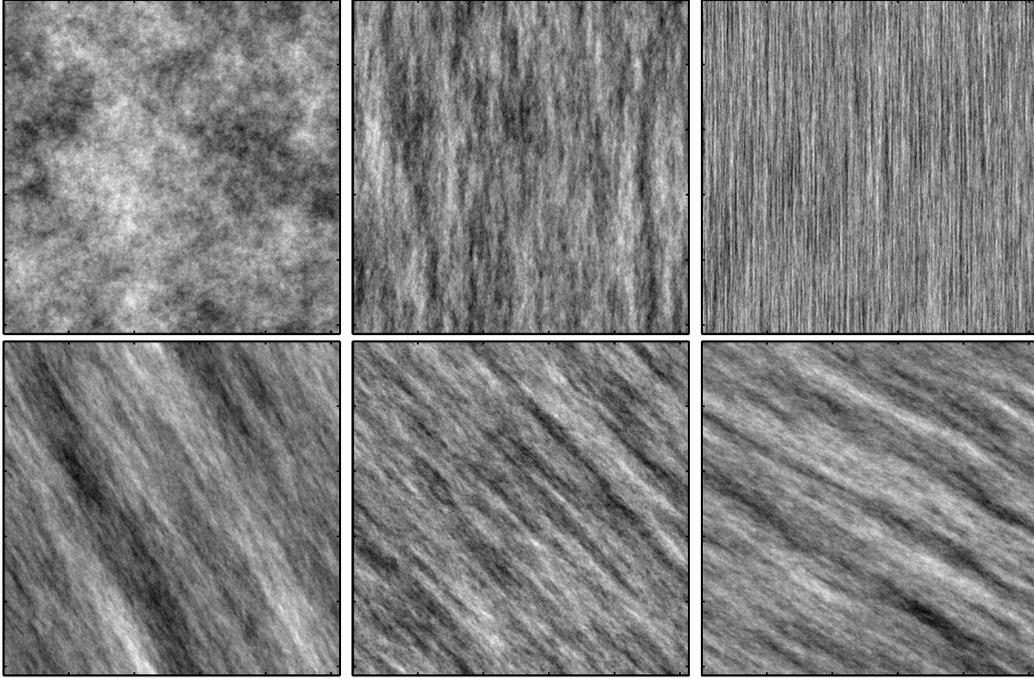


FIGURE II.14 – **Champs autosimilaires anisotropes gaussiens.** En haut : $(\theta_0, \alpha_0, H_0) = (0, \alpha_0, 0.2)$ avec de gauche à droite $\alpha_0 = 1$ (isotropique); $\alpha_0 = 0.7$ et $\alpha_0 = 0.3$. En bas : $(\theta_0, \alpha_0, H_0) = (\theta_0, 0.7, 0.2)$ avec de gauche à droite $\theta_0 = \pi/6$, $\theta_0 = \pi/4$ and $\theta_0 = \pi/3$. Figure extraite de [84].

Ainsi, la position du maximum de ces différentes courbes en fonction de α nous donne différentes estimations du paramètre d'anisotropie $\hat{\alpha}_0^f(q)$ avec $f = \hat{\zeta}, \hat{d}, \hat{h}$ ou \hat{c} . Les estimés finaux sont alors définis par :

$$\hat{\zeta}_{\alpha_0}(q) = \hat{\zeta}(q, \hat{\alpha}_0^{\zeta}(q)); \quad (\text{II.117})$$

$$\hat{h}_{\alpha_0}(q) = \hat{h}(q, \hat{\alpha}_0^h(q)); \quad (\text{II.118})$$

$$\hat{d}_{\alpha_0}(q) = \hat{d}(q, \hat{\alpha}_0^d(q)); \quad (\text{II.119})$$

$$\hat{c}_{\alpha_0}(q) = \hat{c}(q, \hat{\alpha}_0^c(q)); \quad (\text{II.120})$$

Remarque. Si l'image présente des propriétés d'invariance d'échelle anisotrope, on s'attend à ce que les estimés $\hat{\alpha}_0^f(q)$ donne une valeur constante que ce soit en fonction de q ou de l'estimateur f utilisé.

II.5.3 Processus multifractal anisotropes

Nous proposons de combiner les définitions de processus de marches aléatoires multifractales multidimensionnelles introduites par exemple dans [87], comme extension du cas plus classique 1D (cf. e.g., [88]), et celles des processus auto-similaires anisotropes [89, 90] pour définir un processus modèle pour l'étude de textures multifractales anisotropes. Ce processus, à accroissements stationnaires, est défini par :

$$X_{\theta_0, \alpha_0, H_0, \lambda}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f(\boldsymbol{\xi})^{-(H_0+1)} G(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (\text{II.121})$$

où $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ et f est une fonction continue positive, E_0 homogène, c'est à dire vérifiant $\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$:

$$f(a^{E_0} \boldsymbol{\xi}) = a f(\boldsymbol{\xi}), \quad (\text{II.122})$$

avec E_0 une matrice vérifiant $\text{Tr}(E_0) = 2$ et

$$\int (1 \wedge |\boldsymbol{\xi}|^2) f(\boldsymbol{\xi})^{-2(H_0+1)} d\boldsymbol{\xi} < +\infty. \quad (\text{II.123})$$

Si f n'est pas radiale, le champ Gaussien n'est pas isotrope. On a choisi pour f d'utiliser deux paramètres reliés à l'anisotropie et la rotation :

$$f_{\theta_0, \alpha_0}(\boldsymbol{\xi}) = (|\zeta_1|^{1/\alpha_0} + |\zeta_2|^{1/(2-\alpha_0)}),$$

avec $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2) = R_{\theta_0} \boldsymbol{\xi}$ et R_{θ_0} la matrice de rotation définie par :

$$R_{\theta_0} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) & -\sin(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{pmatrix}.$$

Dans ce modèle, $E_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & 2 - \alpha_0 \end{pmatrix}$, $0 < \alpha_0 < 1$. Notons que $\alpha = 1$ correspond à un champ isotrope, et que $1 < \alpha < 2$ revient à échanger les rôles des axes horizontaux et verticaux.

Le terme $G(\boldsymbol{\xi})$ correspond à la transformée de Fourier de la fonction $g(\mathbf{x})$ défini par :

$$g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\omega(\mathbf{x})} dW(\mathbf{x}) \quad (\text{II.124})$$

où dW correspond à une mesure de Wiener et où $\omega(\mathbf{x})$ est un processus aléatoire gaussien stationnaire ω , dont la fonction de covariance est définie

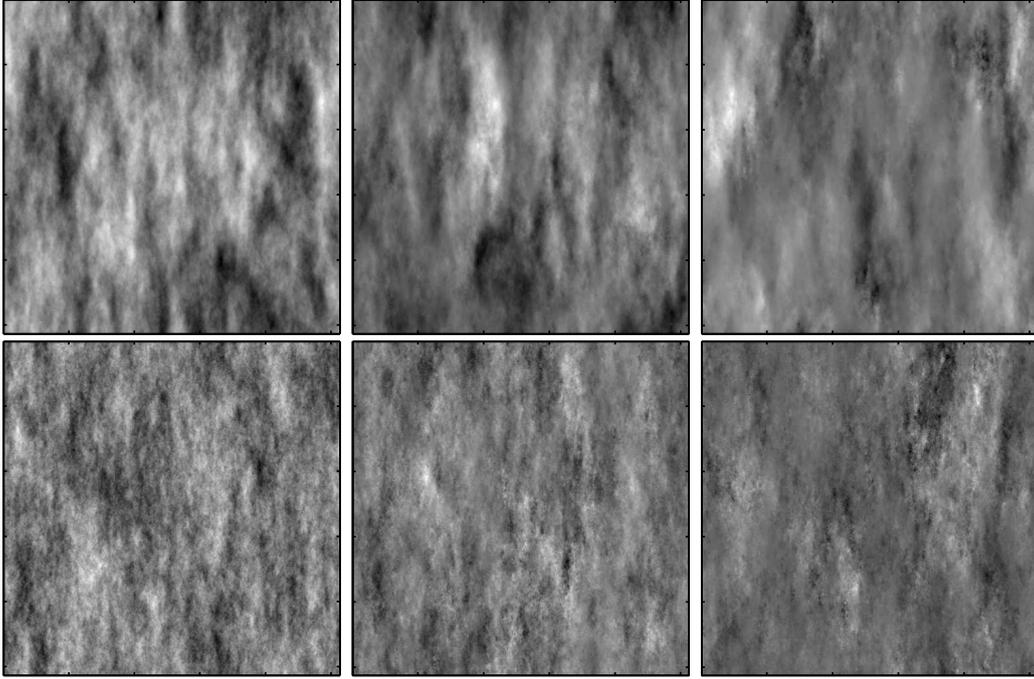


FIGURE II.15 – **Champs multifractals anisotropes.** Processus $X_{\alpha_0, H_0, \lambda}$ (équation II.121) avec $\alpha_0 = 0.8$, $H_0 = 0.7$ (en haut) et $H_0 = 0.3$ (en bas). De gauche à droite : $\lambda = 0$ (monofractal), $\lambda = \sqrt{0.025}$ et $\lambda = \sqrt{0.05}$. Figure extraite de [91].

comme

$$\text{cov}(\omega(\mathbf{x}), \omega(\mathbf{y})) = -\lambda_0^2 \log(f_{\theta_0, \alpha_0}(\mathbf{x} - \mathbf{y})). \quad (\text{II.125})$$

Le paramètre λ_0 qui entre dans la définition de cette covariance contrôle les propriétés multifractales de $X_{\alpha_0, H_0, \lambda_0}$. On y fait souvent référence en parlant de paramètre de multifractalité ou d'écart à la monofractalité. Quand $\lambda_0 \rightarrow 0$, les bruits ω et e^ω se décorrèlent. Le modèle devient équivalent au processus défini dans [89, 90] et $X_{\alpha_0, H_0, \lambda_0=0}(\mathbf{x})$ est alors gaussien autosimilaire anisotrope et vérifie [90]

$$\forall a > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, : \{X_{\alpha_0, H_0, 0}(a^{E_0} \mathbf{x})\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{a^{H_0} X_{\alpha_0, H_0, 0}(\mathbf{x})\}, \quad (\text{II.126})$$

où $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ représente l'égalité en loi. Si $\lambda_0 > 0$, le processus est alors multifractal anisotrope au sens où l'exposant de Hölder anisotrope, $h_{\alpha_0}(\mathbf{x}_0)$, dépend de \mathbf{x}_0 . La figure II.14 présente des exemples de champ monofractals obtenus pour différentes valeurs des paramètres. Pour comparaison, la figure II.15 présente différents champs multifractals anisotropes.

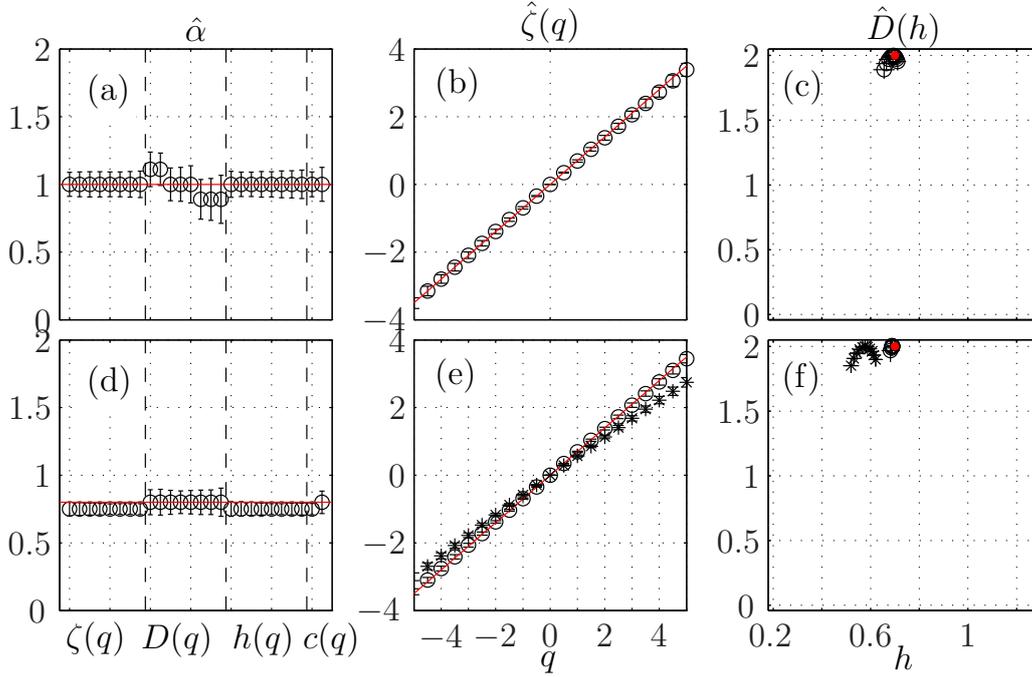


FIGURE II.16 – **Formalisme anisotrope sur processus monofractal.** (a-c) processus isotrope et (d-f) anisotrope. (a et d) Différents estimés du paramètre d’anisotropie. (b) et (e) Estimé final du spectre $\zeta(q, \hat{\alpha})$ où $\hat{\alpha}$ est la valeur moyenne des estimés obtenus en (a) et (d). (c) et (f) Estimé final du spectre multifractal $D(h)$. Les symboles \star dans (e) et (f) représentent les estimations des spectres dans la direction $\hat{\alpha} = 1$. Les courbes en rouge représentent les valeurs théoriques. Les barres d’erreurs représentent l’écart-type des estimés obtenu pour 100 réalisations de processus de taille 1024×1024 .

Comportement des coefficients HWT. Si on suppose que l’angle θ_0 est connu égal à 0 et que $\lambda_0 = 0$, alors, comme le processus est gaussien, on peut montrer que [92, 93, 84] :

$$d_{X_{\alpha_0, H_0, \theta_0}}(\mathbf{k}, \mathbf{j})| \approx 2^{\frac{j_1 + j_2}{2}} 2^{-(H_0 + 1) \min(\frac{j_1}{\alpha_0}, \frac{j_2}{2 - \alpha_0})}, \quad (\text{II.127})$$

Ce résultat se généralise alors au cas multifractal, $\lambda_0 > 0$ de la manière suivante :

$$d_{X_{\alpha_0, H_0, \theta_0}}(\mathbf{k}, \mathbf{j})| \approx 2^{\frac{j_1 + j_2}{2}} 2^{-(h_{\alpha_0}(\mathbf{x}_0) + 1) \min(\frac{j_1}{\alpha_0}, \frac{j_2}{2 - \alpha_0})}. \quad (\text{II.128})$$

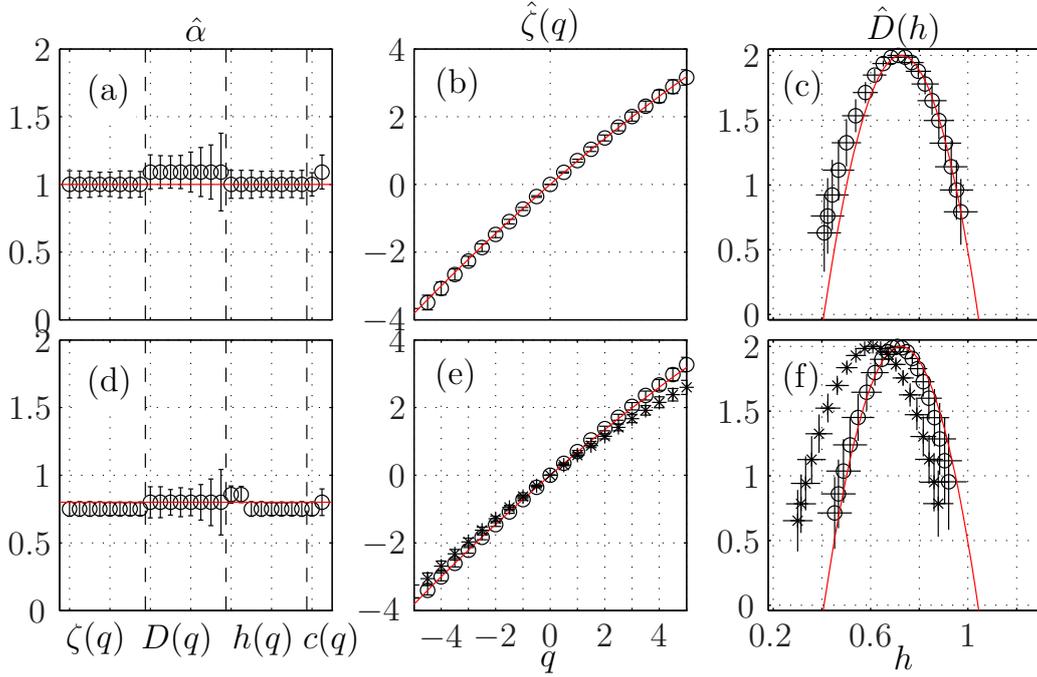


FIGURE II.17 – **Formalisme anisotrope sur processus multifractal.** (a-c) processus isotrope et (d-f) anisotrope. (a et d) Différents estimés du paramètre d’anisotropie. (b) et (e) Estimé final du spectre $\zeta(q, \hat{\alpha})$ où $\hat{\alpha}$ est la valeur moyenne des estimés obtenus en (a) et (d). (c) et (f) Estimé final du spectre multifractal $D(h)$. Les symboles \star dans (e) et (f) représentent les estimations des spectres dans la direction $\hat{\alpha} = 1$. Les courbes en rouge représentent les valeurs théoriques. Les barres d’erreurs représentent l’écart-type des estimés obtenu pour 100 réalisations de processus de taille 1024×1024 .

Dans la direction $\mathbf{j} = (\alpha j, (2 - \alpha)j)$, on obtient alors :

$$d_{X_{\alpha_0, H_0, \theta_0}}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \approx 2^{-j((h_{\alpha_0}(\mathbf{x}_0)+1) \min(\frac{\alpha}{\alpha_0}, \frac{2-\alpha}{2-\alpha_0})-1)}, \quad (\text{II.129})$$

où $h_{\alpha_0}(\mathbf{x}_0)$ est l’exposant de Hölder anisotrope qui est ici une variable aléatoire log-normale de moyenne $H_0 + \lambda^2$ et d’écart-type λ^2 . Les spectres multifractals sont alors :

$$D_{\alpha_0}(h) = 2 - (h - H_0 - \lambda^2)^2 / \lambda^2; \quad (\text{II.130})$$

$$\zeta_{\alpha_0}(q) = qH_0 - \lambda^2 q(q - 2) / 2. \quad (\text{II.131})$$

On remarquera ici, que les processus générés sont tels que $h_{\alpha}(\mathbf{x}_0) =$

$(h_{\alpha_0}(\mathbf{x}_0) + 1) \min(\frac{\alpha}{\alpha_0}, \frac{2-\alpha}{2-\alpha_0}) - 1$ prend des valeurs négatives pour certaines valeurs de α . Or on a vu que pour une fonction localement bornée on a, équation II.104, $h_\alpha(\mathbf{x}_0) = h_{\alpha_0}(\mathbf{x}_0) \min(\frac{\alpha}{\alpha_0}, \frac{2-\alpha}{2-\alpha_0}) > 0, \forall \alpha$. Le formalisme multifractal à partir des coefficients dominants de la transformée hyperbolique n'est donc pas adapté. Comme dans le cas isotrope, pour avoir $h_\alpha(\mathbf{x}_0) > 0, \forall \alpha$, on travaille sur une pseudo intégration fractionnaire d'ordre s de l'image, $\tilde{\mathcal{I}}^s f$. En absence de singularité oscillante on peut inférer que le spectre de singularité anisotrope sera seulement translaté de s :

$$D_{\alpha_0}^{\tilde{\mathcal{I}}^s f}(h) = D_{\alpha_0}^f(h + s). \quad (\text{II.132})$$

On peut alors modifier la définition des coefficients dominants en posant [55]

$$d'_X(\mathbf{k}, \mathbf{j}) = 2^{\frac{(j_1+j_2)s}{2}} d_X(\mathbf{k}, \mathbf{j}), \quad (\text{II.133})$$

et en remplaçant équation II.106 par

$$L_X(\mathbf{k}, \mathbf{j}) = 2^{-\frac{(j_1+j_2)s}{2}} \sup_{\mathcal{X} \subset 3^{2\lambda}(\mathbf{k}, \mathbf{j})} |d'_X(\mathcal{X})|. \quad (\text{II.134})$$

Cette définition permet de généraliser le formalisme multifractal anisotrope pour tous les exposants $h_\alpha(\mathbf{x}_0)$ négatifs tels que $\beta > -\min_{\mathbf{x}, \alpha}(h_\alpha(\mathbf{x})) > 0$. Les résultats du formalisme multifractal anisotrope obtenus sur 100 réalisations de taille 1024×1024 sont présentés figure II.16 pour des processus monofractals et figure II.17 pour des processus multifractals. Ces résultats montrent clairement une bonne estimation du paramètre d'anisotropie ainsi que des différents spectres multifractals. L'estimation de ces spectres par le formalisme isotrope correspond à l'estimation obtenue dans la direction $\hat{\alpha} = 1$. Cette estimation est représentée par les symboles (\star) dans les figures II.16 (e)-(f) et II.17(e)-(f). On voit clairement que cette estimation est biaisée si le processus est anisotrope.

L'étude du cas monofractal anisotrope a été effectué dans [92, 93, 84] où nous proposons une procédure d'estimation conjointe des trois paramètres $(\theta_0, H_0, \alpha_0)$. Cette procédure, illustrée figure II.18, est rendu possible en remarquant que l'angle θ_0 de construction correspond en fait à l'angle où l'anisotropie est minimum (ou maximum). L'étude théorique du cas multifractal est en cours de réalisation et une étude numérique préliminaire [91] a été publiée. La procédure d'estimation de l'angle de construction θ_0 est facilement généralisable au cas multifractal. Ainsi, la transformée hyperbolique en ondelettes nous permet d'estimer conjointement tous les paramètres de notre modèle multifractal anisotrope avec une matrice d'anisotropie E_0 diagonale.

