N° d'ordre : 044-99

Mémoire présenté pour l'obtention d'une

Habilitation à Diriger des Recherches

Thierry DAUXOIS

Laboratoire de Physique
Ecole Normale Supérieure de Lyon

Ondes Non Linéaires Localisées : Applications en Matière Condensée et en Hydrodynamique

---

présenté le 25 Mai 1999

Serge AUBRY	Directeur de Recherche au CEA de Saclay	Rapporteur
Jean-Louis BARRAT	Professeur à l'Université Lyon 1 (IUF)	
Stephan FAUVE	Professeur à l'ENS Paris (IUF)	
Jean-Noel GENCE	Professeur à l'Université Lyon 1	
Roberto LIVI	Professeur à l'Université de Florence	Rapporteur
Michel PEYRARD	Professeur à l'ENS Lyon (IUF)	
Vladimir ZEITLINE	Professeur à l'Université Paris VI	Rapporteur

Table des Matières

Avant propos

Dans ce mémoire sont résumés les principaux résultats obtenus depuis la soutenance de ma thèse de doctorat le 6 janvier 1993 à l'université de Bourgogne ; elle portait sur l'étude d'un modèle simple d'ADN par des méthodes de la Physique (Dynamique non linéaire et mécanique statistique d'un modèle d'ADN ; Université de Bourgogne, Dijon, 1993). J'ai décidé de ne pas présenter ici les travaux qui étaient des continuations directes de celle-ci même s'ils ont été produits après la soutenance. Cela me permettait de présenter un document plus homogène thématiquement.

Mon activité scientifique est le résultat d'une volonté et d'opportunités de collaborations. Le thème unificateur est l'étude des ondes non linéaires : je me suis intéressé à leur caractérisation, leur stabilité et leur rôle dans plusieurs systèmes complexes. Dans une première partie, je dessine le cadre général de mon travail, puis je précise les thèmes unificateurs des différents chapitres qui, bien que disjoints, présentent de nombreuses et importantes connexions naturelles. Enfin, dans chaque chapitre, je décris plus précisément les thèmes abordés en me limitant aux objectifs initiaux et en dégageant les principaux résultats. Ces présentations ne sont pas des répétitions des travaux présentés sous la forme de publication à la fin de chaque chapitre, mais une introduction au problème, un complément ou une vision légèrement différente. A chaque fois, j'ai rédigé ces parties de la façon la moins technique possible. Le chapitre est alors complété et illustré par l'article que je considère comme le plus abouti sur le sujet traité. Enfin, une liste des articles publiés est donnée en annexe ainsi qu'un bref résumé de ces activités scientifiques.

Les travaux, présentés ici et regroupés en quatre thèmes largement indépendants, sont le fruit de collaborations avec les personnes suivantes

Chapitre A : Thierry Cretegny, Isabelle Daumont, Michel Peyrard (Lyon),
Stefano Ruffo, Alessandro Torcini (Florence-Italie).

Chapitre B : Oleg Braun, Maxim Paliy (Kiev-Ukraine), Michel Peyrard (Lyon).

Chapitre C : Stephan Fauve (Lyon), Laurette Tuckerman (Orsay).

Chapitre D : Bill Young (San Diego-USA), Erika McPhee (Seattle-USA).

J'ai également beaucoup profité de discussions scientifiques avec Florence Raynal et Angel Alastuey même si leur nom n'apparaît jamais.

Enfin, pendant cette période, j'ai séjourné dans trois laboratoires différents : le Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, le "Dipartimento di Energetica" de l'Université de Florence (Italie) et le "Scripps Institution of Oceanography" de San Diego (USA).

Introduction

1. Cadre général

La plupart des systèmes naturels sont non linéaires et doivent donc être décrits par des modèles non linéaires. La différence essentielle avec les systèmes linéaires réside dans l'absence de principe de superposition simple (et c'est bien sûr toute la difficulté). Ce domaine de recherche a été ces quarante dernières années l'objet d'une véritable révolution, guidée par des résultats expérimentaux, par la construction de nouveaux outils mathématiques plus à même d'appréhender ces nouvelles équations et par de gros progrès en simulation numérique. Certains mécanismes non linéaires, qui étaient considérés hier comme insolubles, sont désormais très bien compris et sont utilisés [1] pour créer des lignes de transmission optiques extrêmement rapides, pour modéliser les ondes de l'océan, pour mieux comprendre les polymères conducteurs, ou pour étudier les réseaux discrets comme dans les lignes de jonction Josephson,...