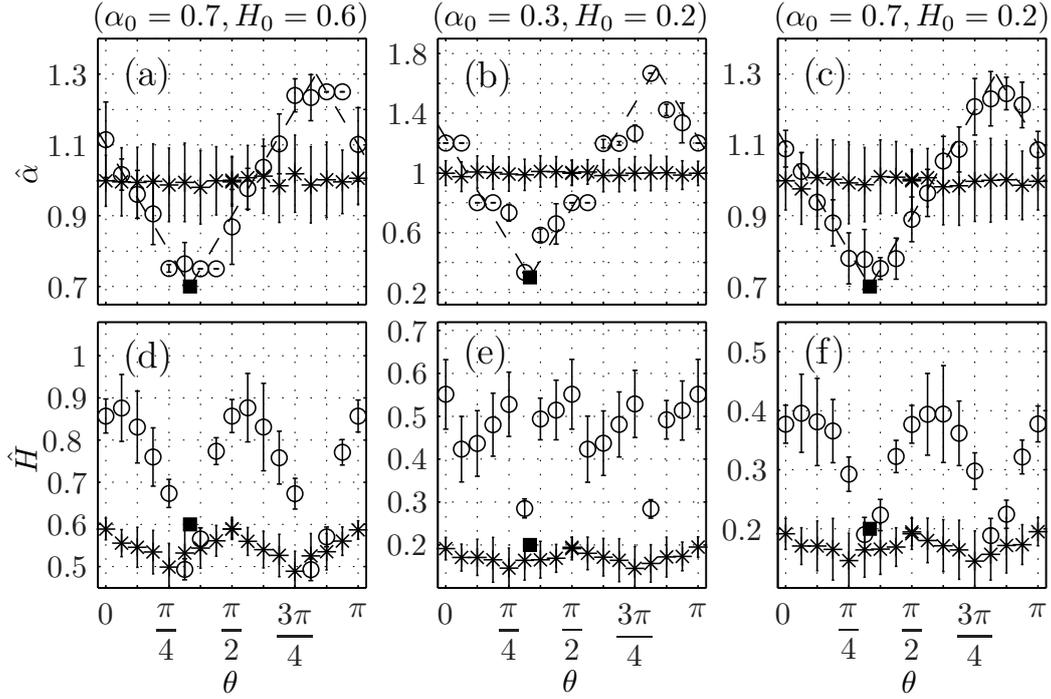


FIGURE II.18 – **Formalisme anisotrope : procédure d'estimation des 3 paramètres.** Estimation de $\hat{\alpha}$ (en haut) et \hat{H} (en bas) pour trois processus différents $X_{\theta_0, \alpha_0, H_0}$ avec $\theta_0 = \pi/3$ et $(\alpha_0, H_0) = (0.7, 0.6)$ ((a) et (d)); $(\alpha_0, H_0) = (0.3, 0.2)$ ((b) et (e)); $(\alpha_0, H_0) = (0.7, 0.2)$ ((c) et (f)). La ligne discontinue représente le comportement théorique attendu pour $\hat{\alpha}$ versus θ . L'estimation de $\hat{\theta}$ correspond à la position du minimum de $\hat{\alpha}(\theta)$. L'estimation finale de α_0 et de H_0 , obtenue par $\hat{\alpha}^* = \hat{\alpha}(\hat{\theta})$ et $\hat{H}^* = \hat{H}(\hat{\theta})$, est en bon agrément avec les valeurs théoriques (■). Pour comparaison, les résultats obtenus pour des champs isotropes ($\alpha_0 = 1$), avec les mêmes paramètres de rugosité H_0 sont aussi représentés (★). Les barres d'erreur correspondent à $\sigma_{\hat{H}}$ (resp. $\sigma_{\hat{\alpha}}$) obtenues par simulation Monte Carlo. Figure extraite de [84].

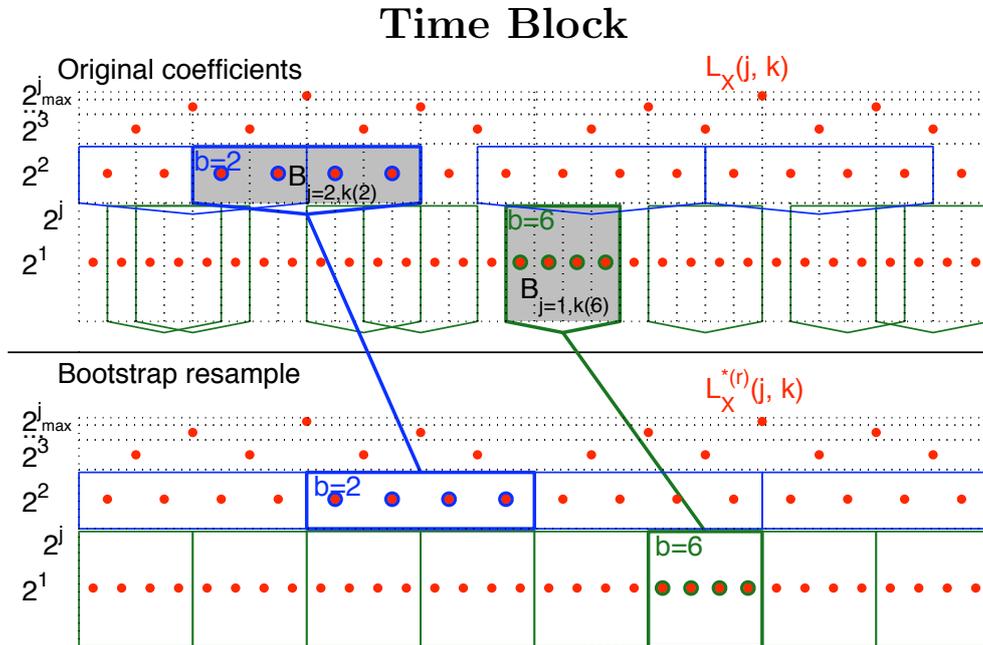


FIGURE II.19 – **Procédure de bootstrap par bloc.** En haut : demi plan espace-échelle des coefficients dominants de la transformée en ondelettes dyadique 1D. Le rééchantillonnage bootstrap consiste à reconstruire le demi plan espace-échelle, en utilisant pour chaque échelle indépendamment des blocs temporels de coefficients dominants. La taille des blocs est indépendante de l'échelle.

Si la matrice E_0 n'est pas diagonale nos procédures permettent de mettre en évidence l'anisotropie mais ne permet plus de déterminer les paramètres d'anisotropie et d'invariance d'échelle avec précision.

II.6 Estimation de variance : l'échantillonnage bootstrap

Dans les applications, il est important de pouvoir donner des barres d'erreurs aux différents estimés. Si on a accès à plusieurs réalisations du même processus, on peut calculer une variance et avec une hypothèse sur la distribution des estimés (généralement l'hypothèse Gaussienne) on peut donner des intervalles de confiance. En l'absence de plusieurs réalisations, ceci est impossible sans hypothèse sur l'image analysée. Nous proposons d'utiliser une procédure non paramétrique de bootstrap dans le domaine des coefficients en ondelettes dyadiques ou hyperboliques. Une procédure bootstrap consiste à

utiliser les échantillons plusieurs fois par tirage aléatoire avec remise. Cette procédure permet ainsi d'estimer tout un ensemble de distributions utilisées pour construire des intervalles de confiance ou définir des tests statistiques [94, 95].

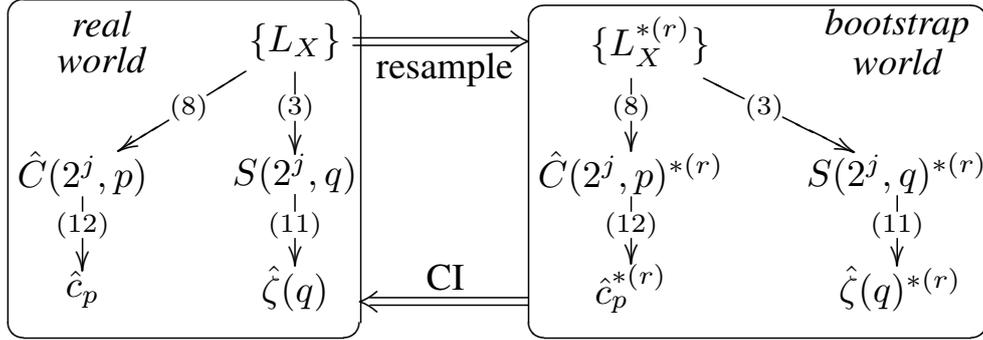


FIGURE II.20 – **Estimation et estimation bootstrap.** Schéma des procédures d'estimation (à gauche) et schéma d'estimation bootstrap (à droite). La flèche "resample" correspond à l'échantillonnage bootstrap par bloc et "CI" au calcul des intervalles de confiance à partir de la distribution empirique des estimés bootstrap. Ce schéma peut être présenté de la même manière pour $h(q)$ et $d(q)$. Cette figure est extraite de [57].

Echantillonnage bootstrap de la transformée en ondelettes.

L'échantillonnage bootstrap de la transformée en ondelettes a été proposé et étudié en dimension une et deux dans [57, 96, 97, 55] et généralisé à la transformée hyperbolique en ondelettes dans [86]. Comme les coefficients en ondelettes à une échelle donnée ne sont pas des variables aléatoires indépendantes mais possèdent une corrélation résiduelle, une procédure de bootstrap par bloc est utilisée. Pour chaque échelle \mathbf{j} , avec $\mathbf{j} = j$ pour la transformée dyadique et $\mathbf{j} = (j_1, j_2)$ pour la transformée hyperbolique, des blocs de taille l sont tirés aléatoirement parmi les $d(\mathbf{k}, \mathbf{j})$ avec remise pour obtenir un nouvel ensemble de coefficients à l'échelle \mathbf{j} . On effectue cette procédure pour chaque échelle accessible jusqu'à l'obtention d'une transformée bootstrap $d^*(\mathbf{k}, \mathbf{j})$. Cette procédure, effectuée sur les coefficient dominants 1D, est illustrée figure II.19. En dimension d supérieure à 1, la procédure est identique avec des blocs de dimension d . Ensuite, à partir de ces échantillonnages bootstrap, on calcule l'ensemble des fonctions de partition du formalisme multifractal isotrope II.69 ou anisotrope II.115. Par régression linéaire on obtient alors les estimés bootstrap $\hat{\zeta}^*(q)$, $\hat{h}^*(q)$, $\hat{d}^*(q)$ et $\hat{c}^*(p)$ et $\hat{\alpha}^*$ pour

le formalisme anisotrope. On répète ces opérations R fois et on obtient ainsi R estimés à partir desquels la variance peut être estimée. Cette procédure est illustrée figure II.20. La taille l des blocs n'a pas besoin de dépendre de l'échelle j et peut être petite [57]. En effet, les corrélations des coefficients en ondelettes sont significatifs sur un intervalle dépendant seulement de l'échelle et du support de l'ondelette. Comme dans [57] nous prendrons l de l'ordre de deux fois le support de l'ondelette mère, c'est à dire $l = 6$ pour une ondelette mère *Daubechies3*.

Taux de couverture (centrée) ($N = 1024$)						
	DWT			LWT		
Est	FBM	LN	LP	FBM	LN	LP
$\zeta(-2)$				79.4	76.4	80.8
$\zeta(-1)$				79.8	75.0	82.0
$\zeta(1)$	91.8	88.4	89.0	79.0	75.6	82.6
$\zeta(2)$	88.8	86.4	89.2	78.6	73.6	81.2
c_1	94.4	88.2	88.2	78.8	75.2	81.0
c_2	87.8	89.2	89.8	82.0	80.0	81.2
c_3		88.6	88.2		79.8	83.0

TABLE II.1 – **Estimation des performance de l'échantillonnage bootstrap.** Taux de couverture (méthode des percentile) pour l'échantillonnage bootstrap effectué sur les coefficients en ondelettes (gauche) et les coefficients dominants (droite). La colonne de droite identifie les différents estimés. (Note : $c_1 = 0.7$ (FBM); $\{c_1, c_2\} = \{0.512, 0.025\}$ (CMC LN); $\{c_1, c_2, c_3\} = \{0.538, 0.08, 0.014\}$ (CMC LP)).

II.6.1 Test de multifractalité.

Pour déterminer la précision de l'estimateur $\hat{\theta}$ d'un paramètre θ , on utilise souvent la notion d'intervalle de confiance. On estime un intervalle, généralement centré sur l'estimateur $\hat{\theta}$ et contenant la vraie valeur du paramètre, avec un niveau de confiance fixé. Les résultats obtenus en dimension 1, pour $\theta \in \{\zeta(q), c_p\}$ sont présentés table II.1 pour les coefficients en ondelettes et les coefficients dominants pour une couverture cible de 90%. Pour les coefficients en ondelettes les performances du bootstrap sont excellentes. La couverture est très proche de la cible avec un erreur de moins de 5% pour $\zeta(q)$ et c_p et tous les processus étudiés :

- le mouvement brownien fractionnaire (FM) [98]. Pour ces processus on a $\zeta(p) = Hp$, $c_1 = H$ et $c_p = 0$, $\forall p \geq 2$. Le processus est donc monofractal.
- les cascades multiplicatives à la Mandelbrot avec des poids log-normaux (CMC LN) [1]. Ces cascades sont ensuite intégrées fractionnairement avec un ordre $\eta > 0$ et on obtient $\zeta(p) = (\eta + c_1)p + c_2 p^2/2$ avec c_1 et c_2 différents de 0 et $c_p = 0 \forall p \geq 3$.
- les cascades multiplicatives à la Mandelbrot avec des poids log-Poisson (CMC LP) [1]. Les poids $s = 2^\gamma \exp(\ln(\beta)\pi_\lambda)$, où π_λ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = -\frac{\gamma \ln(2)}{(\beta-1)}$. Ces cascades sont ensuite intégrées fractionnairement avec un ordre $\eta > 0$. On a alors $\zeta(q) = (\eta - \gamma)q + \frac{\gamma(\beta^q - 1)}{\beta - 1}$, $c_1 = \eta + \gamma \left(\frac{\ln(\beta)}{\beta - 1} - 1 \right)$ and $c_p = -\frac{\gamma}{\beta - 1} (-\ln(\beta))^p$.

Pour les coefficients dominants les performances sont un peu moindres avec une erreur d'à peu près 9%. Ces résultats montrent que les intervalles de confiance obtenus par bootstrap sont très similaires aux intervalles obtenus par Monte-Carlo. On définit alors le test suivant :

$$\mathcal{H}_0 : c_p = 0, \text{ et } \mathcal{H}_A : c_p \neq 0. \quad (\text{II.135})$$

Pour plus de détails sur ce test et ses performances à une dimension nous renvoyons le lecteur à [96, 57, 97] et pour la dimension deux à [55].

II.6.2 Test d'anisotropie.

En utilisant l'échantillonnage bootstrap de la transformée hyperbolique en ondelettes on peut définir un test à partir des intervalles de confiance obtenus sur l'estimé du paramètre d'anisotropie $\hat{\alpha}$. Fig. II.21 compare l'écart-type de \hat{H} (gauche) and $\hat{\alpha}$ (droite) obtenu pour 100 réalisations Monte Carlo de différents champs monofractals anisotropes (équation II.121) de taille $2^{10} \times 2^{10}$ avec l'écart-type obtenu par les procédures bootstrap (avec $R = 100$ pour chacune des 100 simulations Monte Carlo. Cette figure montre que les rapports $\sigma_{\text{BS}}(\hat{H})/\sigma_{\text{MC}}(\hat{H})$ et $\sigma_{\text{BS}}(\hat{\alpha})/\sigma_{\text{MC}}(\hat{\alpha})$ ne dépendent pas de α_0 ou de H_0 reste proche de 1 avec une légère surestimation pour de 10 à 20% pour $\sigma_{\text{BS}}(\hat{H})$. Ces résultats montrent que l'estimation de la variance par bootstrap donne une très bonne approximation de la vraie variance de \hat{H} et $\hat{\alpha}$.

On peut alors définir un test d'isotropie en posant l'hypothèse nulle et l'alternative suivante :

$$\mathcal{H}_0 : \alpha_0 - 1 = 0, \text{ et } \mathcal{H}_A : \alpha_0 - 1 \neq 0. \quad (\text{II.136})$$

La procédure de test est alors la suivante :

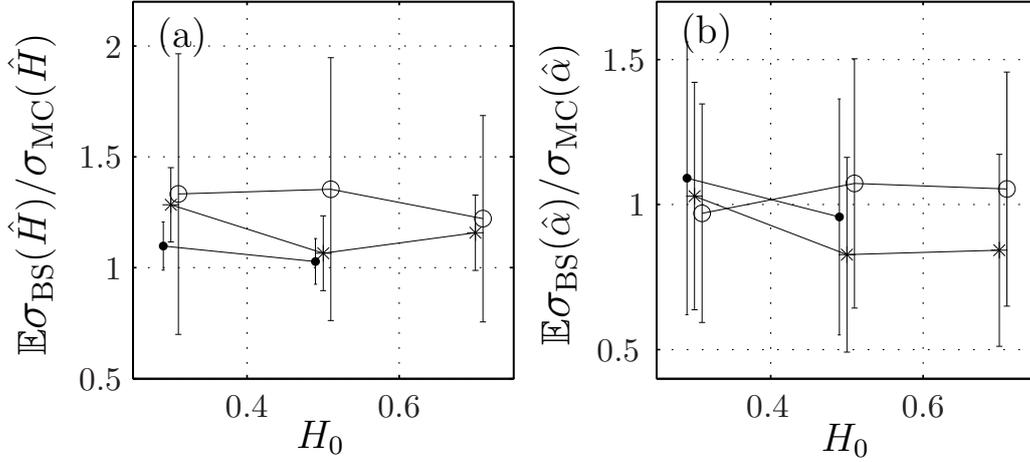


FIGURE II.21 – **Ecart-type Monte Carlo versus bootstrap.** (a) Estimations de $\mathbb{E}\sigma_{\text{BS}}(\hat{H})/\sigma_{\text{MC}}(\hat{H})$ en fonction de H_0 , pour $q = 2$, obtenues pour $R = 100$ bootstraps appliqués à chacune des 100 réalisations indépendantes du processus monofractal (équation II.121) $X_{0,\alpha_0,H_0,\lambda_0=0}$ (de taille $(2^{10}, 2^{10})$), avec les paramètres $\alpha_0 = 1$ (\circ), $\alpha_0 = 0.8$ ($*$) and $\alpha_0 = 0.6$ (\cdot). (b) Estimations de $\mathbb{E}\sigma_{\text{BS}}(\hat{\alpha})/\sigma_{\text{MC}}(\hat{\alpha})$ en fonction de H_0 , pour $\alpha_0 = 1$ (\circ), $\alpha_0 = 0.8$ ($*$) and $\alpha_0 = 0.6$ (\cdot). Figure extraite de [84].

- on estime $\hat{\alpha}$;
- on applique l'échantillonnage bootstrap et on construit la distribution des estimés $\hat{\alpha}$ à partir des estimés bootstrap $\hat{\alpha}^{*,r}$, $r = 1, \dots, R$.
- On choisit le seuil de signification δ .
- En supposant une distribution Gaussienne, on utilise l'écart-type obtenu par bootstrap pour définir l'intervalle de confiance $[-t_{\delta/2}\sigma^*, t_{\delta/2}\sigma^*]$ où $t_{\delta/2}$ représente le $\delta/2$ -th quantile d'une variable Gaussienne centrée d'écart-type unité.
- La p -value du test est mesurée comme le minimum de $P(\hat{\alpha}^* < \hat{\alpha}(\hat{\theta}))$ et $1 - P(\hat{\alpha}^* > \hat{\alpha}(\hat{\theta}))$, divisée par 2.

Figures II.22a) et II.22b) comparent les histogrammes des estimés de α_0 obtenus sur 100 réalisations de taille $2^{10} \times 2^{10}$ du processus $X_{\theta_0=0,\alpha_0,H_0,\lambda_0=0}$ (eq. II.121) avec ceux obtenus sur une unique réalisation en utilisant 100 estimés bootstrap $\hat{\alpha}^*$. Pour les deux cas, isotrope ($\alpha_0 = 1$) et anisotrope ($\alpha_0 = 0.75$), les distributions sont très similaires. Figure II.22c) présente le taux de rejet de notre test pour une valeur du seuil de signification $\delta = 0.9$ et pour différentes valeurs des paramètres. Quand $\alpha_0 = 1$, le processus est isotrope et le taux de rejet β reproduit bien le taux de signification prescrit $1 - \delta = 0.1$. Quand $\alpha_0 \neq 1$, la puissance du test augmente très rapidement et

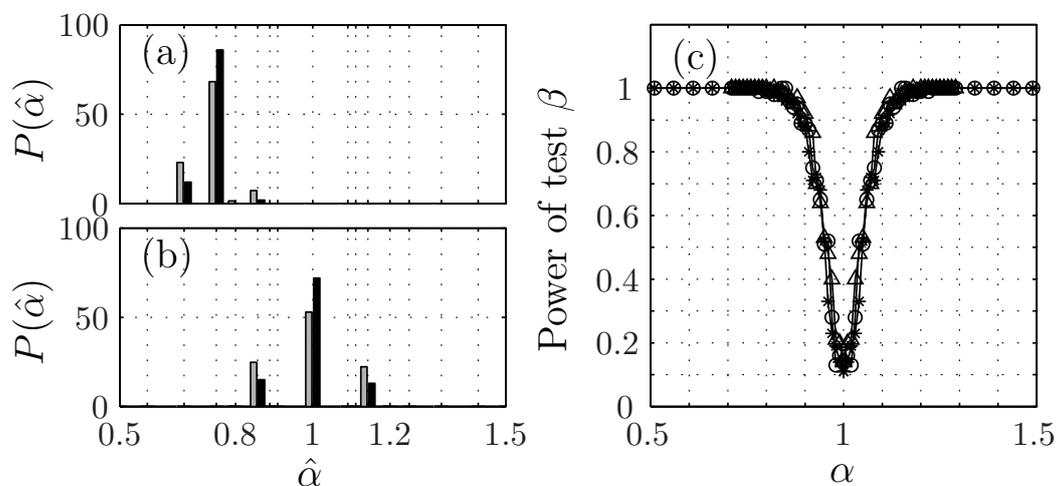


FIGURE II.22 – **Test d’anisotropie.** a) Histogramme de $\hat{\alpha}_{MC}$ (gris clair) et de $\hat{\alpha}_{BS}$ (noir) pour les processus $X_{0,\alpha_0,H_0,\lambda_0=0}$ (de taille $(2^{10}, 2^{10})$), avec $\alpha_0 = 0.75$ (a) et $\alpha_0 = 1$ (b). (c) Taux de rejet du test (avec un taux de signficance de 90%) obtenu pour $R = 100$ bootstraps, et moyenné sur 100 réalisations de $X_{0,\alpha_0,H_0,\lambda_0=0}$, avec $H_0 = 0.3$ (\circ), 0.5 (Δ) et 0.7 (∇). Figure extraite de [84].

montre ainsi le fort potentiel de ce test pour détecter une anisotropie et ceci même si α_0 est très proche de 1. Il est intéressant de noter que la puissance du test semble indépendante de la la valeurs de H_0 . L’analyse des performances de ce test, dans le cas où les processus sont monofractals, est étudiée en détail dans [84].

Chapitre III

Applications

III.1 Turbulence pleinement développée

Mon travail dans ce domaine a été le fruit de nombreuses collaborations au sein du laboratoire de physique : L. Chevillard, A. Arneodo, l'équipe sisyph (B. Castaing, P. Abry) mais aussi l'équipe Non-Linéaire et Hydrodynamique (E. Lévêque, N. Mordant, J.F. Pinton).

La turbulence pleinement développée concerne l'étude du comportement des écoulements turbulents tridimensionnels incompressibles aux très grands nombres de Reynolds [4]. Ces écoulements possèdent une très grande hiérarchie d'échelles, comprises entre l'échelle de production de l'énergie qui est déterminée par les conditions extérieures à l'écoulement (échelle intégrale), et l'échelle beaucoup plus petite de dissipation d'énergie qui est fixée par la viscosité. Ces écoulements sont censés être gouvernés par les équations de Navier-Stokes. L'étude mathématique de ces équations, et de certaines versions simplifiées (équation d'Euler) est toujours d'actualité notamment lorsque tous les termes sont conservés. Suite à la publication des travaux de A. N. Kolmogorov [99], la communauté des physiciens s'est peu à peu orientée vers une description phénoménologique de la turbulence qui repose généralement sur la notion fondamentale d'invariance d'échelle. C'est Richardson [100] en 1922, qui pour la première fois, fait appel à cette notion en proposant une description de la turbulence par un phénomène de cascade d'énergie : l'énergie cinétique injectée dans le système à grande échelle transite vers les petites échelles selon un processus de cascade par fragmentations successives de structures tourbillonnaires. Cette énergie se dissipe finalement aux petites échelles. Ces idées ont été reformulées et formalisées de manière plus précise par A.N. Kolmogorov [99] en 1941. En supposant la turbulence homogène, isotrope avec un taux de dissipation de l'énergie par unité de masse

constant, Kolmogorov prédit, à la limite des Reynolds infini, l'existence d'une zone inertielle pour laquelle le champ de vitesse Eulérien est statistiquement auto-similaire et caractérisé par un seul exposant de Hölder $h = 1/3$ [4].

Le succès de cette théorie provient de sa très bonne vérification expérimentale mais c'est aussi l'expérience qui a révélé les imperfections de cette théorie, principalement son incapacité à rendre compte du phénomène d'intermittence observé aux petites échelles [101, 102]. En effet, le taux de dissipation ϵ_l , estimé à l'échelle l , n'est pas homogène et présente des bouffées intermittentes d'autant plus importantes que l'échelle l considérée est petite. Ce phénomène contredit ainsi les hypothèses d'homogénéité et d'invariance d'échelle globale du champ de vitesse. Pour rendre compte de ce phénomène d'intermittence Kolmogorov [103] et Obukhov [104] proposent un modèle de cascade multiplicative log-normale qui mène à des propriétés multifractales du champ de vitesse. En 1985, Parisi et Frisch proposent une interprétation du phénomène d'intermittence dans le langage des singularités et du formalisme multifractal [105].

III.1.1 Turbulence Eulérienne

Dans la description log-normale de Kolmogorov [103, 104], le spectre multifractal $D(h)$ est parabolique. Plusieurs autres formes du spectre ont été proposées dans la littérature, parmi lesquelles celles prédites par le "p-modèle" [107], le modèle de She-Lévêque [108], et sa généralisation à la statistique log-Poisson [109, 30] ainsi que le modèle log-Lévy [110, 111, 112]. Les travaux expérimentaux et numériques portant sur l'intermittence dans le domaine inertiel sont nombreux mais aucune approche quantitative du phénomène n'a émergé. Des études cherchant à intégrer le domaine dissipatif dans le cadre du formalisme multifractal apparaissent plus tard [113, 114] et montrent que l'échelle dissipative fluctue d'un point à un autre de l'espace [115, 116, 117, 118, 119]. Ce n'est qu'en 1996, que Meneveau [116] propose une généralisation du formalisme multifractal sur toute l'étendue de la gamme d'échelles, depuis l'échelle intégrale jusqu'au domaine dissipatif profond.

Une grande quantité de travaux expérimentaux ont été entrepris [120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134] pour déterminer avec précision le spectre multifractal $\zeta(q)$ du champ de vitesse Eulérien afin de quantifier l'importance du phénomène d'intermittence. Toutes ces études ont été faites en utilisant comme coefficients multirésolution les incréments d'ordre 1, c'est-à-dire avec l'incrément possédant un seul moment nul. Ma contribution à ce niveau a été d'estimer le spectre multifractal à partir des coefficients multirésolution présentés dans la section précédente. Ces travaux

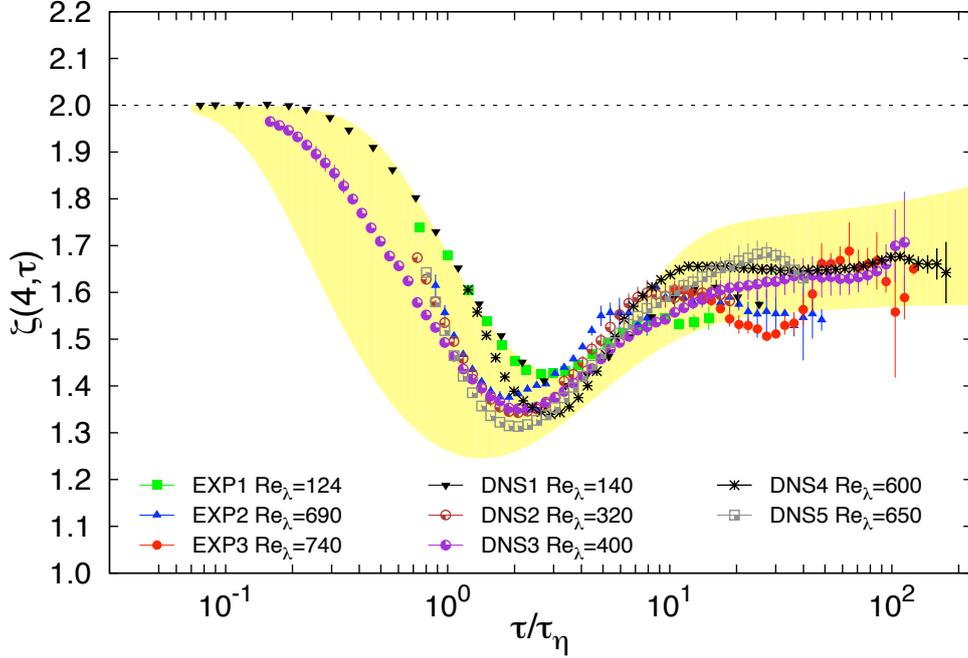


FIGURE III.1 – **Universalité de la turbulence Lagrangienne.** Valeur de $\zeta(q, \tau) = \frac{d \log Z(q, \tau)}{d \log \tau}$ pour $q = 4$ obtenu en utilisant les incréments d'ordre 1 de vitesse Lagrangienne provenant de différentes expériences et simulations. Les échelles temporelles τ sont normalisées par le temps visqueux. La zone de couleur correspond à la zone comprise entre la prédiction obtenue en utilisant le formalisme multifractal et le spectre multifractal de la vitesse Eulérienne longitudinale et transverse. Les pointillées correspondent à la valeur de $\zeta(q = 2) = 2$ obtenue dans le domaine dissipatif où la vitesse est dérivable. Figure extraite de [106].

[28, 135, 136, 137, 138] ont permis de déterminer la totalité des spectres multifractals du champ de vitesse Eulérien et de montrer la robustesse des résultats en fonction du nombre de moments nuls de la fonction analysante. Nous avons montré [139, 135, 25, 140] qu'une cascade abstraite de type log-normale décrivait très bien la statistique des coefficients multirésolution des données : l'évolution des densités de probabilité des coefficients multirésolution à travers les échelles est bien décrite par l'équation II.27 avec un propagateur Gaussien. Nous avons confirmé qu'une valeur de $(c_1, c_2) = (0.37, -0.025)$ décrivait très bien les données obtenues à différents nombres de Reynolds dans différentes configurations (soufflerie ou jet) [28, 138, 135]. Ces valeurs de paramètres donne $\zeta(q = 3) = 1$, valeur prédite théoriquement mais ex-

périmentalement difficile à obtenir à cause des effets de Reynolds fini et aux effets d'anisotropie à grandes échelles (proche de l'échelle intégrale) [119].

III.1.2 Turbulence Lagrangienne

La turbulence Lagrangienne consiste à étudier le flot turbulent à travers les observables (vitesse, pression, dissipation ...) de chaque particule constituant le flot. Les mesures Lagrangiennes de vitesse sont beaucoup plus récentes que les mesures Eulériennes et ont été réalisées par deux équipes expérimentales, l'une aux USA et l'autre à l'ENS Lyon. La première équipe à avoir réalisé une mesure Lagrangienne de vitesse à grand nombre de Reynolds est celle de Bodenschatz à l'université de Cornell [141, 142, 143, 144]. Cette équipe est parvenue à mesurer l'accélération Lagrangienne. La deuxième expérience a été réalisée par N. Mordant à l'ENS de Lyon [145, 146, 147, 148, 149]. En utilisant l'effet Doppler, cette expérience permet d'accéder à la vitesse des billes placées dans l'écoulement en fonction du temps.

J'ai participé à l'analyse des données obtenus par l'équipe de l'ENS Lyon [150, 151, 152, 106, 153] ainsi qu'à l'analyse de données provenant de multiples simulations numériques. En suivant les travaux de Meneveau [116] et Borgas [154] qui généralisent le formalisme multifractal à toutes les échelles pour le champ Eulérien nous montrons de la même manière que le formalisme multifractal permet de décrire toutes les échelles de temps de la turbulence Lagrangienne du temps dissipatif au temps intégral [150]. Les résultats de cette étude sont résumés figure III.1 où nous avons représenté la dérivée du moment d'ordre 4 pour différentes expériences et simulations. Ces courbes sont toutes très similaires et montrent le caractère universel de la turbulence Lagrangienne.

En utilisant l'hypothèse d'ergodicité et l'hypothèse de similarité locale de Kolmogorov, on peut en déduire une relation entre les moments de la vitesse Eulérienne et Lagrangienne [154, 119, 150]. La zone colorée dans la figure III.1, correspond à la zone comprise entre les prédictions utilisant cette relation et le spectre multifractal de la vitesse Eulérienne transverse et longitudinale. L'accord est à nouveau très bon et toutes les courbes se situent dans cette zone. Le spectre multifractal Eulérien $D^E(h)$ et Lagrangien $D^L(h)$ peuvent ainsi être reliés par une équation de la forme [119, 150]

$$D^L(h) = -h + (1+h)D^E\left(\frac{h}{(1+h)}\right). \quad (\text{III.1})$$

Cette relation montre que les spectres Lagrangien et Eulérien ne peuvent pas être tous les deux paraboliques. La figure III.2 montre les spectres La-

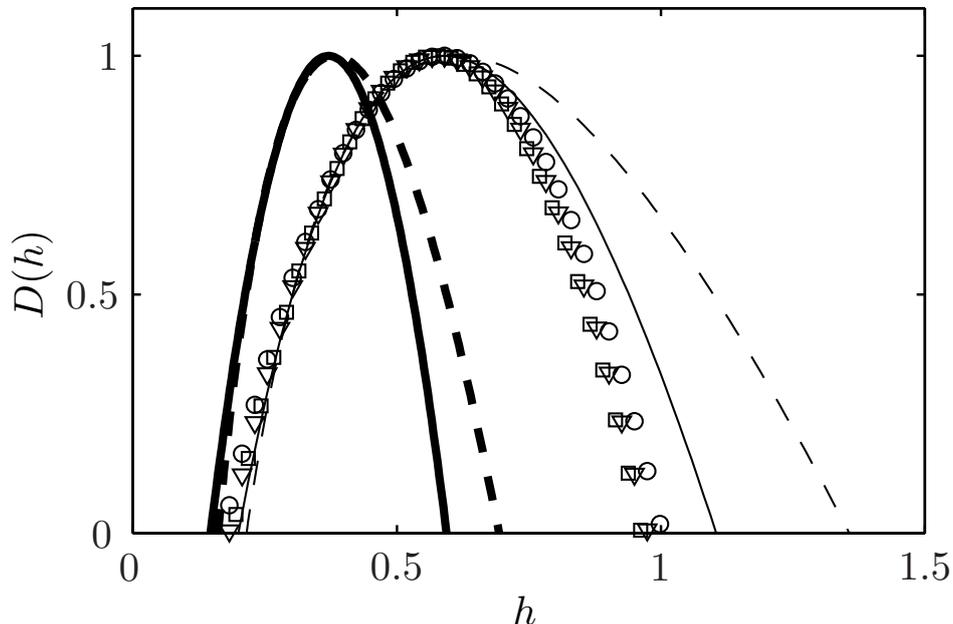


FIGURE III.2 – Représentation des spectres des singularités des vitesses Eulérienne et Lagrangienne. Spectre log-normal Eulérien de paramètre $c_2 = -0.025$ (trait continu épais), ainsi que sa transformée $D^L(h)$ par la relation (III.1) (trait continu fin). Spectre log-Poisson Eulérien (trait discontinu épais), ainsi que sa transformée par la relation (III.1) (trait discontinu fin). Ces spectres $D^L(h)$ obtenus par transformation Euler-Lagrange à partir des spectres $D^E(h)$ sont comparés aux spectres $D^L(h)$ estimés directement à partir de l’analyse des données expérimentales de vitesse Lagrangienne de l’ENS Lyon (□), des données expérimentales d’accélération de l’université de Cornell (△) et des données numériques de vitesse Lagrangienne de l’ENS Lyon (○). Figure extraite de [150].

grangien, obtenus pour différentes données expérimentales et numériques, comparés aux spectres Lagrangien obtenus par l’équation III.1 avec le spectre $D(h)$ log-normal et log-poisson. L’accord pour les singularités les plus fortes (c’est à dire les valeurs de h les plus petites) est excellent. Par contre pour la partie décroissante du spectre l’accord est moins bon. L’analyse multifractale basée sur les maxima du module de la transformée en ondelettes n’a pas pu répondre à cette question : en effet la statistique à disposition est insuffisante et la longueur des traces est trop petite pour obtenir les moments sur toute l’étendue de la zone inertielle.

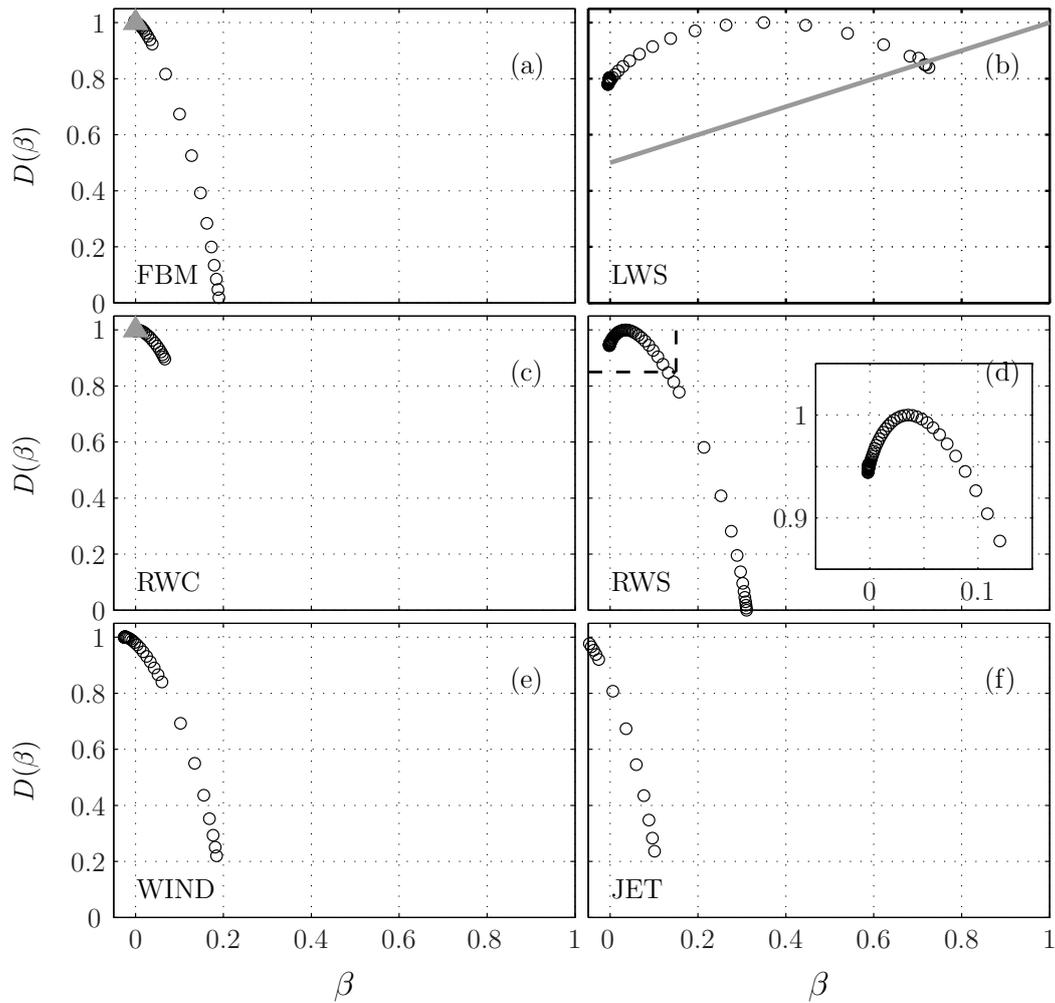


FIGURE III.3 – **Formalisme multifractal pour l'exposant d'oscillation.** appliqué à un brownien fractionnaire (a), une série d'ondelettes lacunaire (b), une cascade sur base d'ondelettes (c), une série sur base d'ondelettes (d) et sur la vitesse turbulente obtenue à la *soufflerie de Modane* (e) et dans l'expérience de *Jet* (f).

III.1.3 Singularités oscillantes

Des analyses qualitatives des équations de Navier-Stokes prédisent que la compétition entre le terme advectif non linéaire et le terme de dissipation entraîne un mécanisme d'étirement des tourbillons qui induit la présence de singularités oscillantes [4, 155]. Suite à ces travaux, des modèles ont été proposés pour décrire la turbulence comme une superposition (en temps et en espace) de singularités oscillantes [156]. Ces modèles sont en contradiction avec les modèles de cascades multiplicatives qui ne présentent pas de singularité oscillante [81]. Nous avons donc appliqué le formalisme multifractal pour l'exposant d'oscillation, présenté section II.4 à des données expérimentales de vitesse turbulente. Deux jeux de données ont été analysés :

- un provenant de la soufflerie de Modane, $R_\lambda \simeq 2000$ [19] ;
- l'autre provenant d'une expérience de turbulence de jet avec de l'hélium à très basse température, $R_\lambda \simeq 1000$ [133].

Nous avons analysé 192 réalisations indépendantes de 2^{17} points pour Modane et 492 pour le jet. Chaque réalisation correspondant à peu près à 2 échelles intégrales. Pour comparaison des résultats nous avons également analysé quatre types de processus en utilisant la même statistique (et même échelle intégrale) que celle accessible pour les données expérimentales de la soufflerie.

- Brownien fractionnaire de paramètre $H = 1/3$ (FBM). Ce processus bien connu est monofractal et ne possède pas de singularité oscillante : le spectre $D(\beta)$ consiste en un point $D(\beta = 0) = 1$.
- Cascade sur base d'ondelettes (RWC) [28, 23], processus multifractal et qui ne possède pas de singularité oscillante. Son spectre d'exposant d'oscillation est donc restreint à un point $D(\beta = 0) = 1$. Nous avons choisi une cascade log-normale de paramètres $(c_1, c_2) = (0.37, -0.025)$, valeurs communément acceptées pour décrire le spectre de vitesse Eulerien.
- Série sur base d'ondelettes (RWS) [157], processus multifractal qui possède des singularités oscillantes presque partout, c'est à dire que $D(\beta) = 1$ pour $\beta > 0$.
- Série d'ondelettes lacunaire (LWS) Son spectre d'oscillation est de la forme $D(\beta) = \gamma(\beta + 1)$, $\beta \in [0, 1/\gamma - 1]$ [158].