Le véritable tournant qui a mené à la vision moderne des systèmes non linéaires est à rechercher dans les simulations numériques [2] de Fermi, Pasta et Ulam. Ce n'est que dix ans plus tard que Zabusky et Kruskal ont accompli le pas majeur [3] suivant qui a initié la révolution quasi-complète des systèmes intégrables. Le domaine qui a le plus progressé est très probablement celui qui concerne les phénomènes de propagation : l'introduction astucieuse de petits paramètres permet de retomber de manière "magique" sur quelques équations différentielles ou aux dérivées partielles *universelles* et très souvent *intégrables* : cela signifie que l'on peut malgré tout décrire le système comme une superposition de modes propres d'un nouveau type et il est clair que les plus célèbres sont les solitons. Stables grâce à d'un équilibre subtil entre non linéarité et dispersion, ce sont des ondes localisées qui entrent en collision de manière élastique, à un déphasage près.

Une étude a posteriori des différentes démarches montre que les processus de création sont très souvent analogues les uns aux autres. Une équation aux dérivées partielles est obtenue à partir d'une situation expérimentale en hydrodynamique, en optique non linéaire, en science des matériaux,... Les équations modèles obtenues, souvent à partir d'approximations très fortes, présentent des solutions de type ondes solitaires, parfois ce sont même des solitons. Après une étude de ces solutions par simulations numériques, le modèle physique est enrichi par de nouveaux termes comme les effets dissipatifs, les termes de forçage, les effets de dimensionnalité qui avaient été préalablement laissés de côté. C'est par ce processus itératif que l'on a réussi à décrire de manière spectaculaire des situations très complexes.

Le grand atout de la Science du Non Linéaire ("Nonlinear Science") se situe sans doute dans les liens qu'elle tisse entre différents domaines qui partagent une expression mathématique commune. Cette généralité n'est pas sans rappeler celle de la thermodynamique puisque dans les deux cas c'est la structure mathématique abstraite (qui dérive bien sûr des symétries des lois de la physique) qui est cruciale. La thermodynamique traditionnelle - qui s'intéresse plus particulièrement aux systèmes à l'équilibre - étant désormais mieux connue, on a commencé à aborder les problèmes *loin de l'équilibre*. Ce sont généralement ceux qui apparaissent dans les systèmes non linéaires spatialement étendus, où les structures organisées sont aussi fondamentales que le désordre. Il existe donc désormais de nombreuses, nouvelles et prometteuses voies pour faire de la physique fondamentale à l'intersection de la dynamique non linéaire et de la mécanique statistique hors d'équilibre : l'étude des polymères, des cristaux liquides, des plasmas, de la turbulence, de la cinétique de surface, des phénomènes d'agrégation,... Il reste également des questions totalement ouvertes et notamment la question de la création de ces structures non linéaires et de leur compétition au sein d'un système. Au niveau plus mathématique, des efforts intenses sont actuellement consacrés à la construction rigoureuse de hiérarchie entre les équations non linéaires maîtresses. Enfin, de nouvelles applications de ces grandes idées sont à attendre dans les domaines de la biologie, la sociologie, l'économie, l'épidémiologie, l'écologie,....