Les résultats obtenus sont présentés figure III.3. Pour les processus FBM et RWC, on obtient bien un spectre $D(\beta)$ maximum pour $\beta = 0$. Le spectre, n'est pas réduit à un point mais est beaucoup moins large que ceux observés pour les processus LWS et RWS. De plus pour ces deux derniers processus le maximum du spectre $D(\beta)$ est en $\beta > 0$ indiquant clairement que ces processus possèdent des singularité oscillantes. Pour les données expérimentales de vitesse le maximum du spectre $D(\beta)$ se trouve bien en $\beta = 0$ et même

en $\beta < 0$ pour l'expérience du jet. Ces résultats nous permettent de conclure que le champ de vitesse 1D ne comporte pas de singularité oscillante, conclusion importante pour la modélisation de ce champ. Il serait intéressant dans le futur d'appliquer ce formalisme à un champ de vitesse tridimensionnel pour vérifier ce résultat. Pour plus de détails sur ce travail nous renvoyons le lecteur à [159].

III.2 Analyse 2D d'images satellite de nuage

J'ai appliqué le formalisme multifractal basé sur les maxima du module de la transformée en ondelettes 2D sur des images satellites de nuage strato-cumulus. Ce travail a été fait pendant mon stage post-doctoral en collaboration avec N. Decoster, A. Arneodo et R. Cahalan, A. Davis et A. Marshack du Goddard Space Flight Center à Washington D.C.

L'atmosphère est un laboratoire naturel où la dynamique turbulente à très grand nombre de Reynolds peut être étudiée. Les nuages sont une des manifestations les plus claires de cette dynamique [160, 161, 162, 163]. En modulant les radiations solaires les nuages jouent un rôle important au niveau du climat de la planète [164] et c'est une des sources principales d'incertitude au niveau de la modélisation du climat [165]. En effet, les nuages sont modélisés comme des surfaces homogènes parallèles à la surface de la terre alors qu'il est bien connu qu'ils sont très variables dans toutes les directions et que les concepts de fractal [160, 161] et multifractal [162, 163] semblent pertinents pour décrire leur géométrie. L'intermittence de leur géométrie, non seulement de leurs formes à grandes échelles mais aussi de leur structure interne, a certainement un impact important sur leur propriété de transport radiatif [163, 166, 167]. La structure interne de ces nuages est généralement analysée au travers du contenu en eau (Liquid Water Content - LWC) mesuré le long de la trajectoire de ballon ou d'avion [168, 169, 170, 171, 172, 167] ou à partir d'image satellite de très haute définition [173, 174, 175, 163, 176]. L'analyse multifractale de ces mesures a toujours été faite en une dimension sur LWC [171, 167, 176] ou sur des coupes 1D des images satellites [163] en utilisant comme coefficient multirésolution les incréments d'ordre 1. Ces études concluent que la structure des nuages strato-cumulus est multifractale sur trois décades. Pour décrire les propriétés multifractales de ces mesures, différents modèles ont été proposés avec en particulier les cascades singulières intégrées fractionnairement (FISC) [177, 112] et le *Bounded Cascade model* [178]. L'idée principale de ce *Bounded Cascade model* est d'agir sur les poids de la cascade pour obtenir une continuité aux petites échelles.

Ma contribution dans ce domaine a été d'effectuer la première analyse

multifractale bidimensionnelle des images de nuage [179] en utilisant les coefficients de la transformée en ondelettes continue ainsi que ses maxima du module. Nous avons déterminé pour la première fois les spectres multifractals dans leur totalité. Nous montrons que les spectres du champ de radiance et de profondeur optique sont très similaires et sont très bien modélisés par des spectres log-normal avec $c_1 = 0.38$ et $c_2 = 0.08$. Notre analyse de la statistique des différents coefficients multirésolution montre que le modèle que nous avons proposé, une cascade sur base d'ondelettes 2D [180], décrit beaucoup mieux les données que des modèles FISC ou de *Bounded cascade*. En effet la statistique des coefficients est clairement log-normale et ne dépend pas de l'angle. Ainsi les propriétés multifractales semblent isotropes avec une superposition des rouleaux de convection à grandes échelles. Pour plus de détails sur les différents modèles et sur les résultats, nous renvoyons le lecteur aux papiers [180] et [179].

III.3 Données pluviométriques

Ce travail a été effectué en collaboration avec A. Arneodo, E. Foufoula-Georgiou du laboratoire St. Anthony Falls à Minneapolis ainsi que V. Venugopal de l'Indian Institute of Science à Bangalore.

De nombreuses études ont étudié l'invariance d'échelle des données pluviométriques [177, 181, 182] en utilisant l'analyse spectrale ou le formalisme multifractal basé sur les incréments ou le comptage de boîtes. Nous avons appliqué le formalisme multifractal basé sur les coefficients en ondelettes et leur maxima du module. Nous avons montré [21, 183] que les données présentent une invariance d'échelle à l'intérieur de chaque orage entre des échelles de l'ordre de la minute jusqu'à la durée de l'orage considéré. Le spectre multifractal de ces données est très large avec des valeurs comprises entre $h_{\min} = -0.1$ et $h_{\max} = 1.4$. La valeur de h_{\max} supérieure à 1 suggère que les analyses classiques utilisant des incréments d'ordre 1 sont biaisées. Il faut utiliser des fonctions analysantes avec au moins deux moments nuls pour réussir à mesurer des valeurs de h supérieures à 1. La valeur de h_{\min} étant négative, les méthodes basées sur les maxima du module ou des coefficients dominants sont elles aussi biaisées et il faut donc intégrer fractionnairement les données pour avoir une bonne estimation de ce spectre. Les résultats finaux montrent que la valeur du premier cumulatif $c_1 = 0.99 \pm 0.02$ varie faiblement en fonction de l'orage considéré. Par contre la valeur de c_2 varie de manière plus importante en prenant des valeurs comprises entre 0.26 et 0.38. Ces valeurs sont très importantes et reflètent une très grande dispersion des singularités. La valeur du troisième cumulatif est trouvée très proche de

0 suggérant une modélisation des données par une cascade multiplicative log-normale. L'analyse de la corrélation du logarithme des coefficients multiresolution des données comparée à l'analyse obtenue sur des substituts [184, 185] nous a permis de montrer [186] que les données étaient consistantes avec des modèles intrinsèquement non-linéaires de type cascade multiplicative en contradiction avec le travail de Ferraris [187]. En effet, la corrélation du logarithme des coefficients des données pluviométriques décroît comme pour les cascades multiplicatives avec une pente c_2 contrairement à leur substitut dont la corrélation du logarithme est nulle. Nous renvoyons le lecteur aux papiers [21], [183] et [186] pour plus de détails.

III.4 Invariances d'échelle dans la fracture des matériaux fragiles

Cette section traite du travail fait par Nicolas Mallick pendant sa thèse [188] effectuée sous ma direction et celle de Loic Vanel qui était lui aussi au laboratoire de physique de l'ENS de Lyon dans l'équipe *Physique non linéaire, Hydrodynamique et Turbulence*. On cherchait à mieux comprendre les propriétés de résistance des matériaux du point de vue plus de la physique statistique. En particulier, l'étude statistique des événements précurseurs (micro-fissures) qui se produisent lorsqu'un matériau hétérogène est soumis à une contrainte constante inférieure au seuil de rupture fragile a montré que le processus de fracturation s'apparente à un phénomène critique [189]. Pomeau et Gobulovic [190, 191] ont proposé un mécanisme d'activation thermique pour interpréter la nucléation de micro-fissures, et prédisent un comportement en accord qualitatif avec les expériences. Cependant, les fluctuations thermiques sont trop faibles pour expliquer quantitativement l'ordre de grandeur des temps de rupture [192]. Très récemment, la résolution numérique d'un modèle démocratique de faisceau de fibres (Democratic Fiber Bundle Model) en présence de bruit thermique a permis de mettre en évidence et de quantifier l'influence des hétérogénéités spatiales sur le temps de rupture [193]. Ces processus génèrent des surfaces de fracture dont l'exposant de rugosité peut être mesuré. L'existence d'un exposant unique a été largement débattu [194, 195, 196] et il y a maintenant de nombreux travaux en faveur de l'hypothèse d'un exposant non unique dépendant de l'anisotropie du mécanisme de la fracture [197, 198] de l'anisotropie du matériel [199] ou des effets de taille finie sur les lois d'échelles [200]. Dans le cas de la fracture du papier une étude récente suggère que l'interface est multifractale et ne peut pas être décrite par un exposant de rugosité unique [201]. Cet exposant

TABLE III.1 – Valeur du premier cumulant c_1 pour la fracture rapide et sous critique obtenue en utilisant les incréments, les coefficients en ondelettes et les maxima du module de la transformée en ondelettes (MMTO). Ordre correspond aux nombres de moments nuls de la fonction analysante.

Ordre	Méthode	rapide	sous-critique	Différence
1	Incrément	0.64 ± 0.02	0.70 ± 0.02	0.06 ± 0.01
	Coefficient	0.65 ± 0.02	0.73 ± 0.02	0.07 ± 0.01
	MMTO	0.64 ± 0.01	0.70 ± 0.02	0.06 ± 0.01
2	Incrément	0.66 ± 0.02	0.71 ± 0.02	0.05 ± 0.01
	Coefficient	0.68 ± 0.02	0.73 ± 0.02	0.05 ± 0.01
	MMTO	0.63 ± 0.01	0.67 ± 0.02	0.06 ± 0.01

devient donc local et est équivalent à la notion d'exposant de Hölder. La plupart du temps, l'exposant de rugosité ne semble pas dépendre de la vitesse de la fracture à faible vitesse [202, 203, 204] mais pourrait dépendre de cette vitesse quand celle-ci est grande [205]. La fracture finale serait multifractale dans le sens où l'exposant de rugosité dépendrait de la vitesse et donc du temps. Et comme noté dans [206] il y a très peu d'expériences sur l'influence de la cinétique de la fracture. Nous nous sommes donc intéressé à la rugosité de l'interface d'un papier déchiré sous l'action d'une force constante. Dans une expérience la fracture commence très lentement dans un régime sous critique ($v = 10^{-5} - 10^{-2} \text{ ms}^{-1}$) et atteint après une longueur critique un régime rapide ($v \sim 300 \text{ ms}^{-1}$). Nous avons cherché à déterminer dans un premier temps si l'exposant de rugosité dépendait du type de fracturation : sous critique ou rapide. Dans un second temps nous avons cherché à déterminer si la fracture obtenue dans chaque régime était mono ou multifractale. Nos résultats, publiés dans [207], montrent clairement que dans chaque domaine, sous-critique et rapide, les propriétés de loi d'échelles ne dépendent ni de la force appliquée, ni de la longueur initiale de la fracture. Par contre ces propriétés sont clairement différentes pour les deux régimes. Les valeurs du premier cumulant obtenues avec les différents coefficients multirésolution sont présentées dans le tableau III.1. En ce qui concerne la multifractalité, les résultats ne sont pas clairs : dans le domaine de fracture lente, le cumulant d'ordre 2 est très proche de 0 indiquant un processus monofractal. Par contre dans le domaine de fracture rapide, le manque de statistique se fait clairement sentir et notre étude ne permet pas conclure.

III.5 Ionosphère

Ce travail a été effectué en collaboration avec P. Abry ainsi que P. Koucká Knížová et Z. Mošna de l'Institut de Physique Atmosphérique de l'Académie des Sciences de la République Tchèque à Prague.

L'ionosphère est un système complexe d'un grande intérêt pour la climatologie mais aussi pour les communications radio. Elle représente la partie supérieure de l'atmosphère où la densité d'électrons libres est assez grande pour influencer la propagation des ondes électromagnétiques. Elle présente une grande variabilité sur un grand nombre d'échelles : de la minute jusqu'à l'année. Il est grandement accepté que ses fluctuations sont influencées principalement par l'activité solaire et l'activité géomagnétique mais aussi par des causes météorologiques [208]. Les variations à long terme sont considérées comme une des contributions potentielles au changement climatique global. Les variations à court terme sont importantes car elles influencent significativement les systèmes de navigation et de télécommunication. Beaucoup d'études ont cherché à déterminer les corrélations entre les indices solaires et géomagnétiques aux fluctuations de la ionosphère [209] et de déduire des modèles de prédiction de ces variations [210]. Toutefois notre compréhension de ces phénomènes reste insuffisante et on a besoin d'une caractérisation plus fine. De manière implicite les fluctuations à long terme se réfèrent aux fluctuations sur des temps de l'ordre de l'année souvent bien défini par des périodicités fortes comme la période solaire de 11 ans, la période de 1 année terrestre. Les variations à court terme se réfèrent aux échelles plus petites sans périodicité claire. C'est pour cette raison que nous avons entrepris une analyse des corrélations entre les différents indices et la ionosphère dépendant de l'échelle [211, 212]. En effet au lieu d'analyser les données en utilisant un filtre passe-haut (respectivement passe-bas) avec une échelle de coupure choisie arbitrairement nous analysons les données à travers les corrélations de leurs coefficients en ondelettes continue ainsi que par leurs comportements en lois de puissance. Ceci nous a permis de retrouver le fait bien connu que l'activité solaire influe sur les fluctuations à long terme de la ionosphère et que cette corrélation diminue de plus en plus quand l'échelle décroît. Par contre l'activité géomagnétique influe sur les grandes et les petites échelles mais avec un signe opposé. Ce résultat est présenté figure III.4 où nous présentons la fonction de cohérence en ondelette définie par

$$\rho(a) = \frac{\overline{(T_X(a, \cdot) - \overline{T_X(a, \cdot)})(T_Y(a, \cdot) - \overline{T_Y(a, \cdot)})}}{\sqrt{\overline{(T_X(a, \cdot) - \overline{T_X(a, \cdot)})^2}} \sqrt{\overline{(T_Y(a, \cdot) - \overline{T_Y(a, \cdot)})^2}}}. \quad (\text{III.2})$$

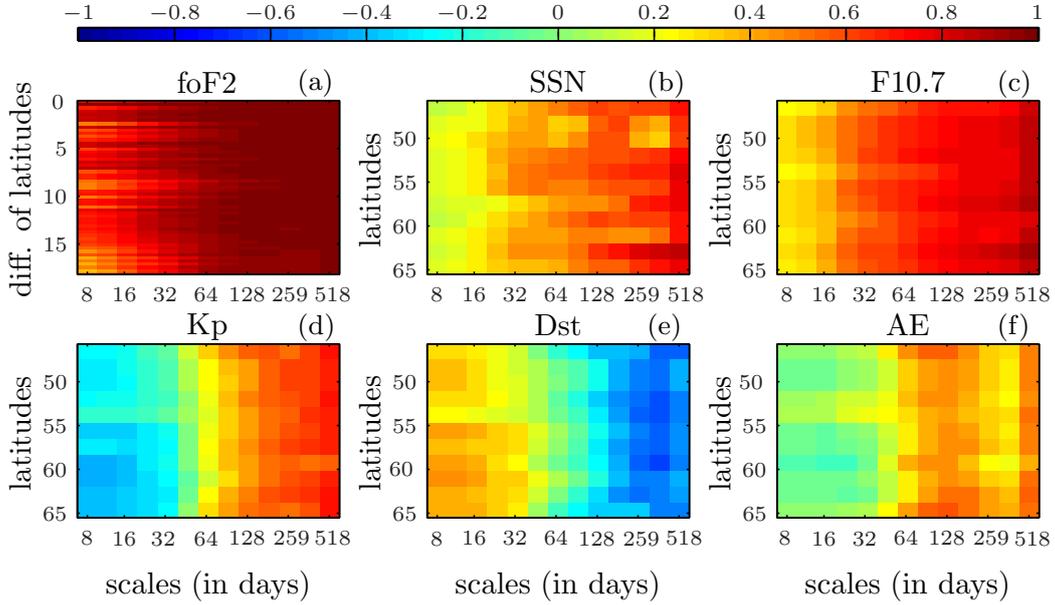


FIGURE III.4 – **Fonction de cohérence en ondelettes versus les échelles.** Entre les différentes mesures de la fréquence critique (en haut, à gauche) et entre ces différentes mesures et les différents indices solaires et magnétiques. L’axe des x correspond au logarithme des échelles en jour ; l’axe des y à la latitude ou la différence de latitude. Figure extraite de [211].

obtenu en prenant pour signal Y , l’ensemble des indice solaires et magnétiques en notre position. Le signal X étant la mesure de la fréquence critique de la couche F2 de l’ionosphère mesurée à différentes latitudes (noté foF2). Cette figure montre que les différentes mesures foF2 sont presque parfaitement corrélées et ceci à toutes les échelles. Pour la corrélation entre les mesures foF2 et les indices, la fonction de cohérence ne dépend pas de la latitude et la corrélation entre foF2 et les indices géomagnétiques changent de signe pour $a \sim 40$ jours. En dessous de cette échelle, les fluctuations de la ionosphère sont bien modélisées par un bruit Gaussien fractionnaire hautement corrélé.

En prenant en compte ces constatations, nous proposons un modèle simple pour les fluctuations de la ionosphère de la forme :

$$T_{\text{foF2,latitude}}(a, t) = \rho_{\text{foF2/SSN}}(a)T_{\text{SSN}}(a, t) + \rho_{\text{foF2/Kp}}(a)T_{\text{Kp}}(a, t) + G_{H,\text{latitude}}(t), \quad (\text{III.3})$$

où $G_{H,\text{latitude}}$ est un bruit Gaussien fractionnaire de paramètre $H = 0.95$ et $T_f(a, \cdot)$ correspond aux coefficients en ondelettes continues du champ f à



FIGURE III.5 – **Image micro-raking.** Deux exemples d’images de papier photographique analysées. Figure extraite de [213].

l’échelle a . Les fonctions $\rho_{\text{foF2/SSN}}(a)$ et $\rho_{\text{foF2/Kp}}(a)$ correspondent à la fonction de cohérence estimée par l’analyse précédente. Dans ce modèle les deux premiers termes ne dépendent pas de la latitude. Le champ de fluctuations final est ensuite obtenu par inversion de la transformée en ondelettes. Pour plus de détails sur ce travail nous renvoyons le lecteur vers notre papier [211].

III.6 Transformée hyperbolique en ondelettes

Un de mes travaux en projet en collaboration avec S. Santucci du laboratoire de physique à l’ENS de Lyon est l’application du formalisme multifractal anisotrope à des surfaces de fracture. En effet, une des questions qui se pose actuellement est de savoir si les propriétés de la fracture sont isotropes ou anisotropes. Or toutes les analyses actuelles ont été faites sur des coupes 1D de telles surfaces dans la direction ou perpendiculairement à la direction de fracture. Certaines études montrent une différence et d’autres non. Il y a donc un réel besoin d’une analyse intrinsèquement bidimensionnelle.

Une autre application de la transformée hyperbolique en ondelettes est en cours avec le Museum Of Modern Art et la fondation Messier qui proposent un défi pour développer une procédure pour l’extraction automatique de caractéristiques et quantifier la similarité entre différents papiers photographiques ou peintures. Quatre équipes participent à ce défi :

- W.A. Sethares de l’université du Wisconsin (USA) ;
- A.G. Klein, C. Brown du Worcester Polytechnic Institute avec P. Klausmeyer du Worcester Art Museum (Maryland, USA) ;

- N. van Noord, L van der Maaten et E. Postma de l’université de Tilburg University (Pays-Bas) ;
- l’équipe Sysiphe de l’ENS lyon avec S. Jaffard de l’université de Paris et H. Wendt de l’Institut de Recherche en Informatique de Toulouse.

Nous proposons pour quantifier la similarité d’utiliser la distance suivante entre l’image a et l’image b :

$$d(a, b) = \left(\sum_{\mathbf{j}} |\tilde{S}_a(\mathbf{j}) - \tilde{S}_b(\mathbf{j})|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{III.4})$$

avec

$$\tilde{Z}_a(\mathbf{j}) = \log \left(\frac{S_a(\mathbf{j})}{\sum_{\mathbf{j}'} S_a(\mathbf{j}')} \right) \quad (\text{III.5})$$

où $S_a(\mathbf{j})$ est le moment d’ordre 2 des coefficients en ondelettes à l’échelle \mathbf{j} :

$$S_a(\mathbf{j}) = \frac{1}{n_j} \sum_{\mathbf{k}} |T_a(\mathbf{k}, \mathbf{j})|^2. \quad (\text{III.6})$$

La somme est prise sur les n_j coefficients de l’échelle \mathbf{j} qui ne sont pas affectés par les effets de bords. La figure III.5 montre deux exemples d’images de papier photographique analysées. 120 images différentes ont été analysées et les résultats sous forme de matrice 120×120 sont présentés figure III.6 avec pour comparaison la matrice de distance obtenue par metadata et avis d’expert dans le domaine (et qui n’était pas accessible aux équipes). Pour plus de détail nous renvoyons le lecteur au papier [213] dont le manuscrit peut être télécharger a cette adresse http://papertextureid.org/pdf/JAIC-HPPC_submitted_5_24_13.pdf

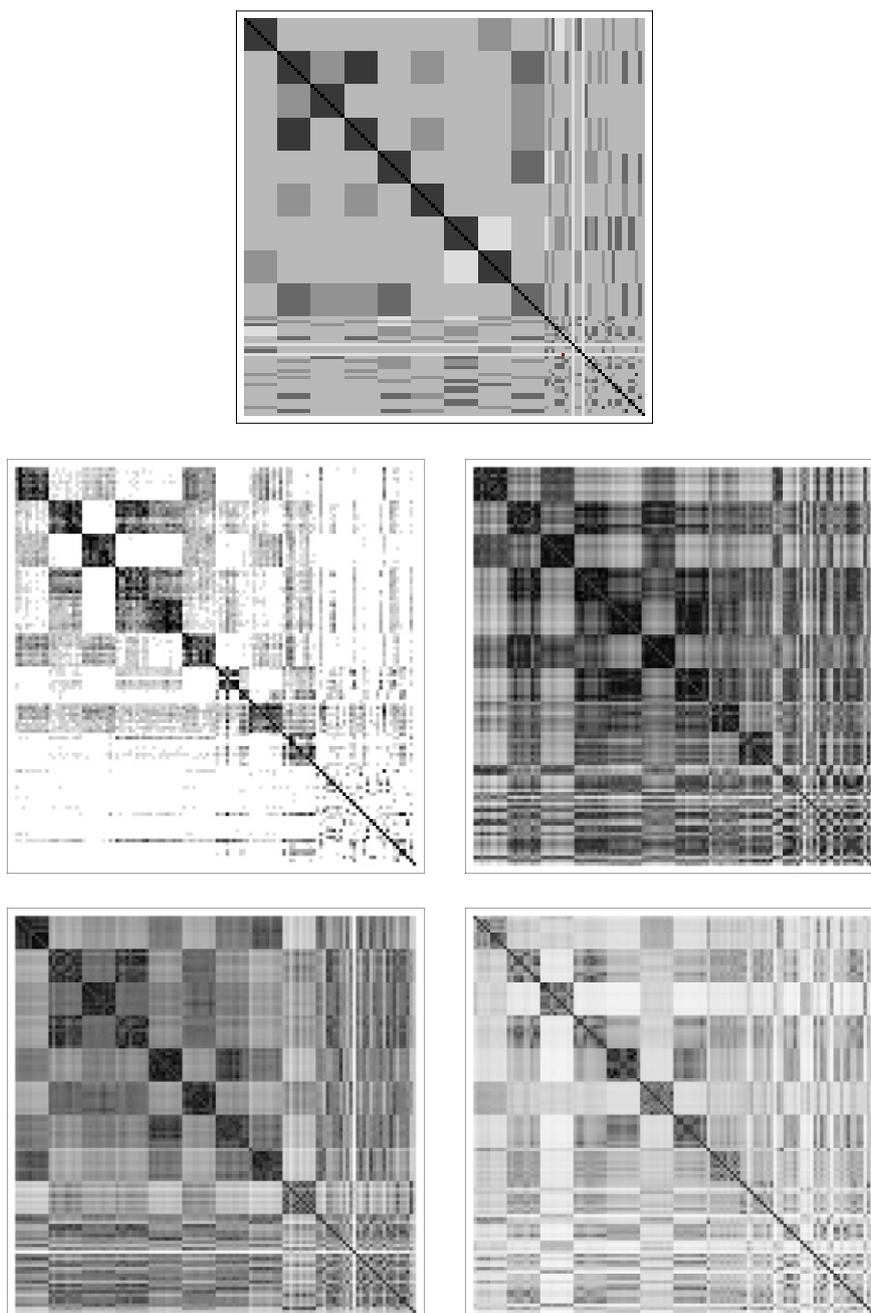


FIGURE III.6 – Matrices de distances. Matrices de distances obtenus par les différentes équipes avec en haut la matrice obtenu par metadata et avis d’expert. Résultats obtenus par l’équipe du Wiscontin (en haut à gauche), de Tilburg (en haut à droite), de Lyon (en bas à gauche) et de Worcester (en bas à droite). Figure extraite de [213].

Chapitre IV

Ondelettes et événements localisés

La transformée en ondelettes est aussi très intéressante au niveau de la détection des événements localisés. En effet dans le demi-plan temps-fréquence (ou temps-échelle) deux types d'événements caractéristiques peuvent être définis, d'une part les événements localisés en temps, discontinuité ou distribution de Dirac, d'autre part les événements localisés en fréquence, c'est à dire présentant des oscillations sur une certaine durée temporelle. Dans les sections suivantes, je présente plusieurs applications reposant sur la détection d'événements localisés.

IV.1 Événements localisés et intermittence

IV.1.1 Filaments de vorticité et intermittence

Ce travail a été effectué durant ma thèse en collaboration avec Y. Couderc, S. Douady et O. Cadot de l'Université de Paris VII.

En turbulence pleinement développée, l'analyse statistique des fluctuations du champ de vitesse permet de tester la validité de différents modèles ou de théories mais ne fournit qu'une information limitée sur l'origine de la turbulence ainsi que sur l'existence et la dynamique des structures spatialement localisées présentes dans les flots turbulents [215, 216]. Ces structures, souvent tourbillonnaires, sont caractérisées par une vorticité, $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$, importante. Les simulations numériques de flot turbulent 3D ont permis de montrer que les régions de l'espace où la vorticité, $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$, est grande et le tenseur de déformation, $\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})^2$, faible formaient des structures filamenteuses qui correspondaient aux régions de l'espace où à la

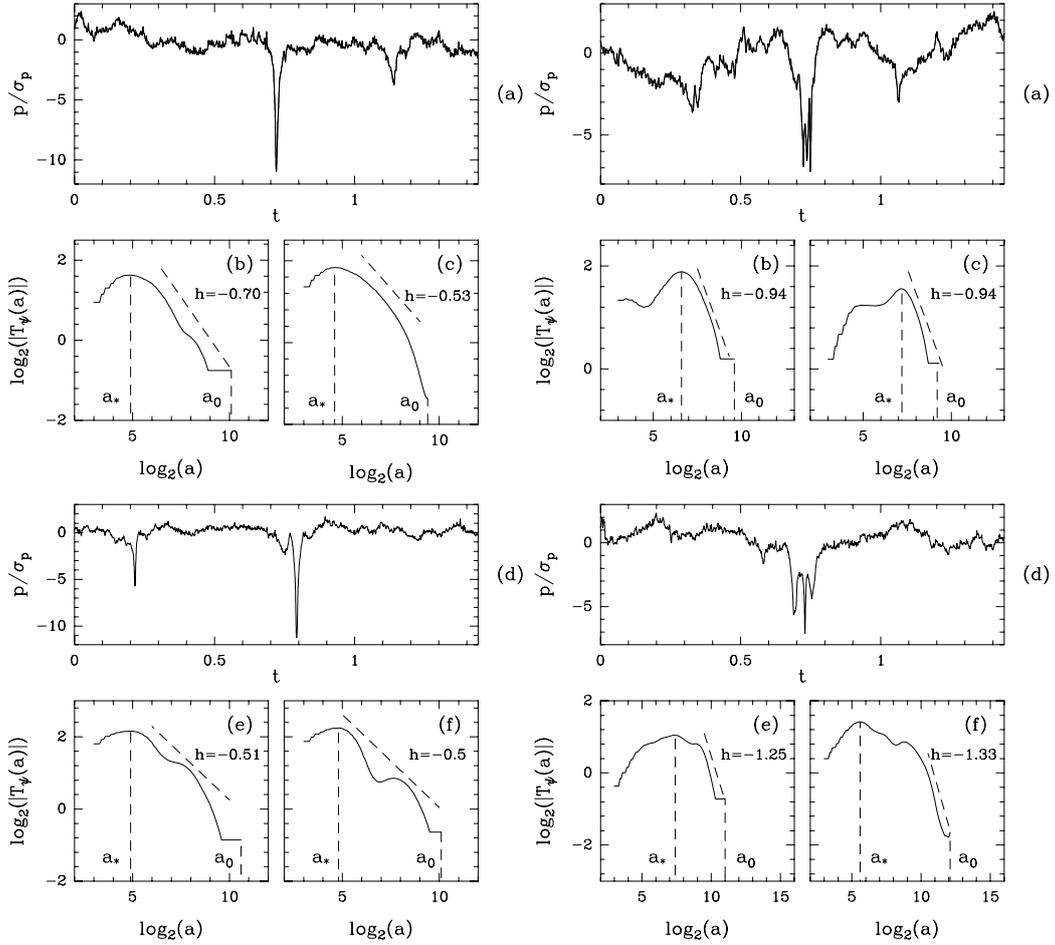


FIGURE IV.1 – **Filament de vorticité et caractérisation par ondelettes.** Pour filament jeune (à gauche) et filament éclaté (à droite). (a-d) Signal de pression expérimental contenant un filament jeune. (b,c) et (e,f) Comportement des maxima du module de la transformée en ondelettes le long des deux lignes de maxima correspondant au filament en (a) et (d). Figure extraite de [214].

pression est très faible [217]. Les régions où ω^2 et σ^2 sont comparables, sont des nappes de cisaillement, structures beaucoup plus instables qui donnent naissance aux tubes par leur enroulement sur elles-mêmes. D'un point de vue expérimental, c'est Couder et son équipe [123] qui ont mis en évidence la présence de filaments de pression en introduisant une nouvelle technique consistant à visualiser les régions de basse pression par l'introduction de micro-bulles d'air dans un flot turbulent en système fermé. Par phénomène de cavitation, ces micro-bulles migrent vers les régions de plus basse pression qui présentent l'apparence de filaments. Ces filaments se déstabilisent par une dynamique d'éclatement tourbillonnaire. La compréhension de la structure, de l'évolution et de la déstabilisation de ces filaments est un objectif important qui pourrait permettre d'apporter un nouvel éclairage sur l'origine du phénomène d'intermittence. Les filaments qui sont au début très fins, provoquent, quand ils passent sur le capteur, un pic de dépression lisse et abrupt sur le signal. Toutefois, le capteur ne voit une grande dépression que lorsqu'un filament passe exactement sur le capteur. S'il passe légèrement à côté, le détecteur ne perçoit qu'une faible dépression sortant à peine des fluctuations caractéristiques du signal. Ces filaments fins se déstabilisent par une ondulation spatiale suivie d'une explosion violente s'accompagnant de la formation de brins de filaments entrelacés [130]. Si le filament passe sur le capteur pendant son éclatement, le pic de dépression présente une multitude de pics secondaires révélant une structure interne complexe. Dans les études précédentes des filaments de pression, ceux ci étaient détectés par seuillage du signal de pression ou de sa dérivée [130, 218]. Abry *et al.* ont proposé d'utiliser la transformée en ondelettes pour cette détection [125]. En effet, ces structures, très proches d'une impulsion, impliquent un grand nombre d'échelles, propriétés qui vont permettre de les identifier de manière plus précise à partir d'une représentation temps-échelle. Ces structures correspondent à des singularités très forte avec un exposant de Hölder négatif. Nous proposons donc d'utiliser la transformée en ondelettes continue et sa restriction aux maxima du module pour détecter ces filaments : le long des lignes de maxima pointant vers un filament de pression, le module de la transformée en ondelettes augmente quand l'échelle a diminue jusqu'à une échelle a^* . En dessous de cette échelle, le module décroît à nouveau. En étudiant un vortex de Burger on a montré que a^* est relié à la largeur du vortex et que le module de la transformée en ondelettes à l'échelle a^* est relié à l'amplitude du vortex. A partir de cette étude et de la comparaison avec le *squelette* de browniens fractionnaire nous avons défini certaines propriétés pour détecter de manière précise les filaments de pression à partir de leurs lignes de maxima. Des exemples de tels filaments avec leurs caractéristiques temps-échelles sont présentés figure IV.1.

Cette identification nous a permis de définir deux *sous-squelettes* de la transformée en ondelettes correspondant respectivement aux filaments et au “marais” des fluctuations de pression. L’étude respective de ces *sous-squelettes* nous a permis de révéler un certain nombre de propriétés intéressantes et importantes [28, 214].

- L’étude des propriétés d’invariance d’échelle du *squelette* de la transformée en ondelettes du signal de pression et de son *sous-squelette* correspondant au marais des fluctuations, montre que les filaments ne sont pas les seuls responsables du phénomène d’intermittence, tout au moins que leur contribution statistique ne suffit pas à rendre compte totalement de ce phénomène.
- L’étude du *sous-squelette* correspondant aux filaments, nous a permis de montrer que les évènements détectés ne sont pas corrélés et suivent une loi de Poisson. D’autre part, la mesure simultanée de la vitesse à la paroi nous permet de remonter aux caractéristiques spatiales des filaments et de montrer que la taille spatiale caractéristique du coeur des filaments (jeunes comme éclatés) est très supérieure à l’échelle de Taylor.
- L’étude simultanée des champs de vitesse et de pression à l’aide du formalisme multifractal grand-canonique révèle clairement la présence de fortes corrélations entre les singularités les plus fortes de ces champs. La présence des filaments dans le flot turbulent est incontestablement l’une des causes sous-jacentes à ces corrélations.

Pour plus de détails sur cette étude nous renvoyons le lecteur à [214]. Il est à noter que les propriétés espace-échelles mises en évidence concernent seulement les champs temporels. Il serait d’ailleurs très intéressant de reproduire cette étude sur des signaux de pression et de vitesse enregistrés simultanément dans d’autres configurations expérimentales pour lesquelles l’existence d’un flot moyen permettrait d’utiliser l’hypothèse de Taylor afin de déduire des informations de nature spatiale.

D’autre part, pour confirmer la non-homogénéité du marais des fluctuations de pression, il apparaît indispensable de reproduire cette étude sur des signaux provenant de flots où l’on a réussi à inhiber physiquement la formation des filaments de vorticit . En effet, la présence de filaments influence certainement la statistique des fluctuations environnantes du champ de pression et la seule suppression dans la statistique de ces évènements ne permet pas de conclure quant au véritable r le que jouent ces derniers dans le ph nom ne d’intermittence.

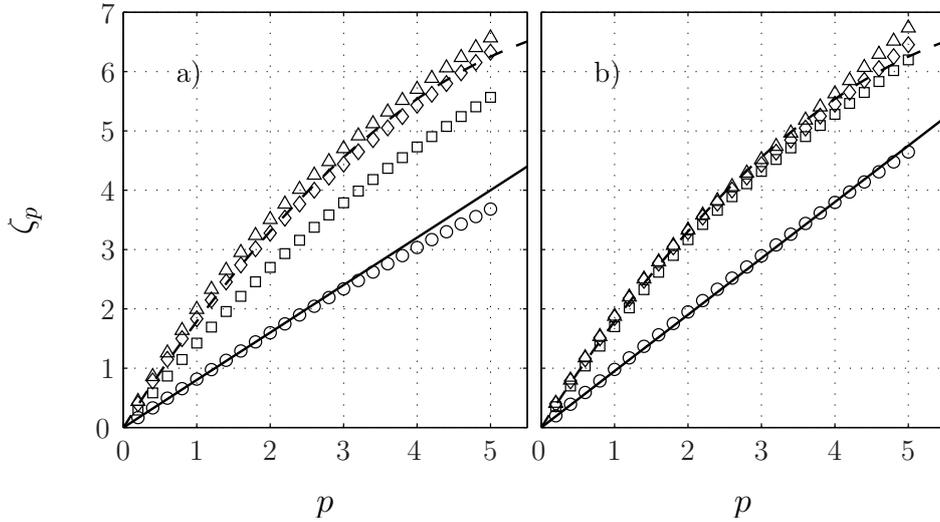


FIGURE IV.2 – **Turbulence d’onde : spectres.** Spectres, $\zeta(p)$ versus p , estimés avec les incréments d’ordre 1 (\circ), 2 (\square), 3 (\diamond) et 4 (\triangle) pour (a) le signal expérimental de hauteur et (b) un signal synthétique multifractal presque partout dérivable. Figure extraite de [42].

IV.1.2 Intermittence en turbulence d’onde

Ce travail a été effectué en collaboration avec B. Audit, du Laboratoire Joliot-Curie de l’ENS Lyon et E. Falcon, S. Fauve et C. Laroche du groupe non linéaire du laboratoire Matière et Systèmes Complexes de l’Université de Paris Diderot.

La turbulence d’onde concerne l’étude de l’interaction entre de nombreuses ondes. Ce phénomène intervient dans de nombreux domaines des ondes de rotation (spin wave) dans les solides, aux ondes internes et de surface en océanographie jusqu’aux ondes de plasma en astrophysique. La théorie de la turbulence d’ondes, appelée aussi *weak turbulence*, suppose que le transfert d’énergie est gouverné par l’interaction entre les différentes ondes qui créent une cascade d’énergie des grandes échelles (échelle d’excitation) aux petites échelles (échelle dissipative). Bien que cette théorie peut être appliquée à presque tous les domaines de la physique impliquant des ondes faiblement non linéaires, il n’y a que quelques expériences de laboratoire (avec entre autre [219, 220, 221, 222, 223]). L’expérience de E. Falcon *et al.* consiste en une cuve remplie de mercure ou d’eau, forcée de manière aléatoire par un vibreur [224]. La hauteur de la surface du liquide, $\eta(t)$, est mesurée en fonction du temps en un point de la cuve. Les auteurs ont mis en évidence un phénomène d’intermittence à petites échelles en utilisant les incréments d’ordre

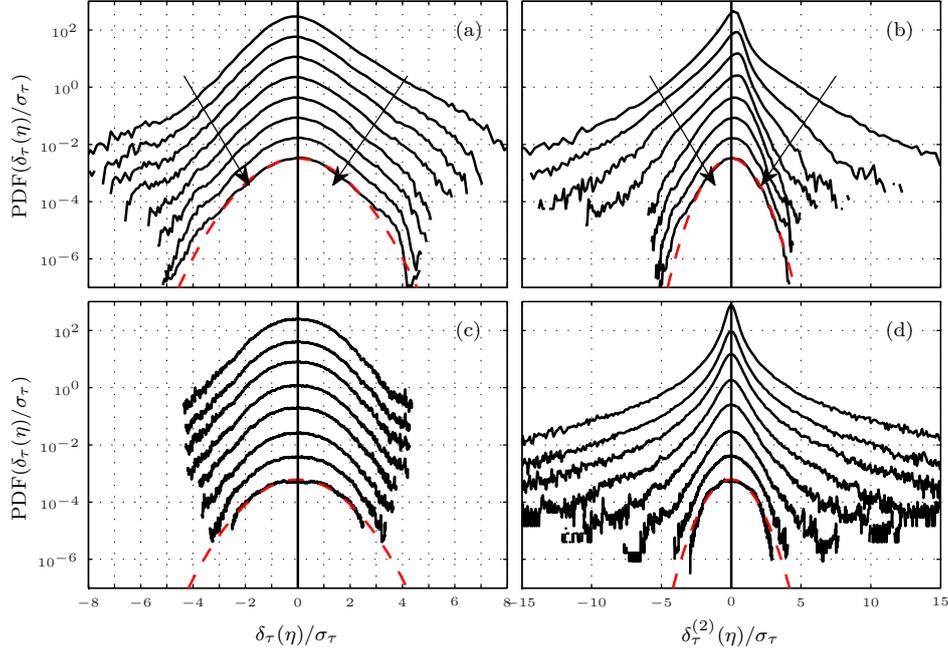


FIGURE IV.3 – **Turbulence d’onde : histogrammes.** Histogramme des incréments $\delta_\tau^{(1)}\eta = [\eta(t + \tau) - \eta(t)]/\sigma_\tau$ pour différentes échelles $6 \leq \tau \leq 100$ ms pour (a) le signal de hauteur expérimental et (b) le signal synthétique. Histogramme des incréments $\delta_\tau^{(2)}\eta = [\eta(t + 2\tau) - 2\eta(t + \tau) + \eta(t)]/\sigma_\tau$ pour différentes échelles $6 \leq \tau \leq 100$ ms pour (c) le signal de hauteur expérimental et (d) le signal synthétique. La courbe pointillée rouge correspond à une Gaussienne de moyenne nulle et d’écart-type 1. Les histogrammes ont été décalés d’un facteur 5 et les flèches montrent le sens τ croissant. Figure extraite de [42].

2 du signal. En effet, comme nous l’avons vu dans le chapitre II, l’incrément d’ordre 1 ne peut voir que des singularités d’exposant de Hölder $h \leq 1$. Or la hauteur du liquide est une fonction presque partout dérivable. En effet, la vitesse existe partout sauf en quelques endroits du fluide où se produit le phénomène de vague déferlante ou *Wave Breaking*. Ceci implique que le spectre de Fourier présente une loi de puissance avec un exposant $\beta < -3$ et que la relation entre spectre de Fourier et le moment d’ordre 2 des incréments d’ordre 1 n’est plus valide [42]. La figure IV.2 présente le spectre multifractal $\zeta(q)$ obtenu avec les incréments de différents ordres sur le signal de hauteur ainsi que sur un signal synthétique multifractal obtenu par cascade log-normale sur base d’ondelettes (avec $c_1 = 1.9$ et $c_2 = 0.27$ pour reproduire les résultats obtenus sur le signal expérimental de hauteur). On

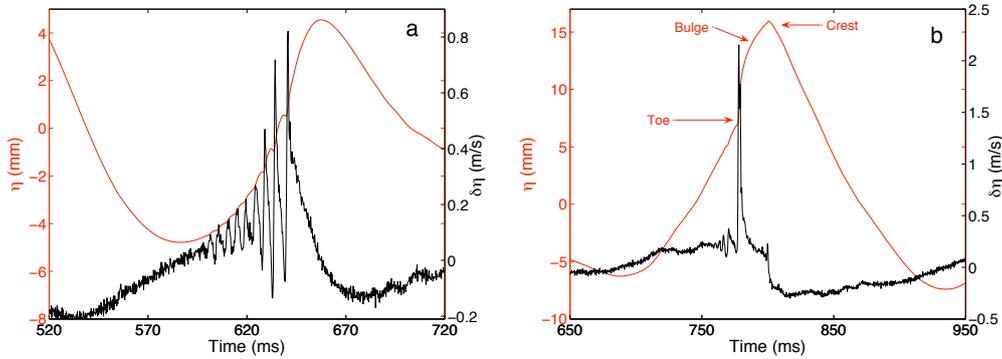


FIGURE IV.4 – **Événements typiques** qui se produisent près de la crête d’une onde de gravité. a) onde capillaire et (b) déferlement ou *wave breaking*. L’axe et la courbe en rouge correspondent à la hauteur de liquide et ceux en noir à la vitesse. Figure extraite de [225].

voit que le spectre $\zeta(q)$ linéaire pour l’incrément d’ordre 1 s’écarte clairement d’une ligne droite quand l’ordre de l’incrément augmente. A partir de l’ordre 2 pour le signal synthétique et l’ordre 3 pour le signal expérimental ce spectre n’évolue plus. Le phénomène d’intermittence est aussi clairement visible sur les histogrammes des incréments d’ordre 2 présentés figure IV.3. En effet, ces histogrammes évoluent clairement avec l’échelle d’analyse contrairement aux histogrammes des incréments d’ordre 1 qui ne changent pas de forme.