2. Présentation du mémoire

Le comportement dynamique des systèmes dissipatifs continus met souvent en évidence une localisation spatiale ou spectrale de certaines quantités physiques qui conduit à la formation de structures cohérentes. C'est le cas, par exemple, lorsque l'on considère un état initialement turbulent ou un système forcé par un champ stochastique. On peut citer comme exemples [4] l'hydrodynamique en géométrie bidimensionnelle (nous discuterons d'ailleurs brièvement ce cas dans le chapitre C), les fluides magnétohydrodynamiques bi et tridimensionnels, l'atmosphère des planètes en rotation, les potentiels électrostatiques dans les plasmas magnétiques inhomogènes,... Cette propriété étonnante, que l'on appelle auto-organisation, trouve son origine dans l'instabilité des ondes linéaires et a pour conséquence la formation de larges structures cohérentes. La nature regorge de telles structures et on en retrouve à toutes les échelles : il existe par exemple des tourbillons à l'échelle nanométrique (tourbillons quantiques dans l'hélium liquide) jusqu'aux échelles les plus grandes (galaxies dont la taille se mesure en années-lumières).

Comme ces milieux sont généralement décrits par des équations aux dérivées partielles non linéaires, il est légitime de s'interroger sur le comportement des systèmes discrets. C'est précisément le cadre général de l'étude présentée dans le chapitre A. Dans ma thèse, j'avais montré [5] que, dans les réseaux discrets, les effets non linéaires entre les excitations de type breather donnent naissance à une localisation de l'énergie ; le monde des breathers discrets est aussi impitoyable pour les faibles que le monde réel, puisque nous avons mis en évidence une tendance systématique à favoriser la croissance des excitations les plus grandes aux dépens des autres. Il est logique à ce stade de se demander comment se forment ces structures localisées dans de tels systèmes conservatifs, puisque leur existence et leur stabilité commencent à être bien comprises [6]. Nous avons proposé le phénomène d'instabilité modulationnelle d'une onde linéaire comme la première étape vers la localisation de l'énergie ; ce mécanisme est bien connu en hydrodynamique [7], où il est appelée instabilité de Benjamin-Feir, en optique non linéaire ou en physique des plasma. L'étude de ce mécanisme de création dans les systèmes Hamiltoniens non linéaires discrets et les conséquences que nous avons su en tirer sont présentés dans le chapitre A.

Dans le chapitre B, plus que la formation de ces structures localisées, nous nous sommes attachés à montrer comment, en utilisant ce concept, on pouvait expliquer de manière qualitative et quantitative le comportement de systèmes complexes ; en l'occurrence la dynamique d'atomes adsorbés sur une surface. Notre approche, qui utilise les nombreux résultats obtenus sur la dynamique des kinks dans les équations de type Frenkel-Kontorova ces trente dernières années [8], s'est montrée tout à fait appropriée pour les études que nous avons menées même si cela ne suffit plus pour décrire les processus tels que la friction solide. Ce type de travail, parmi de nombreux autres antérieurs, est un exemple de justification a posteriori de l'étude d'équations modèles comme nous le faisons dans la partie A.

Dans certaines expériences d'hydrodynamique, la répartition de vorticité est proche de celle de certaines solutions particulières de l'équation d'Euler, alors que la dynamique de ces écoulements est régie par l'équation de Navier-Stokes. Partant de cette constatation, l'idée de départ du chapitre C était d'essayer de généraliser certaines techniques pour calculer des solutions de systèmes intégrables perturbés, développées dans le cas unidimensionnel [9]. De manière plus précise, en supposant que ces solutions localisées (ici des vortex) sont proches des solutions stationnaires de l'équation d'Euler bidimensionnelle (famille de Liouville ou famille de Stuart), nous voulions essayer de déterminer si la viscosité ne serait pas le mécanisme qui sélectionnerait la solution non linéaire. Afin de déterminer les solutions et de comprendre leur stabilité, nous avons donc utilisé des méthodes analytiques de la physique non linéaire ainsi que des méthodes numériques. Si nous n'avons pas pu complètement atteindre notre objectif initial, nous avons réussi à obtenir plusieurs résultats intéressants d'un point de vue théorique mais nous en avons également tiré des enseignements désormais pris en compte dans l'interprétation des expériences.