Il a été suggéré que l’intermittence de la turbulence d’onde pouvait être reliée à l’existence d’événements localisés bien connus tels que les ondes capillaires [226, 227, 228] où les déferlements [229] qui se produisent à l’avant de la crête d’une vague. Cette hypothèse a motivé un certain nombre d’études numériques [230, 231] et théoriques [232]. Nous avons donc cherché à détecter ces événements pour étudier leurs effets sur l’intermittence mesurée. Les procédures de detection utilisées sont les suivantes :

- **Détection des ondes capillaires.** Ces événements bien connus se produisent lorsque l’onde de gravité est assez raide ce qui conduit à d’importants effets de tension capillaire. Un train d’ondes capillaires de fréquence typique comprise entre 80Hz et 250Hz est alors émis. Une représentation temps-fréquence basée sur la transformée en ondelettes, avec l’ondelette de Morlet comme ondelette analysante, est alors utilisée. Une procédure de seuillage de l’énergie fréquentielle, c’est à dire des coefficients en ondelettes au carré, dans la bande de fréquence 50 – 250Hz est effectuée. On obtient alors un ensemble d’événements de durée δt dont la moyenne est de l’ordre de 40 à 80 ms.

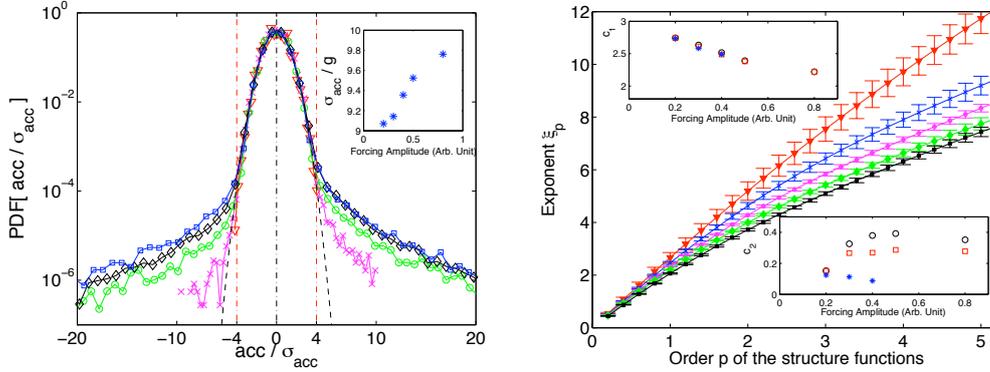


FIGURE IV.5 – **Histogrammes et spectre $\zeta(p)$.** A gauche : histogrammes normalisés de l'accélération, acc/σ_{acc} , pour différents forçages $\sigma_U = 0.2$ (∇), 0.3 (\times), 0.4 (\circ), 0.5 (\diamond) and 0.8 (\square). La courbe discontinue noire correspond à une Gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type unité. Le seuil de détection des déferlements, $\pm 4\sigma_{acc}$, est représenté par les lignes pointillés rouge. L'encart représente l'écart-type des histogrammes, σ_{acc} , en fonction du forçage. A droite : Spectre $\zeta(p)$ obtenu à partir des incréments d'ordre 4 pour différents forçages : $\sigma_U = 0.2$ (∇), 0.3 (\times), 0.4 (\circ), 0.5 (\diamond) and 0.8 (\square) V . Les courbes correspondent aux meilleurs $\zeta(p) = c_1 p - \frac{c_2}{2} p^2$. ξ_p . Les encarts représentent l'évolution de c_1 et c_2 avec le forçage pour tout le signal (\circ), le signal sans les déferlements (\square), et le signal sans les déferlements et sans les ondes capillaires pour les trois plus petits forçages ($*$). Figure extraite de [225].

- **Détection des déferlements.** Ces événements se produisent quand l'onde capillaire précédente augmente ainsi que l'amplitude de la vague jusqu'au déferlement. Nous avons représenté un événement typique figure IV.4b) où l'on voit clairement que ces événements correspondent à des discontinuités. Comme le signal de hauteur est peu singulier un simple seuillage de l'accélération, c'est-à-dire des incréments d'ordre 2 à petites échelles, est suffisant. Pour définir le seuil, nous avons représenté figure IV.5 les histogrammes l'accélération normalisée, acc/σ_{acc} , pour différents forçages. La partie centrale de ces histogrammes ne dépend pas du forçage et est très bien modélisée par une Gaussienne. Comme pour le forçage le plus faible aucun déferlement n'est présent, on définit le seuil de détection par $\pm 4\sigma_{acc}$. Quand on a enlever tous ces événements l'histogramme de l'accélération est alors Gaussien.

L'analyse des temps d'attente entre événements de même type ainsi que l'analyse du nombre d'événements dans un intervalle de temps donné montrent

que la statistique des déferlements est bien modélisée par une statistique de Poisson. Par contre les événements d’ondes capillaires n’ont clairement pas une statistique de Poisson.

Maintenant que nous avons détecté la position et la durée de tous les événements, nous pouvons calculer les fonctions de structure en gardant toute la statistique ou en enlevant les incréments correspondant aux événements. C’est à dire qu’à l’échelle τ on ne garde que les incréments $\delta_\tau(t)$ qui sont à une distance d’au moins τ d’un événement détecté. Sur la figure IV.5 nous avons représenté les spectres $\zeta(q)$ obtenus en fonction du forçage : quand le forçage augmente, le signal devient de plus en plus singulier (c_1 diminue) et intermittent (c_2 augmente). Quand on enlève tous les déferlements, la valeur de c_1 ne change pas et l’intermittence diminue mais ne disparaît pas. Ce résultat suggère que l’intermittence n’est pas due essentiellement à la présence de ces événements localisés. Toutefois ces événements ont été enlevés de la statistique mais leur présence physique influe certainement les fluctuations alentours. Il serait donc souhaitable de pouvoir enlever ces événements en augmentant par exemple la tension superficielle. Pour plus de détails sur ce travail nous renvoyons le lecteur à [42] et [225].

IV.2 Détection d’événements localisés en fréquence

IV.2.1 Signaux à oscillations multiples

Ce travail a été effectué en collaboration avec N. Buonviso, P. Litaudon, T. Cenier et S. Garcia du Laboratoire de Neurosciences & Systèmes Sensoriels de l’Université de Lyon I. Ce travail a abouti à l’élaboration d’un logiciel libre *OpenElectrophy* (<http://neuralensemble.org/OpenElectrophy/>) pour l’analyse de données d’électrophysiologie qui permet d’analyser aussi bien les oscillations que les potentiels d’actions.

Un des défis en neurosciences c’est d’essayer de corrélérer les potentiels d’action des cellules, événements très localisés en temps, avec un signal possédant des oscillations multiples, tel que les potentiels de champs local (LFP). Pour étudier ces corrélations il faut pouvoir estimer de manière précise la fréquence locale mais aussi la phase locale de l’oscillation. En effet plusieurs études ont montré qu’un phénomène de *phase-locking* entre les deux activités apparaissaient sous certaines conditions de comportement ou de perception [233, 234, 235] : sous certaines conditions les potentiels d’action arrivent à des moments précis d’une oscillation. Traditionnellement, l’extraction de phase se fait en appliquant la transformée de Hilbert mais comme cette trans-

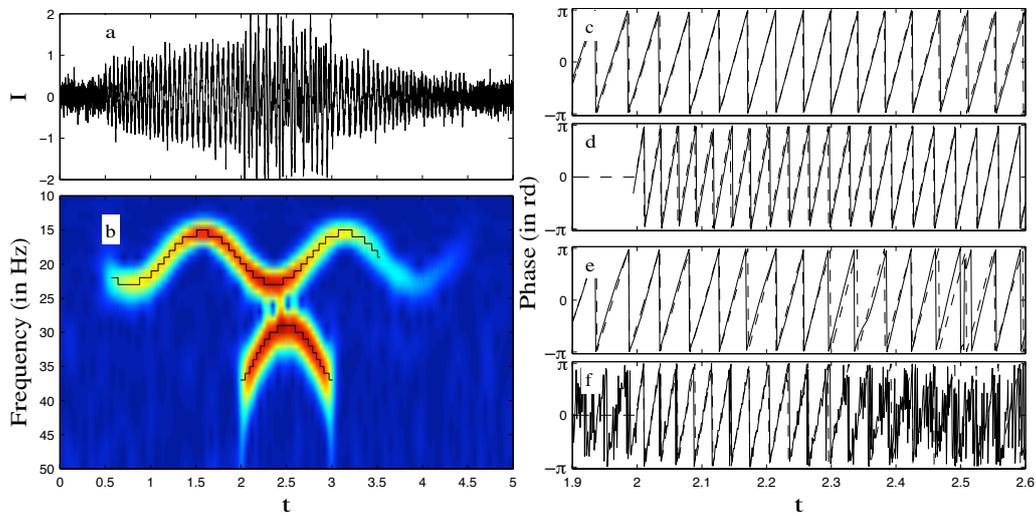


FIGURE IV.6 – Extraction de phase. a) Signal composé de deux modes sinusoïdaux. b) Représentation temps-échelle obtenue avec l'ondelette de Morlet. Les lignes surimposées correspondent aux lignes de maxima extraites. Phase extraite le long des lignes de maxima pour l'oscillation lente (c) et rapide (d). Phase extraite en utilisant un filtrage passe bande puis une transformée de Hilbert pour l'oscillation lente (e) et rapide (f). Figure extraite de [241].

formée perd toutes les informations spatiales elle est difficilement utilisable pour des signaux non stationnaires. Pour de tels signaux un grand nombre de méthodes temps-fréquences existent ([236, 237] pour une revue). Ces méthodes se classent en deux types : les méthodes paramétriques et les méthodes non-paramétriques. Les premières nécessitent une connaissance à priori du signal que nous n'avons pas. Parmi le second type, les représentations temps-fréquence [238] sont bien adaptées et le problème d'estimation d'amplitude et de phase locale est bien compris et étudié dans le cas où une seule composante oscillatoire est présente [236, 237, 78]. Des améliorations ont été apportées pour des signaux multi composantes ou fortement bruités [239, 240]. Le problème de cette méthode est qu'elle demande un grand nombre de calculs. En neurosciences, les données à analyser sont souvent multivariées, enregistrées avec une grande fréquence d'échantillonnage pendant une longue durée. Nous avons proposé [241] une procédure d'extraction de fréquence et de phase locale basée sur les chaînes de maxima de la transformée en ondelettes complexe [78] bien adaptée à ce genre de signaux. Cette procédure s'effectue en plusieurs étapes :

- une transformée en ondelettes est calculée avec une très basse résolution en temps et une faible résolution en fréquence. L'ondelette utilisée est

l'ondelette complexe de Morlet.

- Une recherche des maxima globaux supérieur à un seuil est effectuée. Cette étape peut être faite par bande de fréquences ce qui permet d'avoir un seuil différent pour les différentes bandes de fréquences.
- Dans un petit voisinage d'un maximum global, on calcule une transformée en ondelettes avec une forte résolution ce qui nous permet d'obtenir une position plus précise de ce maximum. À partir de cette nouvelle position, on calcule au pas de temps suivant, la transformée en ondelettes dans un petit voisinage en fréquence et on cherche le maximum à ce temps. On continue de même pour le pas de temps suivant jusqu'à ce que l'amplitude du maximum soit inférieure au seuil. On fait de même dans la direction opposée, c'est à dire pour les temps précédents le maximum global. Cette opération est effectuée pour chaque maximum global obtenu à l'étape 2. On obtient ainsi un ensemble de lignes de maxima.
- La position en fréquence des maxima nous donne la fréquence locale et l'amplitude et la phase de la transformée en ondelettes à cette position nous donne l'amplitude et la phase de l'onde.

La figure IV.6 compare notre méthode avec une procédure de filtrage suivie d'une transformée de Hilbert sur un signal synthétique composé de deux modes sinusoïdaux. On voit clairement que l'utilisation de la transformée de Hilbert nécessite un filtrage préalable optimal pour ne garder qu'une seule oscillation et ainsi obtenir une phase précise. De plus le début et la fin des événements ne sont pas directement accessibles. En comparaison, notre méthode s'adapte au signal analysé et on obtient une phase très proche de celle prescrite.

Un autre problème crucial chez le mammifère est la présence et l'influence très forte du cycle respiratoire dans tous les signaux electro-physiologiques. Ce cycle respiratoire varie en fonction du sujet mais aussi pour un même sujet en fonction du temps. Or pour pouvoir déterminer si une quantité est pertinente il faut pouvoir la moyennner sur plusieurs cycles respiratoires. Nous avons donc développé une méthode de rééchantillonnage des représentations temps-fréquences de manière à obtenir un échantillonnage régulier en fonction de la phase de la respiration [242].

Cette méthode de rééchantillonnage alliée à notre méthode d'extraction de phase a été utilisée pour étudier les relations existantes entre les différentes oscillations des LFP (oscillations β et γ), le cycle respiratoire et les potentiels d'action chez le rat anesthésié sous l'action d'une stimulation olfactive [243, 241, 244].

IV.2.2 Détection d'ondes gravitaco-acoustiques

Ce travail a été effectué en collaboration avec P. Abry ainsi que P. Koucká Knížová et J. Boška de l'Institut de Physique Atmosphérique de l'Académie des Sciences de la République Tchèque à Prague.

L'atmosphère terrestre présente une très grande variabilité à toutes les fréquences. Les ondes acoustiques de gravité, dont la période va de la minute (onde acoustique pure) à quelques heures, constituent la source la plus importante de la variabilité à court terme de la ionosphère. Ces ondes jouent un rôle important dans le transfert de l'énergie et de la quantité de mouvement entre les hautes et les basses couches de l'atmosphère. Par cet échange d'énergie, elles contribuent de manière significative à la circulation globale et constituent une composante importante du mouvement atmosphérique. Ces ondes acoustiques de gravité ont aussi un impact important sur la propagation des ondes radios. Par conséquent, l'analyse et la compréhension des mécanismes de générations de ces ondes constituent des objectifs majeurs pour améliorer notre connaissance de la dynamique atmosphérique. Il a été proposé [245] que les éclipses de soleil pouvaient entraîner la production d'ondes gravito-acoustiques qui se propagent vers la haute atmosphère [246].

Nous avons proposé une méthodologie qui nous permet de détecter la présence de telle structure à partir de mesure de la concentration en électrons obtenue à différentes altitudes de la ionosphère. Cette méthode se décompose en 4 étapes :

- pour chaque altitude, une transformée en ondelettes complexe continue est calculée en utilisant soit l'ondelette de Morlet soit l'ondelette de Paul.
- Pour chaque altitude, on recherche les maxima locaux du module de la transformée en ondelettes. On enregistre la position, la fréquence, la phase ainsi que l'altitude de chaque maxima.
- On recherche ensuite les maxima qui existent conjointement à différentes altitudes dans un même voisinage temps-fréquence. On relie alors ces maxima pour former un ensemble de lignes de maxima à travers les altitudes. Chaque ligne de maxima correspond alors à une structure.
- Pour chaque structure, la dérivation de la phase en fonction de l'altitude nous permet de calculer la vitesse de phase, d'onde et de groupe dans la direction verticale. L'utilisation des équations de propagation des ondes gravito-acoustiques nous permet ensuite d'obtenir toutes les caractéristiques de propagation de l'onde.

En utilisant cette méthode sur des mesures faites durant plusieurs éclipses de soleil nous avons été capables de détecter plusieurs ondes de gravités ainsi qu'une onde acoustique [247]. Ces ondes apparaissent très rapidement après

le début des éclipses et notre étude confirme ainsi que les éclipses de soleil produisent des ondes gravito-accoustiques. Cette étude montre aussi le besoin d'augmenter l'échantillonnage des données pour permettre une meilleure détection des ondes accoustiques.

Bibliographie

- [1] B.B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades ; divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*, 62 :331–358, 1974.
- [2] U. Frisch and G. Parisi. Fully developed turbulence and intermittency. *Proceedings of International Summer School on Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, pages 84–88, 1985.
- [3] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan. The multifractal nature of turbulent energy-dissipation. *Journal of Fluid Mechanics*, 224 :429–484, 1991.
- [4] U. Frisch. *Turbulence, the Legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [5] B. B. Mandelbrot. *Fractals : Form, Chance and Dimensions*. Freeman, San Francisco, 1977.
- [6] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco, 1982.
- [7] A. Arneodo, N. Decoster, and S.G. Roux. A wavelet-based method for multifractal image analysis. i. methodology and test applications on isotropic and anisotropic random rough surfaces. *European Physical Journal B*, 15(3) :567–600, June 2000.
- [8] D. Schertzer and S. Lovejoy. Generalised scale invariance in turbulent phenomena. *Proceedings of International Conference on Physicochemical Hydrodynamics*, 6 :623–635, 1985.
- [9] D. Schertzer and S. Lovejoy. Multifractals, generalized scale invariance and complexity in geophysics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(12) :3417–3456, December 2011.
- [10] M. Ben Slimane. *Etude du formalisme multifractal pour les fonctions*. PhD thesis, E.N.P.C., France, 1996.

- [11] M. Ben Slimane and H. Ben Braiek. Directional and anisotropic regularity and irregularity criteria in triebel wavelet bases. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 18 :893–914, 2012.
- [12] S. Jaffard, P. Abry, S.G. Roux, B. Vedel, and H. Wendt. The contribution of wavelets in multifractal analysis. In *Proceedings of the ISFMA summer school on wavelets and their applications, Zuhai, China*, 2008.
- [13] S. Jaffard. Wavelet techniques in multifractal analysis. In *Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoît Mandelbrot, M. Lapidus et M. van Frankenhuijsen Eds., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 72(2), pages 91–152. AMS, 2004.
- [14] R.H. Riedi. Multifractal processes. In P. Doukhan, G. Oppenheim, and M.S. Taqqu, editors, *Theory and applications of long range dependence*, pages 625–717. Birkhäuser, 2003.
- [15] J. Delour. *Processus aléatoire auto-similaire : applications en turbulence et en finance*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2001.
- [16] A. Chhabra, C. Meneveau, R.V. Jensen, and K.R. Sreenivasan. Direct determination of the singularity spectrum and its application to fully developed turbulence. *Physical Review A*, 40(9) :5284 – 5294, 1989.
- [17] A. Arneodo, E. Bacry, and J.F. Muzy. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets. *Physica A*, 213(1-2) :232–275, 1995.
- [18] H. Wendt. *Contributions of Wavelet Leaders and Bootstrap to Multifractal Analysis : Images, Estimation Performance, Dependence Structure and Vanishing Moments. Confidence Intervals and Hypothesis Tests*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon., France, 2008.
- [19] B. Castaing, Y. Gagne, and M. Marchand. Log-similarity for turbulent flows. *Physica D*, 68 :387–400, 1993.
- [20] J. Delour, J.F. Muzy, and A. Arneodo. Intermittency of 1D velocity spatial profiles in turbulence : a magnitude cumulant analysis. *European Physical Journal B*, 23 :243–248, 2001.
- [21] V. Venugopal, S.G. Roux, E. Foufoula-Georgiou, and A. Arneodo. Revisiting multifractality of high-resolution temporal rainfall using a wavelet-based formalism. *Water Resources Research*, 42(6) :W06D14, June 2006.
- [22] A. Arneodo, E. Bacry, S. Manneville, and J.F. Muzy. Analysis of random cascades using space-scale correlation functions. *Physical Review Letters*, 80 :708–711, 1998.
- [23] A. Arneodo, E. Bacry, and J.F. Muzy. Random cascades on wavelet dyadic trees. *Journal of Mathematical Physics*, 39 :4142–4164, 1998.

- [24] J. Oneil and C. Meneveau. Spatial correlations in turbulence - predictions from the multifractal formalism and comparison with experiments. *Physics of Fluids A-Fluid Dynamics*, 5 :158–172, 1993.
- [25] A. Arneodo, S. Manneville, J.F. Muzy, and S.G. Roux. Revealing a lognormal cascading process in turbulent velocity statistics with wavelet analysis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 357 :2415–2438, 1999.
- [26] A. Naert, L. Puech, B. Chabaud, J. Peinke, B. Castaing, and B. Hebral. Velocity intermittency in turbulence - how to objectively characterize it. *Journal de Physique II*, 4(2) :215–224, February 1994.
- [27] F. Chilla, J. Peinke, and B. Castaing. Multiplicative process in turbulent velocity statistics : A simplified analysis. *Journal de Physique II*, 6(4) :455–460, April 1996.
- [28] S.G. Roux. *Analyse en ondelettes de l'auto-similarité de signaux en turbulence pleinement développée*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille II, France, 1996.
- [29] B. Castaing and B. Dubrulle. Fully-developed turbulence - a unifying point-of-view. *Journal de Physique II*, 5(7) :895–899, July 1995.
- [30] Z.S. She and E.C. Waymire. Quantized energy cascade and log-poisson statistics in fully-developed turbulence. *Physical Review Letters*, 74(2) :262–265, January 1995.
- [31] C. Meneveau, K.R. Sreenivasan, P. Kailasnath, and M.S. Fan. Joint multifractal measures - theory and applications to turbulence. *Physical Review A*, 41(2) :894–913, January 1990.
- [32] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 15(4) :723–736, 1984.
- [33] P. Goupillaud, A. Grossmann, and J. Morlet. Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis. *Geoexploration*, 23(1) :85–102, 1984.
- [34] R. Murenzi. *Wavelets*, page 239. Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [35] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. S.I.A.M., Philadelphia, Pa, 1992.
- [36] Y. Meyer. *Wavelet and Applications*. Springer, Berlin, 1992.
- [37] P. Abry. *Ondelettes et Turbulence - Multirésolution, Algorithmes de Décomposition, Invariance d'Echelles et Signaux de Pression*. Diderot Editeur, Arts et Sciences, Paris, 1997.

- [38] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, CA, 1998.
- [39] S. Jaffard. Exposants de hölder en des points donnés et coefficients en ondelettes. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Serie I-Mathematique*, 308 :79–81, 1989.
- [40] M. Holschneider and P. Tchamitchian. *Les ondelettes en 1989*. Springer, Berlin, 1990.
- [41] P. Abry, P. Gonçalvès, and P. Flandrin. Wavelets, spectrum estimation and $1/f$ processes. In A. Antoniadis and G. Oppenheim, editors, *Wavelets and Statistics, Lecture Notes in Statistics*, volume 103, New-York, 1995. Springer-Verlag.
- [42] E. Falcon, S.G. Roux, and B. Audit. Revealing intermittency in experimental data with steep power spectra. *European Physical Journal*, 90(5) :50007, June 2010.
- [43] H. Wendt, P. Abry, S.G. Roux, S. Jaffard, and B. Vedel. Analyse multifractale d'image : l'apport des coefficients dominants. *Traitement du Signal*, 26(1) :47–65, 2009.
- [44] J.F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo. Wavelets and multifractal formalism for singular signals - application to turbulence data. *Physical Review Letters*, 67 :3515–3518, 1991.
- [45] M. Vergassola and U. Frisch. Wavelet transforms of self-similar processes. *Physica D*, 54(1-2) :58–64, December 1991.
- [46] J.F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo. Multifractal formalism for fractal signals - the structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. *Physical Review E*, 47 :875–884, 1993.
- [47] J.F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo. The multifractal formalism revisited with wavelets. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4 :245–302, 1994.
- [48] S. Mallat and W. L. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38 :617–643, 1992.
- [49] S. Mallat and S. Zhong. Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(7) :710–732, July 1992.
- [50] P. Kestener and A. Arneodo. Three-dimensional wavelet-based multifractal method : The need for revisiting the multifractal description of turbulence dissipation data. *Physical Review Letters*, 91 :194501, 2003.

- [51] P. Kestener and A. Arneodo. Generalizing the wavelet-based multifractal formalism to random vector fields : Application to three-dimensional turbulence velocity and vorticity data. *Physical Review Letters*, 93(4) :044501, July 2004.
- [52] N. Decoster. *Analyse multifractale d'images de surfaces rugueuses à l'aide de la transformation en ondelettes*. PhD thesis, Université Bordeaux I., France, 1999.
- [53] J. Canny. A computational approach to edge-detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6) :679–698, November 1986.
- [54] A. Arneodo, N. Decoster, and S.G. Roux. Intermittency, log-normal statistics, and multifractal cascade process in high-resolution satellite images of cloud structure. *Physical Review Letters*, 83(6) :1255–1258, August 1999.
- [55] H. Wendt, S.G. Roux, S. Jaffard, and P. Abry. Wavelet leaders and bootstrap for multifractal analysis of images. *Signal Processing*, 89(6) :1100–1114, June 2009.
- [56] S. Jaffard, B. Lashermes, and P. Abry. Wavelet leaders in multifractal analysis. In *Wavelet Analysis and Applications, T Qian, M. I; Vai, X. Yuesheng, Eds.*, pages 219–264, Basel, Switzerland, 2006. Birkhäuser Verlag.
- [57] H. Wendt, P. Abry, and S. Jaffard. Bootstrap for empirical multifractal analysis. *IEEE Signal Processing Mag.*, 24(4) :38–48, 2007.
- [58] S. Jaffard, P. Abry, and S.G. Roux. Function spaces vs. scaling functions : Tools for image classification. In Maïtine Bergounioux, editor, *Mathematical Image Processing*, volume 5 of *Springer Proceedings in Mathematics*, pages 1–39. Springer, 2011.
- [59] J. P. Kahane and J. Peyrière. Sur certaines martingales de benoit mandelbrot. *Advances in mathematics*, 22 :131, 1976.
- [60] J. Barral and B.B. Mandelbrot. Multiplicative products of cylindrical pulses. *Probability Theory and Related Fields*, 124 :409–430, 2002.
- [61] C.K. Peng, S.V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H.E. Stanley, and A.L. Goldberger. Mosaic organization of dna nucleotides. *Physical Review E*, 49(2) :1685–1689, February 1994.
- [62] S.M. Ossadnik, S.V. Buldyrev, A.L. Goldberger, S. Havlin, R.N. Mantegna, C.K. Peng, M. Simons, and H.E. Stanley. Correlation approach to identify coding regions in dna-sequences. *Biophysical Journal*, 67(1) :64–70, July 1994.

- [63] M.S. Taqqu, V. Teverovsky, and W. Willinger. Estimators for long-range dependence : An empirical study. *Fractals-an Interdisciplinary Journal on the Complex Geometry of Nature*, 3(4) :785–798, December 1995.
- [64] S.V. Buldyrev, A.L. Goldberger, S. Havlin, R.N. Mantegna, M.E. Matsu, C.K. Peng, M. Simons, and H.E. Stanley. Long-range correlation-properties of coding and noncoding dna-sequences - genbank analysis. *Physical Review E*, 51(5) :5084–5091, May 1995.
- [65] C.K. Peng, S. Havlin, H.E. Stanley, and A.L. Goldberger. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time-series. *Chaos*, 5(1) :82–87, March 1995.
- [66] J.W. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, H.H.A. Rego, S. Havlin, and A. Bunde. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A*, 295(3-4) :441–454, June 2001.
- [67] K. Hu, P.C. Ivanov, Z. Chen, P. Carpena, and H.E. Stanley. Effect of trends on detrended fluctuation analysis. *Physical Review E*, 64(1) :011114, July 2001.
- [68] Z. Chen, P.C. Ivanov, K. Hu, and H.E. Stanley. Effect of nonstationarities on detrended fluctuation analysis. *Physical Review E*, 65(4) :041107, April 2002.
- [69] J.W. Kantelhardt, S.A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, and H.E. Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A-statistical Mechanics and Its Applications*, 316(1-4) :PII S0378–4371(02)01383–3, December 2002.
- [70] P. Oswiecimka, J. Kwapien, and S. Drozd. Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures. *Physical Review E*, 74(1) :016103, July 2006.
- [71] R. Galaska, D. Makowiec, A. Dudkowska, A. Koprowski, K. Chlebus, J. Wdowczyk-Szulc, and A. Rynkiewicz. Comparison of wavelet transform modulus maxima and multifractal detrended fluctuation analysis of heart rate in patients with systolic dysfunction of left ventricle. *Annals of Noninvasive Electrocardiology*, 13(2) :155–164, 2008.
- [72] Gao-Feng Gu and Wei-Xing Zhou. Detrended fluctuation analysis for fractals and multifractals in higher dimensions. *Physical Review E*, 74 :061104, December 2006.
- [73] B. Lashermes, S.G. Roux, P. Abry, and S. Jaffard. Comprehensive multifractal analysis of turbulent velocity using the wavelet leaders. *European Physical Journal B*, 61(2) :201–215, 2008.

- [74] H. Wendt, S.G. Roux, and P. Abry. Bootstrap for log wavelet leaders cumulant based multifractal analysis. In *Proc. European Signal Processing Conf. (EUSIPCO)*, Florence, Italy, 2006.
- [75] P. Abry, S. Jaffard, S.G. Roux, B. Vedel, and H. Wendt. Wavelet decomposition of measures : Application to multifractal analysis of images. In L. T. Tsien A. Damlamian, S. Jaffard, editor, *Proc. NATO-ASI Conf. on Unexploded Ordnance Detection and Mitigation*, Series in contemporary applied mathematics, pages 1–20. Higher education press, World scientific publishing, 2009.
- [76] S.G. Roux, B. Lashermes, P. Abry, and S. Jaffard. Contributions à l'étude des performances statistiques des estimateurs multifractals. In *XXe colloque sur le Traitement du Signal et des Images. GRETSI, Louvaine la Neuve, Belgique*, 2005.
- [77] B. Lashermes. *Contributions à l'analyse multifractale pratique : limitations dans l'estimation des exposants de lois de d'échelle et coefficients leaders. Application à la turbulence pleinement développée et discussion des effets de nombre de Reynolds fini*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon., France, 2005.
- [78] N. Delprat, P. Escudé, P. Guillemain, R. Kronland-Martinet, P. Tchamitchian, and B. Torrèsani. Asymptotic wavelet and gabor analysis : extraction of instantaneous frequencies. *IEEE Transaction on Information Theory*, 38 :644–664, 1992. Special issue on Wavelet and Multiresolution Analysis.
- [79] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, and J.F. Muzy. Singularity spectrum of multifractal functions involving oscillating singularities. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4(2) :159–174, 1998.
- [80] S. Jaffard. On lacunary wavelet series. *Annals of Applied Probability*, 10(1) :313–329, 2000.
- [81] S. Jaffard, P. Abry, and S.G. Roux. Singularités oscillantes et coefficients d'ondelettes dominants. In *Proceedings of the XXII colloque sur le Traitement du Signal et des Images GRETSI, Dijon, France*, 2009.
- [82] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, and J.F. Muzy. Oscillating singularities on cantor sets : A grand-canonical multifractal formalism. *Journal of Statistical Physics*, 87 :179–209, 1997.
- [83] S. Jaffard. Oscillation spaces : Properties and applications to fractal and multifractal functions. *Journal of Mathematical Physics*, 39(2) :4129–4141, 1998.

- [84] S.G. Roux, M. Clausel, B. Vedel, S. Jaffard, and P. Abry. Self-similar anisotropic texture analysis : the hyperbolic wavelet transform contribution. *Transaction on Image Processing*, 22(11) :4353 – 4363, 2013.
- [85] R.A. DeVore, S.V. Konyagin, and V.N. Temlyakov. Hyperbolic wavelet approximation. *Constructive Approximation*, 14 :1–26, 1998.
- [86] P. Abry, M. Clausel, S. Jaffard, S.G. Roux, and B. Vedel. Hyperbolic wavelet transform : an efficient tool for multifractal analysis of anisotropic textures. *soumis à Revista Matemática Iberoamericana*, *arXiv :1210.1944*, October 2012.
- [87] R. Robert and V. Vargas. Hydrodynamic turbulence and intermittent random fields. *Communications In Mathematical Physics*, 284(3) :649–673, December 2008.
- [88] E. Bacry, J. Delour, and J.F. Muzy. Multifractal random walk. *Physical Review E*, 64(2) :026103, August 2001.
- [89] A. Bonami and A. Estrade. Anisotropic analysis of some gaussian models. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, 9(3) :215–236, 2003.
- [90] H. Biermé, M.M. Meerschaert, and H.P. Scheffler. Operator scaling stable random fields. *Stochastic Processes and their Applications*, 117(3) :312–332, 2007.
- [91] S.G. Roux, B. Vedel, S. Jaffard, and P. Abry. Coefficients dominants de la transformé hyperbolique en ondelettes 2d : Application à l’analyse de textures invariantes d’échelle, multifractales et anisotropes. In *Proceedings of the XXIV colloque sur le Traitement du Signal et des Images GRETSI, Brest, France*, 2013.
- [92] M. Clausel and B. Vedel. Explicit constructions of operator scaling self-similar random gaussian fields. *Fractals*, 19(1) :101–111, 2011.
- [93] M. Clausel and B. Vedel. An optimality results about sample path properties of operator scaling gaussian random fields. *arXiv :1302.0818*, 2010.
- [94] B. Efron. *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans*, volume 38. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1982.
- [95] P. Hall. *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*. Springer Verlag, 1992.
- [96] H. Wendt and P. Abry. Multifractality tests using bootstrapped wavelet leaders. *IEEE Transactions On Signal Processing*, 55(10) :4811–4820, October 2007.

- [97] H. Wendt and P. Abry. Bootstrap tests for the time constancy of multifractal attributes. *Proceedings of IEEE International Conference On Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1-12 :3465–3468, 2008.
- [98] M.L. Stein. Fast and exact simulation of fractional brownian surfaces. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 11(3) :587–599, 2002.
- [99] A.N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Doklady Akademii Nauk*, 30 :301–305, 1941.
- [100] L. F. Richardson. *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, 1922.
- [101] A.S. Monin and A.N. Yaglom. *Statistical fluids dynamics*. M.I.T. Press, 1975.
- [102] U. Frisch and S.A. Orzag. Turbulence : challenges for theory and experiment. *Physics Today*, 43 :24, 1990.
- [103] A.N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 13(1) :82–85, 1962.
- [104] A.M. Obukhov. Some specific features of atmospheric turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 13 :77, 1962.
- [105] G. Parisi and U. Frisch. On the singularity structure of fully developed turbulence. In M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi, editors, *Turbulence and Predictability, Geophysical Fluid Dynamics In Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, pages 84–88, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [106] A. Arneodo, R. Benzi, J. Berg, L. Biferale, E. Bodenschatz, A. Busse, E. Calzavarini, B. Castaing, M. Cencini, L. Chevillard, R.T. Fisher, R. Grauer, H. Homann, D. Lamb, A.S. Lanotte, E. Lévêque, B. Luethi, J. Mann, N. Mordant, W.C. Mueller, S. Ott, N.T. Ouellette, J.F. Pinton, S.B. Pope, S.G. Roux, F. Toschi, H. Xu, and P.K. Yeung. Universal intermittent properties of particle trajectories in highly turbulent flows. *Physical Review Letters*, 100(25) :254504, June 2008.
- [107] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan. Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence. *Physical Review Letters*, 59 :1424, 1987.
- [108] Z.S. She and E. Lévêque. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Physical Review Letters*, 72 :336–339, 1994.
- [109] B. Dubrulle. Intermittency in fully developed turbulence : log-poisson statistics and generalized scale-covariance. *Physical Review L*, 73 :959, 1994.

- [110] D. Schertzer and S. Lovejoy. Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics Geophysical Research-Atmospheres*, 92 :9693–9714, 1987.
- [111] S. Kida. Log-stable distribution and intermittency of turbulence. *Journal of Physical Society of Japan*, 60 :5, 1991.
- [112] D. Schertzer, S. Lovejoy, F. Schmitt, Y. Chigirinskaya, and D. Marsan. Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency. *Fractals - Complex Geometry Patterns and Scaling in Nature and Society*, 5 :427–471, 1997.
- [113] G. Paladin and A. Vulpiani. Degrees of freedom of turbulence. *Physical Review A*, 35(4) :1971–1973, February 1987.
- [114] M. Nelkin. Multifractal scaling of velocity derivatives in turbulence. *Physical Review A*, 42(12) :7226–7229, December 1990.
- [115] U. Frisch and M. Vergassola. A prediction of the multifractal model - the intermediate dissipation range. *Europhysics Letters*, 14(5) :439–444, March 1991.
- [116] C. Meneveau. Transition between viscous and inertial-range scaling of turbulence structure functions. *Physical Review E*, 54(4) :3657–3663, October 1996.
- [117] L. Biferale, M. Cencini, D. Vergni, and A. Vulpiani. Exit time of turbulent signals : A way to detect the intermediate dissipative range. *Physical Review E*, 60(6) :R6295–R6298, December 1999.
- [118] L. Chevillard, B. Castaing, and E. Lévêque. On the rapid increase of intermittency in the near-dissipation range of fully developed turbulence. *European Physical Journal B*, 45(4) :561–567, June 2005.
- [119] L. Chevillard. *Description multifractale unifié du phénomène d'intermittence en turbulence Lagrangienne*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2004.
- [120] F.H. Champagne. Fine-scale structure of turbulent velocity-field. *Journal of Fluid Mechanics*, 86 :67–108, May 1978.
- [121] F. Anselmet, Y. Gagne, E.J. Hopfinger, and R.A. Antonia. High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 140 :63–89, March 1984.
- [122] B. Castaing, Y. Gagne, and E.J. Hopfinger. Velocity probability density-functions of high reynolds-number turbulence. *Physica D*, 46 :177–200, 1990.

- [123] S. Douady, Y. Couder, and M.E. Brachet. Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence. *Physical Review Letters*, 67(8) :983–986, August 1991.
- [124] S. Fauve, C. Laroche, and B. Castaing. Pressure-fluctuations in swirling turbulent flows. *Journal de Physique II*, 3(3) :271–278, March 1993.
- [125] P. Abry, S. Fauve, P. Flandrin, and C. Laroche. Analysis of pressure-fluctuations in swirling turbulent flows. *Journal de Physique II*, 4(5) :725–733, May 1994.
- [126] J. Maurer, P. Tabeling, and G. Zocchi. Statistics of turbulence between 2 counterrotating disks in low-temperature helium gas. *Europhysics Letters*, 26(1) :31–36, April 1994.
- [127] J.F. Pinton and R. Labbe. Correction to the Taylor hypothesis in swirling flows. *Journal De Physique II*, 4(9) :1461–1468, September 1994.
- [128] R. Benzi, S. Ciliberto, C. Baudet, and G.R. Chavarria. On the scaling of 3-dimensional homogeneous and isotropic turbulence. *Physica D*, 80(4) :385–398, February 1995.
- [129] G.R. Chavarria, C. Baudet, and S. Ciliberto. Hierarchy of the energy-dissipation moments in fully-developed turbulence. *Physical Review Letters*, 74(11) :1986–1989, March 1995.
- [130] O. Cadot, S. Douady, and Y. Couder. Characterization of the low-pressure filaments in a 3-dimensional turbulent shear-flow. *Physics of Fluids*, 7(3) :630–646, March 1995.
- [131] R. Camussi, S. Ciliberto, and C. Baudet. Experimental study of the evolution of a velocity perturbation in fully developed turbulence. *Physical Review E*, 56(5) :6181–6184, November 1997.
- [132] K.R. Sreenivasan. Fluid turbulence. *Reviews of Modern Physics*, 71(2) :S383–S395, March 1999.
- [133] O. Chanal, B. Chabaud, B. Castaing, and B. Hebral. Intermittency in a turbulent low temperature gaseous helium jet. *European Physical Journal B*, 17 :309–317, 2000.
- [134] P. Marcq and A. Naert. A Langevin equation for turbulent velocity increments. *Physics of Fluids*, 13(9) :2590–2595, September 2001.
- [135] A. Arneodo, S. Manneville, and J.F. Muzy. Towards log-normal statistics in high Reynolds number turbulence. *European Physical Journal B*, 1 :129–140, 1998.
- [136] A. Arneodo, B. Audit, E. Bacry, S. Manneville, J.F. Muzy, and Roux S.G. Thermodynamics of fractal signals based on wavelet analysis :

- application to fully developed turbulence data and DNA sequences. *Physica A-Statistical Mechanics And Its Applications*, 254(1-2) :24–45, May 1998.
- [137] A. Arneodo, B. Audit, E. Bacry, S. Manneville, J.F. Muzy, and S.G. Roux. Thermodynamics of fractal signals based on wavelet analysis : application to fully-developed turbulence data and DNA sequences (a minicourse). In V.B. Priezzhev and V.P. Spiridonov, editors, *Self-Similar Systems*, page 135. JINR, Dubna, 1999.
- [138] A. Arneodo, C. Baudet, F. Belin, R. Benzi, B. Castaing, B. Chabaud, R. Chavarria, S. Ciliberto, R. Camussi, F. Chilla, B. Dubrulle, Y. Gagne, B. Hebral, J. Herweijer, M. Marchand, J. Maurer, J.F. Muzy, A. Naert, A. Noullez, J. Peinke, S.G. Roux, P. Tabeling, W. Van de Water, and H. Willaime. Structure functions in turbulence, in various flow configurations, at reynolds number between 30 and 5000, using extended self-similarity. *Europhysics Letters*, 34(6) :411–416, May 1996.
- [139] A. Arneodo, J.F. Muzy, and S.G. Roux. Experimental analysis of self-similarity and random cascade processes : Application to fully developed turbulence data. *Journal de Physique II*, 7 :363–370, 1997.
- [140] A. Arneodo, S. Manneville, J.F. Muzy, and S.G. Roux. Experimental evidence for anomalous scale dependent cascading process in turbulent velocity statistics. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 6(3) :374–381, May 1999.
- [141] G.A. Voth, K. Satyanarayan, and E. Bodenschatz. Lagrangian acceleration measurements at large reynolds numbers. *Physics of Fluids*, 10(9) :2268–2280, September 1998.
- [142] A. La Porta, G.A. Voth, A.M. Crawford, J. Alexander, and E. Bodenschatz. Fluid particle accelerations in fully developed turbulence. *Nature*, 409(6823) :1017–1019, February 2001.
- [143] G.A. Voth, A. La Porta, A.M. Crawford, J. Alexander, and E. Bodenschatz. Measurement of particle accelerations in fully developed turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 469 :121–160, October 2002.
- [144] N. Mordant, A.M. Crawford, and E. Bodenschatz. Experimental lagrangian acceleration probability density function measurement. *Physica D-nonlinear Phenomena*, 193(1-4) :Los Alamos Natl Lab, June 2004.
- [145] N. Mordant. *Mesure Lagrangienne en Turbulence : Mise en Oeuvre et Analyse*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2001.