L'objectif de l'étude de la réflexion d'une onde interne présentée dans la partie D est dans notre esprit assez similaire. Il s'agit d'élucider comment la présence des termes non linéaires (et non plus les termes visqueux comme dans le chapitre C) modifie les propriétés du système. Lorsqu'une onde interne se réfléchit, son angle de propagation par rapport à l'horizontale est conservé, ce qui conduit à une augmentation de la densité d'énergie de l'onde réfléchie. La situation la plus étonnante correspond au cas où l'angle de propagation de l'onde incidente est approximativement égal à l'angle de la pente. Pour cet angle critique, la théorie linéaire prévoit une amplitude infinie pour l'onde réfléchie qui reste localisée près du bord. Il est donc essentiel d'avoir recourt à des théories non linéaires. Nous avons donc choisi des méthodes analytiques (échelles multiples et raccordements asymptotiques) pour résoudre ce problème. Cette approche se révèle tout à fait appropriée : elle nous a permis de lever cette singularité et de comprendre les effets de la non linéarité, de la viscosité ainsi que les effets transitoires près de la paroi. Un aspect très particulier de cette théorie faiblement non linéaire est que la description réduite finale est une équation linéaire (i.e. qu'à l'ordre où intervient la condition de compatibilité, toutes les contributions résonantes non linéaires s'annulent), alors que l'on s'attendait à une équation non linéaire de type Korteweg de Vries, comme dans le cas des vagues en eau peu profonde ; pour un "physicien non linéaire", c'est bien sûr un peu décevant au premier abord ! Il faut cependant noter que la non linéarité intervient, néanmoins, de manière importante dans la physique du problème, comme nous le soulignerons plus loin.

En résumé, dans cette première partie, j'ai présenté une vue "transverse" de mes travaux, en dégageant les points communs ainsi que les différences entre les quatre sujets abordés ; conjuguant formalisme mathématique exact et simulations numériques poussées, le thème fédérateur de mes principaux travaux de recherche est donc l'étude des excitations non linéaires localisées (existence et stabilité) et de leur rôle sur les propriétés du système physique étudié (diffusion d'atomes sur des surfaces, instabilités dans les fluides de laboratoire ou dans l'océan,...). Néanmoins, ces différents travaux ne correspondent pas au même niveau de description des phénomènes physiques, ni au même niveau de complexité. Le chapitre A traite une équation modèle unidimensionnel pour répondre à une question fondamentale alors que le chapitre B s'intéresse à un phénomène physique bien réel. Les deux premiers chapitres traitent des problèmes où la discrétisation est importante alors que les deux suivants sont bien décrits par des équations aux dérivées partielles. Ces quatre exemples, parmi de nombreux autres, mettent cependant en évidence qu'un traitement théorique des ondes non linéaires permet de mieux comprendre certains systèmes non linéaires à un niveau mathématique et physique.

Références

[1] *Nonlinear Waves and Solitons in Physical Systems*, edited by R. Camassa, J. M. Hyman & B. P. Luce, *Physica D* **123** (1998).

[2] E. Fermi, J. Pasta & S. Ulam, Los Alamos Science Laboratory Report No. LA-1940 (1955), non publié ; dans *Collected Papers of Enrico Fermi*, edité par E. Segré, University of Chicago Press, Chicago, Vol. 2, 978 (1965).

[3] N. J. Zabusky & M. D. Kruskal, Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters* **15**, 240-243 (1965).

[4] A Hasegawa, Self-organization processes in continuous media, *Advances in Physics* **34**, 1-42 (1985).

[5] T. Dauxois & M. Peyrard, Energy localization in a nonlinear lattices, *Physical Review Letters* **70**, 3995-3998 (1993).

[6] R. S. Mac Kay & S. Aubry, Proof of existence of breathers for time-reversible or hamiltonian networks of weakly coupled oscillators, *Nonlinearity* **7**, 1623-1643 (1994).

[7] T. B. Benjamin & J. E. Feir, The disintegration of wave trains on deep water, *Journal of Fluid Mechanics* **27**, 417-430 (1967).

[8] O. M. Braun & Y. S. Kivshar, Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model, *Physics Reports* **306**, 2-108 (1998).

[9] S. Fauve & O. Thual, Solitary waves generated by subcritical instabilities in dissipative systems, *Physical Review Letters* **64**, 282-284 (1990).