- [146] N. Mordant, P. Metz, O. Michel, and J.F. Pinton. Measurement of lagrangian velocity in fully developed turbulence. *Physical Review Letters*, 87(21) :214501, November 2001.
- [147] N. Mordant, J. Delour, E. L ev eque, A. Arneodo, and J.F. Pinton. Long time correlations in lagrangian dynamics : A key to intermittency in turbulence. *Physical Review Letters*, 89(25) :254502, December 2002.
- [148] N. Mordant, J.F. Pinton, and O. Michel. Time-resolved tracking of a sound scatterer in a complex flow : Nonstationary signal analysis and applications. *Journal of the Acoustical Society of America*, 112(1) :108–118, July 2002.
- [149] N. Mordant, J. Delour, E. L ev eque, O. Michel, A. Arneodo, and J.F. Pinton. Lagrangian velocity fluctuations in fully developed turbulence : Scaling, intermittency, and dynamics. *Journal of Statistical Physics*, 113(5-6) :Los Alamos Natl Lab, Ctr Nonlinear Studies, Theoret Div, Mat Sci Div &EOLEOLTurbulence Working Grp, December 2003.
- [150] L. Chevillard, S.G. Roux, E. L ev eque, N. Mordant, J.F. Pinton, and A. Arneodo. Lagrangian velocity statistics in turbulent flows : effects of dissipation. *Physical review letters*, 91(21) :214502, November 2003.
- [151] L. Chevillard, S.G. Roux, E. L ev eque, N. Mordant, J.F. Pinton, and A. Arneodo. Intermittency of velocity time increments in turbulence. *Physical review letters*, 95(6) :064501, August 2005.
- [152] E. L ev eque, L. Chevillard, J.F. Pinton, S.G. Roux, A. Arneodo, and N. Mordant. Lagrangian intermitencies in dynamic and static turbulent velocity fields from direct numerical simulations. *Journal of Turbulence*, 8(3) :1–9, 2007.
- [153] L. Chevillard, B. Castaing, A. Arneodo, E. L ev eque, J.F. Pinton, and S.G. Roux. A phenomenological theory of eulerian and lagrangian velocity fluctuations in turbulent flows. *Comptes Rendus Physique*, 13(9-10) :899–928, November 2012.
- [154] M.S. Borgas. The multifractal lagrangian nature of turbulence. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A-mathematical Physical and Engineering Sciences*, 342(1665) :379–411, February 1993.
- [155] H. Moffat. *Turbulence and chaotic phenomena in fluids*, chapter Simple topological aspects of turbulent velocity dynamics, pages 223–230. Elsevier, 1984.
- [156] N. Kevlahan and J.C. Vassilicos. The space and scale dependencies of the self-similar structure of turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 447, 1994.

- [157] J.M. Aubry and S. Jaffard. Random wavelet series. *Communications in Mathematical Physics*, 227 :483–514, 2002.
- [158] S. Jaffard, S.G. Roux, and P. Abry. Oscillating singularities in multifractal analysis. *in preparation*, 2010.
- [159] P. Abry, S.G. Roux, and S. Jaffard. Detecting oscillating singularities in multifractal analysis : Application to hydrodynamic turbulence. *Proceedings of the IEEE International Conference On Acoustics, Speech, and Signal Processing, Prague*, 2011.
- [160] S. Lovejoy. Area-perimeter relation for rain and cloud areas. *Science, New Series*, 216(4542) :185–187, 1982.
- [161] R.F. Cahalan. *Advances in Remote Sensing and Retrieval Methods*, page 371. Deepak Pub, Hampton, 1989.
- [162] G.G. Wilkinson, J. Kanellopoulos, and J. Megier, editors. *Fractals in Geoscience and Remote Sensing*. Image Understanding Research Series, vol.1, ECSC-EC-EAEC. Brussels, Luxemburg, 1995.
- [163] A. Davis, A. Marshak, R. Cahalan, and W. Wiscombe. The landsat scale break in stratocumulus as a three-dimensional radiative transfer effect : Implications for cloud remote sensing. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 54(2) :241–260, January 1997.
- [164] V. Ramanathan, R.D. Cess, E.F. Harrison, P. Minnis, B.R. Barksstrom, E. Ahmad, and D. Hartmann. Cloud-radiative forcing and climate - results from the earth radiation budget experiment. *Science*, 243(4887) :57–63, January 1989.
- [165] R.D. Cess, G.L. Potter, J.P. Blanchet, G.J. Boer, S.J. Ghan, J.T. Kiehl, H. Letreut, Z.X. Li, X.Z. Liang, J.F.B. Mitchell, J.J. Morcrette, D.A. Randall, M.R. Riches, E. Roeckner, U. Schlese, A. Slingo, K.E. Taylor, W.M. Washington, R.T. Wetherald, and I. Yaga. Interpretation of cloud-climate feedback as produced by 14 atmospheric general-circulation models. *Science*, 245(4917) :513–516, August 1989.
- [166] R.D. Cess, M.H. Zhang, Y. Zhou, X. Jing, and V. Dvortsov. Absorption of solar radiation by clouds : Interpretations of satellite, surface, and aircraft measurements. *Journal of Geophysical Research-atmospheres*, 101(D18) :23299–23309, October 1996.
- [167] A. Marshak, A. Davis, W. Wiscombe, and R. Cahalan. Scale invariance in liquid water distributions in marine stratocumulus .2. multifractal properties and intermittency issues. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 54(11) :1423–1444, June 1997.

- [168] W.D. King, C.T. Maher, and G.A. Hepburn. Further performance tests on the csiro liquid water probe. *Journal of Applied Meteorology*, 20(2) :195–202, 1981.
- [169] C. Duroure and B. Guillemet. Analysis of the spatial inhomogeneities in stratocumulus and cumulus clouds. *Atmospheric Research*, 25(4) :331–350, March 1990.
- [170] B.A. Baker. Turbulent entrainment and mixing in clouds - a new observational approach. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 49(5) :387–404, March 1992.
- [171] A. Davis, A. Marshak, W. Wiscombe, and R. Cahalan. Multifractal characterizations of nonstationarity and intermittency in geophysical fields - observed, retrieved, or simulated. *Journal of Geophysical Research-atmospheres*, 99(D4) :8055–8072, April 1994.
- [172] A. Davis, A. Marshak, W. Wiscombe, and R. Cahalan. Scale invariance of liquid water distributions in marine stratocumulus .1. spectral properties and stationarity issues. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 53(11) :1538–1558, June 1996.
- [173] R.M. Welch and B.A. Wielicki. The stratocumulus nature of fog. *Journal of Climate and Applied Meteorology*, 25(2) :101–111, February 1986.
- [174] R.M. Welch, K.S. Kuo, B.A. Wielicki, S.K. Sengupta, and L. Parker. Marine stratocumulus cloud fields off the coast of southern-california observed using landsat imagery .1. structural characteristics. *Journal of Applied Meteorology*, 27(4) :341–362, April 1988.
- [175] R.F. Cahalan and J.H. Joseph. Fractal statistics of cloud fields. *Monthly Weather Review*, 117(2) :261–272, February 1989.
- [176] A. Davis, A. Marshak, H. Gerber, and W.J. Wiscombe. Horizontal structure of marine boundary layer clouds from centimeter to kilometer scales. *Journal of Geophysical Research-atmospheres*, 104(D6) :6123–6144, March 1999.
- [177] D. Schertzer and S. Lovejoy. Physically based rain and cloud modeling by anisotropic, multiplicative turbulent cascades. *Journal of Geophysical Research*, 92 :9693–9714, 1987.
- [178] A. Marshak, A. Davis, R. Cahalan, and W. Wiscombe. Bounded cascade models as nonstationary multifractals. *Physical Review E*, 49(1) :55–69, January 1994.
- [179] S.G. Roux, A. Arneodo, and N. Decoster. A wavelet-based method for multifractal image analysis. iii. applications to high-resolution satellite images of cloud structure. *European Physical Journal B*, 15(4) :765–786, June 2000.

- [180] N. Decoster, S.G. Roux, and A. Arneodo. A wavelet-based method for multifractal image analysis. ii. applications to synthetic multifractal rough surfaces. *European Physical Journal B*, 15(4) :739–764, June 2000.
- [181] S. Lovejoy and D. Schertzer. Multifractal analysis techniques and the rain and cloud fields from 10^{-3} to 10^6 m. In D Schertzer and S. Lovejoy, editors, *Scaling, fractals and nonlinear variability in geophysics*, pages 111–144, Norwell, Mass., 1991. Kluwer academic.
- [182] J. Olsson, J. Niemczynowicz, and R. Berndtsson. Fractal analysis of high-resolution rainfall time-series. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, 98 :23265–23274, 1993.
- [183] V. Venugopal, S.G. Roux, E. Foufoula-Georgiou, and A. Arneodo. Scaling behavior of high resolution temporal rainfall : New insights from a wavelet-based cumulant analysis. *Physics Letters A*, 348(3-6) :335–345, January 2006.
- [184] J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J.D. Farmer. Testing for nonlinearity in time-series - the method of surrogate data. *Physica D*, 58(1-4) :77–94, September 1992.
- [185] S. Basu, E. Foufoula-Georgiou, B. Lashermes, and A. Arneodo. Estimating intermittency exponent in neutrally stratified atmospheric surface layer flows : A robust framework based on magnitude cumulant and surrogate analyses. *Physics of Fluids*, 19(11) :115102, November 2007.
- [186] S.G. Roux, V. Venugopal, K. Fienberg, A. Arneodo, and E. Foufoula-Georgiou. Evidence for inherent nonlinearity in temporal rainfall. *Advances In Water Resources*, 32(1) :41–48, January 2009.
- [187] L. Ferraris, S. Gabellani, U. Parodi, J. von Hardenberg, and A. Provenzale. Revisiting multifractality in rainfall fields. *Journal of Hydro-meteorology*, 4(3) :544–551, June 2003.
- [188] N. Mallick. *Exemples d'invariances d'échelle dans la fracture des matériaux fragiles désordonnés*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon., France, 2010.
- [189] A. Garcimartín, A. Guarino, L. Bellon, and S. Ciliberto. Statistical properties of fracture precursors. *Physical Review Letters*, 79(17) :3202–3205, October 1997.
- [190] Y. Pomeau. Spontaneous breaking of 2-dimensional bent crystals. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Serie II*, 314(6) :553–556, March 1992.
- [191] L. Golubovic and S. Feng. Rate of microcrack nucleation. *Physical Review A*, 43(10) :5223–5227, May 1991.

- [192] A. Guarino, S. Ciliberto, and A. Garcimartin. Failure time and microcrack nucleation. *Europhysics Letters*, 47(4) :456–461, August 1999.
- [193] S. Ciliberto, A. Guarino, and R. Scorretti. The effect of disorder on the fracture nucleation process. *Physica D*, 158(1-4) :83–104, October 2001.
- [194] E. Bouchaud, G. Lapasset, and J. Planes. Fractal dimension of fractured surfaces : A universal value? *Europhysics Letters*, 13(1) :73–79, 1990.
- [195] E. Bouchaud. Scaling properties of cracks. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 9(21) :4319–4344, 1997.
- [196] K. Maaloy, A. Hansen, E. Hinrichsen, and S. Roux. Experimental measurements of the roughness of brittle cracks. *Physical Review Letters*, 68(2) :213–215, January 1992.
- [197] E. Bouchbinder, I. Procaccia, and S. Sela. Disentangling scaling properties in anisotropic fracture. *Physical Review Letters*, 95(25) :255503, December 2005.
- [198] L. Ponsou, D. Bonamy, and E. Bouchaud. Two-dimensional scaling properties of experimental fracture surfaces. *Physical Review Letters*, 96(3) :035506, 2006.
- [199] I.L. Menezes-Sobrinho, M.S. Couto, and I.R.B. Ribeiro. Anisotropy in rupture lines of paper sheets. *Physical Review E*, 71(6) :066121, June 2005.
- [200] J.M. López, M.A. Rodríguez, and R. Cuerno. Superroughening versus intrinsic anomalous scaling of surfaces. *Physical Review E*, 56(4) :3993–3998, October 1997.
- [201] E. Bouchbinder, I. Procaccia, S. Santucci, and L. Vanel. Fracture surfaces as multiscaling graphs. *Physical Review Letters*, 96(5) :055509, 2006.
- [202] J. Schmittbuhl and K. Maaloy. Direct observation of a self-affine crack propagation. *Physical Review Letters*, 78(20) :3888–3891, May 1997.
- [203] P. Daguier, B. Nghiem, E. Bouchaud, and F. Creuzet. Pinning and depinning of crack fronts in heterogeneous materials. *Physical Review Letters*, 78(6) :1062–1065, February 1997.
- [204] J.M. Boffa, C. Allain, R. Chertcoff, J. P. Hulin, F. Plouraboué, and S. Roux. Roughness of sandstone fracture surfaces : Profilometry and shadow length investigations. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 7(2) :179–182, January 1999.

- [205] J.F. Boudet, S. Ciliberto, and V. Steinberg. Dynamics of crack propagation in brittle materials. *Journal de Physique II*, 6(10) :1493–1516, October 1996.
- [206] M.J. Alava, P.K. Nukala, and S. Zapperi. Statistical models of fracture. *Advances in physics*, 55(3-4), 2006.
- [207] N. Mallick, P.P. Cortet, S. Santucci, S.G. Roux, and L. Vanel. Discrepancy between subcritical and fast rupture roughness : a cumulant analysis. *Physical review letters*, 98(25) :255502, June 2007.
- [208] G. W. Prohss. *Physics of the Earth's space environment : an introduction*. Springer, 2004.
- [209] P.G. Richards. Seasonal and solar cycle variations of the ionospheric peak electron density : Comparison of measurement and models. *Journal of Geophysical Research-Space Physics*, 106(A7) :12803–12819, 2001.
- [210] A.V. Mikhailov, B.A. de la Morena, G. Miro, and D. Marin. A method for foF2 monitoring over spain using the el arenosillo digisonde current observations. *Annali Di Geofisica*, 42(4) :683–689, 1999.
- [211] S.G. Roux, P. Koucká Knížová, Z. Mošna, and P. Abry. Ionosphere fluctuations and global indices : A scale dependent wavelet-based cross-correlation analysis. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 90–91 :186–197, 2012.
- [212] S.G. Roux, P. Abry, P. Koucká Knížová, and Z. Mošna. Scale-dependent analysis of ionosphere fluctuations. *IEEE International Conference On Acoustics, Speech, and Signal Processing, Prague*, 2011.
- [213] C.R. Johnson, P. Messier, W.A. Sethares, A.G. Klein, C. Brown, P. Klausmeyer, P. Abry, S. Jaffard, H. Wendt, S.G. Roux, N. Pustelnik, N. van Noord, L. van der Maaten, E. Postma, J. Coddington, L.A. Daffner, H. Murata, H. Wilhelm, S. Wod, and M. Messier. Pursuing automated classification of historic photographic papers from raking light photomicrographs. *Journal of the American Institute for Conservation*, Submitted, 2013.
- [214] S.G. Roux, J.F. Muzy, and A. Arneodo. Detecting vorticity filaments using wavelet analysis : About the statistical contribution of vorticity filaments to intermittency in swirling turbulent flows. *European Physical Journal B*, 8(2) :301–322, March 1999.
- [215] S.C. Crow and F.H. Champagn. Orderly structure in jet turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 48 :547–&, August 1971.

- [216] G.L. Brown and A. Roshko. Density effects and large structure in turbulent mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 64 :775–&, July 1974.
- [217] M. Tanaka and S. Kida. Characterization of vortex tubes and sheets. *Physics of Fluids A-Fluid Dynamics*, 5(9) :2079–2080, September 1993.
- [218] F. Belin, J. Maurer, P. Tabeling, and H. Willaime. Observation of intense filaments in fully developed turbulence. *Journal de Physique II*, 6(4) :573–584, April 1996.
- [219] G.Z. Forristall. Measurements of a saturated range in ocean wave spectra. *Journal of Geophysical Research-oceans and Atmospheres*, 86(NC9) :8075–8084, 1981.
- [220] M.A. Donelan, J. Hamilton, and W.H. Hui. Directional spectra of wind-generated waves. *Philosophical Transactions of the Royal Society A-mathematical Physical and Engineering Sciences*, 315(1534) :509–562, 1985.
- [221] W.B. Wright, R. Budakian, D.J. Pine, and S.J. Putterman. Imaging of intermittency in ripple-wave turbulence. *Science*, 278(5343) :1609–1612, November 1997.
- [222] E. Henry, P. Alstrom, and M.T. Levinsen. Prevalence of weak turbulence in strongly driven surface ripples. *Europhysics Letters*, 52(1) :27–32, October 2000.
- [223] G.V. Kolmakov, A.A. Levchenko, M.Y. Brazhnikov, L.P. Mezhov-Deglin, A.N. Silchenko, and P.V.E. McClintock. Quasiadiabatic decay of capillary turbulence on the charged surface of liquid hydrogen. *Physical Review Letters*, 93(7) :074501, August 2004.
- [224] E. Falcon, S. Fauve, and C. Laroche. Observation of intermittency in wave turbulence. *Physical Review Letters*, 98 :154501, 2007.
- [225] E. Falcon, S.G. Roux, and C. Laroche. On the origin of intermittency in wave turbulence. *European Physical Journal*, 90(3) :34005, May 2010.
- [226] C.S. Cox. Measurements of slopes of high-frequency wind waves. *Journal of Marine Research*, 16(3) :199–225, 1958.
- [227] M.S. Longuet-Higgins. The generation of capillary waves by steep gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 16(1) :138–159, 1963.
- [228] J.H. Chang, R.N. Wagner, and H.C. Yuen. Measurement of high-frequency capillary waves on steep gravity-waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 86 :401–413, June 1978.
- [229] J.H. Duncan, H.B. Qiao, V. Philomin, and A. Wenz. Gentle spilling breakers : crest profile evolution. *Journal of Fluid Mechanics*, 379 :191–222, January 1999.

- [230] L. Biven, S.V. Nazarenko, and A.C. Newell. Breakdown of wave turbulence and the onset of intermittency. *Physics Letters A*, 280(1-2) :28–32, February 2001.
- [231] C. Connaughton, S. Nazarenko, and A.C. Newell. Dimensional analysis and weak turbulence. *Physica D-nonlinear Phenomena*, 184(1-4) :86–97, October 2003.
- [232] N. Yokoyama. Statistics of gravity waves obtained by direct numerical simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 501 :169–178, February 2004.
- [233] V.N. Murthy and E.E. Fetz. Synchronization of neurons during local field potential oscillations in sensorimotor cortex of awake monkeys. *Journal of Neurophysiology*, 76(6) :3968–3982, December 1996.
- [234] P. Fries, J.H. Reynolds, A.E. Rorie, and R. Desimone. Modulation of oscillatory neuronal synchronization by selective visual attention. *Science*, 291(5508) :1560–1563, February 2001.
- [235] M. Siegel and P. Konig. A functional gamma-band defined by stimulus-dependent synchronization in area 18 of awake behaving cats. *Journal of Neuroscience*, 23(10) :4251–4260, May 2003.
- [236] B. Boashash. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal .2. algorithms and applications. *Proceedings of the IEEE*, 80(4) :540–568, April 1992.
- [237] B. Boashash. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal .1. fundamentals. *Proceedings of the IEEE*, 80(4) :520–538, April 1992.
- [238] P. Flandrin. *Temps-Fréquence, Traité des nouvelles technologies, série trait. du signal*,. Hermès, Paris, 1993.
- [239] R.A. Carmona, W.L. Hwang, and B. Torresani. Characterization of signals by the ridges of their wavelet transforms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(10) :2586–2590, October 1997.
- [240] R.A. Carmona, W.L. Hwang, and B. Torresani. Multiridge detection and time-frequency reconstruction. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(2) :480–492, February 1999.
- [241] S.G. Roux, T. Cenier, S. Garcia, P. Litaudon, and N. Buonviso. A wavelet-based method for local phase extraction from a multi-frequency oscillatory signal. *Journal of Neuroscience Methods*, 160(1) :135–143, February 2007.
- [242] S.G. Roux, S. Garcia, B. Bertrand, T. Cenier, M. Vigouroux, N. Buonviso, and P. Litaudon. Respiratory cycle as time basis : An improved

- method for averaging olfactory neural events. *Journal of Neuroscience Methods*, 152(1-2) :173–178, April 2006.
- [243] N. Buonviso, C. Amat, P. Litaudon, S.G. Roux, J.P. Royet, V. Farget, and G. Sicard. Rhythm sequence through the olfactory bulb layers during the time window of a respiratory cycle. *European Journal Of Neuroscience*, 17(9) :1811–1819, May 2003.
- [244] T. Cenier, C. Amat, P. Litaudon, S. Garcia, P.L. de Micheaux, B. Liquet, S.G. Roux, and N. Buonviso. Odor vapor pressure and quality modulate local field potential oscillatory patterns in the olfactory bulb of the anesthetized rat. *European Journal of Neuroscience*, 27(6) :1432–1440, March 2008.
- [245] G. Chimonas and C. O. Hines. Atmospheric gravity waves induced by a solar eclipse. *Journal of Geophysical Research*, 75(4) :875–&, 1970.
- [246] D. C. Fritts and Z. G. Luo. Gravity-wave forcing in the middle atmosphere due to reduced ozone heating during a solar eclipse. *Journal of Geophysical Research-atmospheres*, 98(D2) :3011–3021, February 1993.
- [247] P. Sauli, S.G. Roux, P. Abry, and J. Boska. Acoustic-gravity waves during solar eclipses : Detection and characterization using wavelet transforms. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 69(17-18) :2465–2484, 2007.